文章编号: 1000-0887(2009)11-1374-07

具有强 Allee效应的半线性椭圆方程正解的存在性和非存在性*

刘冠琦[1], 王玉文[1], 史峻平[1,2]

(1. 哈尔滨师范大学 曾远荣泛函分析研究中心 数学科学学院, 哈尔滨 150025;
2. 威廉玛丽学院 数学系, 威廉斯堡, 弗吉尼亚州, 美国 23187-8795)

(李继彬推荐)

摘要: 研究一个定义在有界光滑区域上的半线性椭圆方程解的问题, 这类问题是在对空间生物种群模型的研究中出现的, 其中的增长函数具有强 Allee效应而且是非齐次的. 用变分方法证得, 在这个有界光滑区域的一个开集上, 如果满足一定条件, 那么对足够大的参数, 方程至少有两个正解, 同时也得到一些非存在性结果.

关 键 词: 半线性椭圆方程; Allee效应; 正解; 存在性

中图分类号: O175.25 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.012

引 言

我们考虑方程

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(x, u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

这里 Ω是 $R^n\ (n \geqslant 1)$ 中的有界光滑区域. 文献 [1-2]最近研究了具有零边界的反应扩散方程 (1)的平衡解的问题.

在生物种群学中, 非线性函数 $f(x, u) \equiv ug(x, u)$ 代表生物增长率, 而 $g(x, u)$ 是关于种群密度 u 的单位增长率的函数. 为了反映因为种群生物密度增长导致的竞争拥挤效应, 以往研究中往往假设 $g(x, u)$ 是递减的, Allee[3] (或见文献 [4])指出生物密度过分稀疏或过分拥挤都会对生物种群的生长起限制作用, 每种生物都有自己最适合的密度, 这种生物增长的模式称为 Allee效应. 如果当 u 很小的时候 $g(x, u)$ 是负的, 我们称它为强 Allee效应, 如果当 u 很小时 $g(x, u)$ 是正的但是比最大值小, 我们称它为弱 Allee效应.

当 $f(x, u)$ 具有弱 Allee效应时, 文献 [2]研究了方程 (1)的解和分歧图像, 同时也涉及到很多生物学中的应用. 对具有强 Allee效应的情形, 当 Ω是具有任意维数的球时, 文献 [5] 讨论了一种典型的情形即 $f(x, u) \equiv u(u - b)(c - u)\ (0 < 2b < c)$ 和类似的情形, 得到一个临界值

* 收稿日期: 2009-02-18; 修订日期: 2009-09-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671049); 美国国家自然科学基金资助项目 (NSF DMS-0314736)
作者简介: 刘冠琦 (1981—), 女, 黑龙江密山人, 讲师, 硕士 (联系人. E-mail: liuguanq@163.com).

λ_*, 当 $\lambda>\lambda_*$ 时, 方程有两个正解, 当 $\lambda<\lambda_*$ 时, 方程没有解. 条件 $0<2b<c$ 保证了方程 (1) 正解的存在, 而对于更一般的 $f(u)$, 若 $f(u)$ 满足 $f(0)=f(b)=f(c)=0$, 这里 $0<b<c$, $u\in(0,b)$ 时 $f(u)<0$, 且 $u\in(b,c)$ 时 $f(u)>0$, 则使方程有解的条件为 (见文献 [6-7])

$$\int_0^c f(u)\,\mathrm{d}u>0. \tag{2}$$

另一方面, 如果 $f(u)$ 不满条件 (2), 那么方程 (1) 就没有正解. 由于 $u=0$ 和 $u=c$ 关于常微分方程 $u'=f(u)$ 都是稳定的, 此时具有强 Allee效应的非线性的函数 $f(u)$ 称为双稳定型. 由条件 (2) 可得到 $u=c$ 比 $u=0$ 更稳定.

本文的主要目的在于找到方程 (1) 的解的存在性和个数以及非存在性, 这里非线性项由空间齐次形式 $f(u)$ 变为非齐次形式 $f(x,u)$. 我们的主要结论是如果可以找到一个 Ω 的一个开子集使类似条件 (2) 成立, 那么方程存在两个正解. 同时当条件 (2) 对任何 $x\in\Omega$ 都不成立时, 我们得到解的不存在性, 这是文献 [7] 中结论的更一般情况.

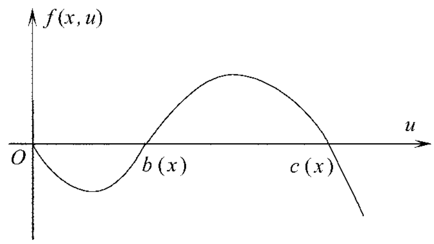

图 1 对固定的 x 满足条件 (f1) ~ (f4) 的 $f(x,u)$ 的简图

本文我们讨论具有强 Allee效应的方程 (1). 我们假设 $f(x,u)$ 满足 (见图 1)

(f1) 对任意的 $u\geqslant 0$, $f(\cdot,u)\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ $(0<\alpha<1)$, 对任意的 $x\in\Omega$, $f(x,\cdot)\in C^1(\mathbf{R}^+)$;

(f2) 对任意的 $x\in\Omega$, 存在 $b(x)$, $c(x)\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ $(0<\alpha<1)$, 且 $0<b(x)<c(x)\leqslant M$, 这里 $M>0$ 为常数, 使得 $f(x,0)=f(x,b(x))=f(x,c(x))=0$;

(f3) 对几乎所有的 $x\in\Omega$, 对任意的 $s\in(0,b(x))\cup(c(x),\infty)$, $f(x,s)<0$, 对任意的 $s\in(b(x),c(x))$, $f(x,s)>0$;

(f4) 存在一个 $N>0$, 对几乎所有的 $x\in\Omega$, $s\geqslant 0$, $f(x,s)/s\leqslant N$.

1 主要结果

为了考虑满足 (f1) ~ (f4) 的方程 (1) 解的存在性, 我们首先得到:

引理 1 假设 f 满足 (f1) ~ (f3). 如果 $u(x)$ 在 Ω 上是可积的, 且 Ω 有一个正测度的可测子集 Ω_0 使得

$$\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s>0,\qquad x\in\Omega_0$$

且
$$\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant 0,\qquad x\in\Omega\setminus\Omega_0,$$

则
$$\int_0^{u(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s,\qquad x\in\Omega_0$$

且
$$\int_0^{u(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant 0,\qquad x\in\Omega\setminus\Omega_0.$$

由假设条件做积分很容易得到此结论, 在此省略其证明, 也可见文献 [8].

引理 2 对任意的 $v\in X\equiv H_0^1(\Omega)$, 定义 $\langle Tu,v\rangle_X=\int_\Omega f(x,u)v\,\mathrm{d}x$, 这里 $f(x,u)$ 满足 (f1) ~ (f4). 那么 T 是 X 上的紧算子.

我们的主要存在性结果如下:

定理 1 若 $f(x,u)$ 满足 (f1) ~ (f4), B_1 是 Ω 的一个开子集, 使得对 $x\in B_1$,

$$\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s > 0, \tag{3}$$

则对足够大的 $\lambda > 0$,方程(1)至少有 2个正解,而对小的 λ,方程(1)没有正解.

证明 我们重新定义 $f(x,u)$,当 $u\in(-\infty,0)\cup(c(x),\infty)$ 令 $f(x,u)\equiv 0$. 由椭圆方程极大值定理,方程(1)的所有解都满足 $0\leqslant u(x)\leqslant c(x)$,因此,这样定义并不影响方程(1)的解集. 定义

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x,\quad F(x,u) = \int_0^{u(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s,$$

那么 $I_\lambda(u)$ 在 X 上是一个 C^2 函数(见文献[6,8]). 由对 $f(x,u)$ 假设,$I_\lambda(\cdot)$ 的任意临界点 u 是方程(1)的一个古典解,且由最大值定理和前面 $f(x,u)$ 的新定义,u 要么是 0,要么对任意的 $x\in\Omega$ 满足 $0 < u(x) < c(x)$.

1.1 $I_\lambda(u)$ 满足 Palais-Smale条件

假设 $\{u_m\}$ 是 X 中的一个序列,且对任意的 $m\in\mathbf{N}$,$|I_\lambda(u_m)|\leqslant C$. 当 $m\to\infty$ 时,$\|I_\lambda'(u_m)\|\to 0$. 因为在 B_1 上,$\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s > 0$,那么一定存在一个正可测集 $\Omega_0\subset\Omega$,使得 $\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s > 0$,$x\in\Omega_0$,且 $\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant 0$,$x\in\Omega\setminus\Omega_0$. 则

$$\begin{aligned}
C \geqslant I_\lambda(u_m) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x,u_m(x))\,\mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega\left(\int_0^{u_m(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \geqslant \\
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega_0}\left(\int_0^{u_m(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x - \\
&\lambda\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\left(\int_0^{u_m(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由引理 1,$\int_0^{u(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s$,$x\in\Omega_0$,且 $\int_0^{u(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\leqslant 0$,$x\in\Omega\setminus\Omega_0$,那么

$$\begin{aligned}
C \geqslant I_\lambda(u_m) &\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega_0}\left(\int_0^{c(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \geqslant \\
&\frac{1}{2}\|u_m(x)\|^2 - \lambda\int_{\Omega_0} A\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u_m(x)\|^2 - \lambda A|\Omega_0|.
\end{aligned}$$

即 $C + \lambda A|\Omega_0|\geqslant\|u_m(x)\|^2/2$,这里 $A = \max_{0\leqslant u(x)\leqslant c(x)}|F(x,u)|$. 所以 $\{u_m\}$ 在 X 中有界.

我们记 $D: X = H_0^1(\Omega)\to X^* = H^{-1}(\Omega)$ 为 X 的对偶映射,则对任意的 $u,\varphi\in X$,

$$Du[\varphi] = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x,$$

且

$$I_\lambda'(u)[\varphi] = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x = Du[\varphi] - J_\lambda'(u)[\varphi],$$

这里 $J_\lambda(u) = \lambda\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x$. 所以

$$I_\lambda'(u) = Du - J_\lambda'(u),$$

那么

$$u = D^{-1}I_\lambda'(u) + D^{-1}J_\lambda'(u),\quad u_m = D^{-1}I_\lambda'(u_m) + D^{-1}J_\lambda'(u_m).$$

由于 $\{u_m\}$ 在 X 中有界,我们得到 $\{u_m\}$ 在 X 中有子列 $\{u_{m_j}\}$ 且 $\{u_{m_j}\}$ 弱收敛于 u. 由引理 2,$J_\lambda'(\cdot)$ 是紧算子,则在 X 中有

$$J'_\lambda(u_{m_j}) \to J'_\lambda(u), \qquad j \to \infty.$$

但当 $m \to \infty$ 时, $\| I'_\lambda(u_m) \| \to 0$, 所以

$$u_{m_j} = D^{-1} I'_\lambda(u_{m_j}) + D^{-1} J'_\lambda(u_{m_j}) \to 0 + D^{-1} J'_\lambda(u) = u, \qquad j \to \infty.$$

Palais-Smale条件成立.

1.2 正解的存在性

由上面的证明, $I_\lambda(u) \geqslant -\lambda M |\Omega_0|$. 所以由 I_λ 满足 Palais-Smale条件且下有界, $\inf I_\lambda(u)$ 是临界值.

但是, 因为 $u = 0$也是方程(1)的 1个解, 为了得到方程(1)的 1个正解, 我们必须排除 $\inf I_\lambda(u)$是 0的可能性. 事实上, 只需证明当 λ足够大时存在一个 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 使得 $I_\lambda(u_0) < 0 = I_\lambda(0)$. 在 $\partial\Omega \cup (\Omega \setminus B_2)$上, 令 $u_0(x) = 0$且在 B_1内 $u_0(x) = c(x)$, 同时适当定义 u_0在 $B_2 \setminus B_1$的值, 这里 B_2是 B_1的一个同心圆, 且 $\Omega \supset B_2 \supset B_1$. 所以

$$I_\lambda(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_\Omega F(x, u_0) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{B_1} F(x, u_0) dx - \lambda \int_{\Omega \setminus B_1} F(x, u_0) dx \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{B_1} F(x, c(x)) dx - \lambda \int_{B_2 \setminus B_1} (-A) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{B_1} F(x, c(x)) dx - \lambda[-A(|B_2| - |B_1|)].$$

由于当 $x \in B_1$时, $\int_0^{c(x)} f(x, s) ds > 0$, 且 $\int_0^{c(x)} f(x, s) ds$是连续的, 所以一定有 1个开子集 B_0满足 $B_0 \subset B_1$且 $\delta > 0$, 使得 $|B_0| > 0$且对 $x \in B_0$, $\int_0^{c(x)} f(x, s) ds \geqslant \delta$. 取 B_2足够小, 使得 $\delta |B_0| + A(|B_1| - |B_2|) > 0$. 则

$$I_\lambda(u_0) \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda\delta |B_0 \cap B_2| - \lambda[-A(|B_2| - |B_1|)] =$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda[\delta |B_0| + A(|B_1| - |B_2|)].$$

故当 λ足够大, $I_\lambda(u_0) < 0$, 即当 λ足够大时, 方程(1)有 1个正解 $u_1(x)$满足 $I_\lambda(u_1) = \inf I_\lambda(u) < 0$.

1.3 用山路引理证明方程(1)还有 1个正解 u_2

固定 $\lambda > 0$使得 $I_\lambda(u_0) < 0$. 由于 $I_\lambda \in C^2(X, \mathbf{R})$, $I_\lambda(0) = 0$, $I'_\lambda(0) = 0$, 所以对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使得 $\|w\| \leqslant \delta'$, 我们有

$$| I_\lambda(w) - I''_\lambda(0)[w, w] | \leqslant \varepsilon \|w\|^2,$$

由于 $I_\lambda(0) = 0$, $I'_\lambda(0) = 0$, 且

$$I''_\lambda(0)[w, w] = \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \lambda \int_\Omega f_u(x, 0) w^2 dx.$$

因为 $f_u(x, 0) < 0$, 所以

$$I''_\lambda(0)[w, w] \geqslant \int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \|w\|^2.$$

如果我们取 $\varepsilon = 1/2$, 则当 $\|w\| = \delta'$时,

$$I_\lambda(w) \geqslant \|w\|^2/2 = \delta'^2/2.$$

令 $\rho = \delta'$, $\alpha = \delta'^2/2$, 如果 $\|u\| = \rho$, 则 $I_\lambda(u) \geqslant \alpha > 0$. 另一方面, 因为 $I_\lambda(0) = 0$又由

1.2小节的证明,存在1个 $u_0 \in X$, 使得 $I_\lambda(u_0) < 0$且 $\|u_0\| > \rho$. 所以由山路引理, I_λ 还有1个临界点 u_2, 使得

$$I_\lambda(u_2) \geqslant \alpha > 0 > I_\lambda(u_1).$$

u_2 是方程(1)的另外1个正解.

1.4 当 λ 很小时方程(1)没有正解

令 $(\Lambda_1, \phi_1(x))$ 为特征方程

$$\begin{cases} \Delta\phi + \Lambda\phi = 0, & 在\ \Omega\ 中, \\ \phi = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上 \end{cases} \tag{4}$$

的一对主特征值和主特征函数,使得在 Ω 上 $\phi_1(x) > 0$. 我们在方程(4)两边乘以 u, 在方程(1)两边乘以 ϕ_1, 相减后在 Ω 上积分,得到

$$\int_\Omega [\Lambda_1 u\phi_1 - \lambda\phi_1 f(x, u)]\,dx = \int_\Omega u\phi_1\left[\Lambda_1 - \lambda\frac{f(x, u)}{u}\right]dx = 0.$$

如果 $\lambda < \Lambda_1/N$, 则由(f4),

$$\Lambda_1 - \lambda\frac{f(x, u)}{u} \geqslant \Lambda_1 - \lambda N > 0,$$

得到矛盾. 所以对很小的 λ, 方程(1)没有正解. □

注记1 作为定理1的1个例子,我们考虑方程

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u(u - b(x))(c(x) - u) = 0, & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{5}$$

这里 $b(x)$, $c(x)$ 是 C^1 函数使得对任意的 $x \in \Omega$ 有 $0 < b(x) < c(x)$.

显然 $f(x, u) = u(u - b(x))(c(x) - u)$ 满足(f1)~(f4). 那么有

$$\int_0^{c(x)} f(x, s)\,ds = \int_0^{c(x)} s(s - b(x))(c(x) - s)\,ds =$$

$$\int_0^{c(x)} [-s^3 + (b(x) + c(x))s^2 - b(x)c(x)s]\,ds =$$

$$-\frac{1}{4}s^4\Big|_0^{c(x)} + \frac{b(x) + c(x)}{3}s^3\Big|_0^{c(x)} - \frac{b(x)c(x)}{2}s^2\Big|_0^{c(x)} =$$

$$\frac{1}{12}[c(x)]^3(c(x) - 2b(x)).$$

由定理1,如果存在1个开集 $B_1 \subset \Omega$, 使得在 B_1 上 $c(x) > 2b(x)$, 那么对足够大的 λ, 方程(5)至少有2个正解.

由定理1的证明,当 $\lambda < \Lambda/N$ 时方程(5)没有解. 其实在这种特殊情况下,可以找到使方程没有解的更准确的 λ 的范围. 我们仍然设 $(\Lambda_1, \phi_1(x))$ 是方程(4)的一对主特征值和特征函数. 由假设,存在 $b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$ 使得 $b_2 \geqslant b(x) \geqslant b_1 > 0$ 且 $c_2 \geqslant c(x) \geqslant c_1 > 0$. 和定理1证明的1.4小节类似,我们有

$$0 = \int_\Omega (u\Delta\phi_1 - \phi_1\Delta u)\,dx = \int_\Omega u\phi_1[\lambda(u - b(x))(c(x) - u) - \Lambda_1]\,dx =$$

$$\int_\Omega u\phi_1[-\lambda b(x)c(x) + \lambda[b(x) + c(x)]u - \lambda u^2 - \Lambda_1]\,dx.$$

所以 $$\lambda\int_\Omega [b(x) + c(x)]u^2\phi_1\,dx = \lambda\int_\Omega b(x)c(x)u\phi_1\,dx + \lambda\int_\Omega u^3\phi_1\,dx + \int_\Omega u\phi_1\,dx.$$

由于 $$\lambda\int_\Omega [b(x) + c(x)]u^2\phi_1\,dx \leqslant \lambda(b_2 + c_2)\int_\Omega u^2\phi_1\,dx$$

且 $$\lambda\int_\Omega b(x)c(x)u\phi_1\,dx \geqslant \lambda b_1c_1\int_\Omega u\phi_1\,dx,$$

我们有

$$\lambda(b_2 + c_2)\int_\Omega u^2\phi_1\,dx \geqslant (\lambda b_1c_1 + \Lambda_1)\int_\Omega u\phi_1\,dx + \lambda\int_\Omega u^3\phi_1\,dx \geqslant$$

$$2\sqrt{\lambda(\lambda b_1c_1+\Lambda_1)}\int_\Omega u^2\phi_1\,dx.$$

在最后 1个不等式中,我们利用了不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 所以得到 $\lambda(b_2+c_2)\geqslant 2\sqrt{\lambda(\lambda b_1c_1+\Lambda_1)}$, 即

$$\lambda\geqslant\frac{4\Lambda_1}{(b_2+c_2)^2-4b_1c_1}$$

是方程 (5)解存在的一个必要条件. □

现在我们来讨论当对任意 $x\in\Omega$, 条件(3)都不成立时,方程(1)解的非存在性. 定义 $c=\max_\Omega c(x)$, $b=\min_\Omega b(x)$. 主要的非存在性结果是

定理 2 定义 $\bar f(u)=\max_{x\in\Omega}f(x,u)\geqslant f(x,u)$. 如果 $\int_0^c\bar f(u)\leqslant 0$, 那么对任意的 $\lambda>0$, 方程(1)没有正解.

为了证明定理 2, 我们首先引入文献[6]中的一个定理. 如果 f是 1个 C^1 函数且存在 $0\leqslant s_0\leqslant s_1\leqslant s_2$, 使得

$$\begin{cases} f(s_i)=0, & (i=1,2),\\ f(s_0)\leqslant 0, & 对\ s_0<s<s_1,\\ f(s)<0, & 对\ s_1<s<s_2,\\ f(s)>0 \end{cases}\tag{6}$$

且
$$\int_{s_0}^{s_2}f(s)\,ds\leqslant 0,\tag{7}$$
有

引理 3 假设 f满足式(6)和(7). Ω为 1个有光滑边界的有界集. 如果方程(1)有 1个正解 u, 那么 u不可能满足下面条件

$$\begin{cases} u_{\max}=\max_{x\in\Omega}u(x)\in(s_1,s_2),\\ u(x)>0. \end{cases}$$

定理 2的证明 如果方程(1)存在正解 (λ,u_*), 则由 $\Delta u_*+\lambda\bar f(u_*)\geqslant\Delta u_*+f(x,u_*)=0$, u_* 是

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda\bar f(u)=0, & 在\ \Omega中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega上 \end{cases}\tag{8}$$

的 1个下解. 而 c是方程(8)的 1个上解. 根据比较方法, 方程(8)必有 1个正解 u使得 $u_*\leqslant u\leqslant c$. 但是如果我们设 $s_0=0$, $s_1=b$且 $s_2=c$, 即 $\bar f$满足式(6)和(7), 那么由引理 3, 方程(8)没有正解. 矛盾. 所以若 $\int_0^c\bar f(u)\,du\leqslant 0$, 那么方程(1)没有正解. □

注记 2 我们注意到 $\int_0^c\bar f(u)\,du\leqslant 0$表明条件(3)对任意 $x\in\Omega$都不成立, 但反之则不然. 事实上我们推测非存在性可以在更弱的条件下成立: 对任意的 $x\in\Omega$, $\int_0^{c(x)}f(x,s)\,ds\leqslant 0$.

定理 2的一个直接结论是

推论 1 若对任意的 $x\in\Omega$, $c(x)\equiv 1$, $\max_{x\in\Omega}b(x)\geqslant 1/2$, 则方程(5)对任意的 $\lambda>0$没有正解. □

在文献[9]中, Dancer和 Yan证得当 $c(x)\equiv 1$且 $\{x\in\Omega: b(x)<1/2\}$ 正可测时, 方程(5)可能有很多局部最小正解. 而推论 1说明关于 $b(x)$的条件对非平凡解的存在性是必要的.

[参 考 文 献]

[1] SHI Jun-ping, Shivaji Ratnasingham. Semilinear elliptic equations with generalized cubic nonlinearities[A]. Discrete and Continuous Dynamical Systems [C]. Proceedings of 5th AIMS International Conference on Dynamic Systems and Differential Equations, Pomona, CA, USA, 2004, 798-805.

[2] SHI Jun-ping, Shivaji Ratnasingham. Persistence in reaction diffusion models with weak Allee effect[J]. Jour Math Biol, 2006, **52**(6): 807-829.

[3] Allee W C. The Social Life of Animals [M]. Boston: Beacon Press, 1951, 233.

[4] Cantrell Robert Stephen, Cosner Chris. Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations [M]. West Sussex: Wiley, 2003, 411.

[5] OUYANG Tian-cheng, SHI Jun-ping. Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem [J]. Jour Diff Equa, 1998, **146**(1): 121-156.

[6] Dancer E N, Schmitt Klaus. On positive solution of semilinear elliptic equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1987, **101**(3): 445-452.

[7] Clment Ph, Sweers Guido. Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem [J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci, 1987, **14**(4): 97-121.

[8] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1983, 550.

[9] Dancer E N, YAN Shu-sen. Construction of various types of solutions for an elliptic problem [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2004, **20**(1): 93-118.

Existence and Nonexistence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equation With Inhomogeneous Strong Allee Effect

LIU Guan-qi[1], WANG Yu-wen[1], SHI Jun-ping[1,2]

(1. Y. Y. Tseng Functional Analysis Research Center and Department of Mathematics, Harbin Normal University, Harbin 150025, P. R. China;

2. Department of Mathematics, College of William and Mary, Williamsburg, VA 23187-8795, USA)

Abstract: A semilinear elliptic equation defined on a bounded smooth domain is studied. This type of problem arises from the studies of spatial ecology model, and the growth function in the equation was of strong Allee effect and inhomogeneous. It was proved by variational methods that the equation has at least two positive solutions for a large parameter if it satisfies some appropriate conditions. Some nonexistence results were also proved.

Key words: semilinear equation; Allee effect; positive solutions; existence