文章编号: 1000-0887(2009)10-1251-10

一类受迫 Linard系统的最终零解*

张永新

(四川大学 数学学院, 成都 610064)

(陈立群推荐)

摘要: 寻找一类带有时间依赖强迫项的 Linard系统的最终零解, 这是一种当 $t\to\pm\infty$ 时趋于 0 的特殊有界解. 由于不是微扰的 Hamilton系统, 所以不能使用 Melnikov方法来判断最终零解的存在性. 研究了一个逼近原系统的周期受迫系统序列的周期解序列, 并且证明这个周期解序列有一个收敛子列, 其极限就是原受迫 Linard系统的最终零解. 其中使用 Schauder不动点定理解决了由非 Hamilton造成的困难.

关 键 词: 最终零解; 有界解; 非 Hamilton系统; 极限函数

中图分类号: O175.12 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.013

引 言

由于在稳定性理论中的重要性[1-2], 有界解成为微分方程定性理论中的一个重要研究对象. 最基本的关于被扰线性系统的有界解理论可以在文献[3]中的第 4章找到. 最近几十年, 许多工作(参见文献[4-9])利用 Melnikov方法或 Liapunov-Schmidt约化研究了微扰的可积系统的不同种类的有界解, 如周期解、同宿解和异宿解等. 另一方面, 拓扑度理论[10-11]和不动点理论[12-13]也被发展起来研究带有不依赖于状态变量并且不能被视为小扰动的时间强迫的非线性系统的周期解和概周期解的存在性.

由文献[14-15]给出的定义, 如果一个轨道与两个不同的平衡点相连则称为异宿轨. 如果连接的是同一个平衡点就称为同宿轨. 而 Hamilton系统的同宿轨(异宿轨)存在于连接鞍点的等能量面的不变曲面(曲线)上. 1990年, Rabinowitz[16]研究了一类非自治 Hamilton系统

$$\ddot{q}+V_q(t,q)=0 \tag{1}$$

的同宿解的存在性, 其中 $t\in\mathbf{R}$, $q:\mathbf{R}\to R^n$, $V:\ \mathbf{R}\times R^n\to\mathbf{R}$ 是可微函数, 且使得 $V(t,0)\equiv0$. 他采用的策略是构造一个逼近原系统的周期辅助系统序列, 再使用变分方法(参见文献[17-18])得到这些辅助系统的周期解序列, 并且证明有子列恰好收敛于原系统的同宿解. 随后, 利用这样的方法, 人们还研究了几类 Hamilton系统的同宿解(参见文献[19-20]). 在这些工作的基础上, 一些人开始考虑带有时间依赖强迫项的非线性系统同宿解的存在性. 其中, Izydorek和 Janczewska[21]研究了系统(1)带有时间依赖强迫项 $f(t)$时的系统, 即

* 收稿日期: 2009-04-09; 修订日期: 2009-08-19
作者简介: 张永新(1976—), 男, 四川三台人, 讲师, 博士生(E-mail: zhangyongxins@gmail.com).

$$\ddot{q} + V_q(t, q) = f(t), \tag{2}$$

其中, $t\in \mathbf{R}$, $q:\mathbf{R}\to R^n$, $V:\mathbf{R}\times R^n\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}\to R^n$, 他们找到一个解 $q_0(t)$满足

$$(q_0(t), \dot{q}_0(t))\to(0, 0), \qquad 当\ t\to\pm\infty. \tag{3}$$

此外, 他们在一个类似于系统(2)的系统中也发现了这类特殊的解[22]. 值得指出的是, 根据文献[14-15]中的定义, 文献[21-22]中得到的解都不是同宿解, 因为其极限(0, 0)并不是系统的解, 即是说, 这个极限不具有非游荡性质(参见文献[15] 45). 为方便起见, 我们建议称形如式(3)的解为最终零解. 显然, 最终零解是一类特殊的有界解, 而同宿解也是一种最终零解. 从这个意义上说, 有些文献(如文献[22-24])事实上研究的是一些 Hamilton系统的最终零解的存在性.

本文中, 我们考虑一类受迫 Linard系统

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t) \tag{4}$$

的最终零解的存在性, 其中f和g是$x\in\mathbf{R}$的连续函数, p是$t\in\mathbf{R}$的有界连续函数. 我们仍然采用一序列辅助的周期受迫系统来逼近系统(4), 并且寻找这个序列的周期解. 因为系统(4)及其辅助周期系统都不是 Hamilton系统, 所以我们使用 Schauder不动点定理来寻找辅助系统的周期解, 来代替在文献[16, 20, 25]中使用的变分方法. 我们证明这个周期解序列有收敛子列, 其极限函数就是系统(4)的最终零解. 我们需要下列假设:

(H_1) p是 $\mathbf{R}$上的非零有界连续函数, 使得对任意 $k\in\mathbf{Z}$, $p(-k)=p(k)$,

$$P(k):=\int_0^k p(s)\,\mathrm{d}s=0, \ 且\ \|P\|_{L^2}:=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|P(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty;$$

(H_2) 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)>0$, 且其原函数 $F(x):=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$对于某个常数 $a>0$满足

$$|F(\pm a)|>\|p\|_{L^1}:=\int_{-\infty}^{+\infty}|p(\tau)|\,\mathrm{d}\tau;$$

(H_3) $g\in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $g(0)=0$, 且对任意 $x\in\mathbf{R}$有 $g'(x)>0$.

本文主要结论为

定理 1　假设条件(H_1)~(H_3)成立, 则系统(4)有非平凡的最终零解 $x(t)$, 即, 当 $t\to\pm\infty$时, $(x(t), \dot{x}(t))\to(0, 0)$.

1　预 备 知 识

首先, 容易找到满足条件(H_1)的函数 p, 如

$$p(t)=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{3}{2^n}|t|+(-1)^n\dfrac{3}{2^n}\left(n+\dfrac{1}{3}\right), & n\leqslant|t|\leqslant n+\dfrac{1}{3},\\[2ex] (-1)^{n+1}\dfrac{3}{2^{n+2}}|t|+(-1)^n\dfrac{3}{2^{n+2}}\left(n+\dfrac{1}{3}\right), & n+\dfrac{1}{3}\leqslant|t|\leqslant n+1,\end{cases}$$

$$n=0, 1, 2, \cdots,$$

事实上, 由于p是一个偶函数(见图 1), 所以其原函数P为奇函数(见图 2)且对任意 $k\in\mathbf{Z}$满足 $P(k)=0$. 不难验证对任意 $k\in\mathbf{Z}$有$P(k)=0$及 $\|p\|_{L^1}=2/3$. 另外 $\max_{t\in[i-1, i]}|P(t)|\leqslant 2^{-i}$, 这表明 $\int_{i-1}^{i}|P(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\int_{i-1}^{i}|P(s)|\,\mathrm{d}s$以及 $\|P\|_{L^2}=2\sum_{i=1}^{+\infty}\int_{i-1}^{i}|P(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}2^{-i+1}=2$. 这样, 我们验证了($H_1$)成立.

对任意 $k\in\mathbf{N}$, 设 $p_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个 $2k$ 周期函数, 且满足对任意 $t\in[-k,k]$, 有 $p_k(t)=p(t)$. 设 $P_k(t):=\int_0^t p_k(s)\,\mathrm{d}s$. 从条件 (H_1) 我们知道 $p(-k)=p(k)$ 和 $P(k)=0$, 所以函数 p_k 和 P_k 在 $\mathbf{R}$ 上都连续.

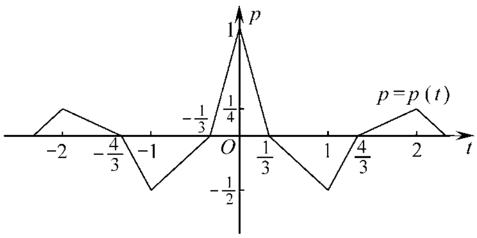

图 1　函数 p

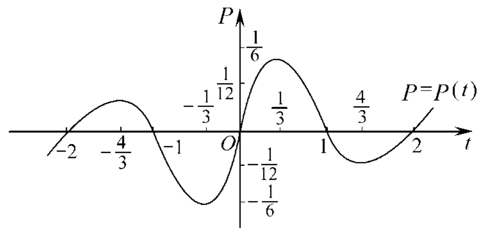

图 2　函数 P

设 $C_b(\mathbf{R},R^n)$ 表示定义在 $\mathbf{R}$ 到 R^n 的有界连续函数在范数 $\|q\|_{L^\infty}:=\sup_{t\in\mathbf{R}}|q(t)|$ 下构成的 Banach空间, 其中 $\sup_{t\in\mathbf{R}}|q(t)|:=\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{i=1,\dots,n}\left\{|x_i(t)|\right\}$. 所以, p, p_k, P, P_k 都是 $C_b(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 中的函数.

引理 1　函数 p, p_k 及其原函数 P, P_k 有下列性质:

(i) $\|p\|_{L^2}<+\infty$;

(ii) 对任意 $k\in\mathbf{N}$, 有 $\|P_k\|_{L^\infty}\leqslant\|p\|_{L^1}$;

(iii) 对任意 $k\in\mathbf{N}$, $P_k(t)$是关于 $t\in\mathbf{R}$ 的 $2k$ 周期函数.

证明

(i) 由 (H_2), $\|p\|_{L^1}<+\infty$. 这表明 $\sup_{t\in\mathbf{R}}|p(t)|<+\infty$ 和 $\lim_{t\to\pm\infty}|p(t)|=0$. 因而, 存在常数 $\delta>0$ 使得对任意 $|t|\geqslant\delta$ 有 $|p(t)|\leqslant 1$. 这样对任意 $|t|\geqslant\delta$ 有 $|p(t)|^2\leqslant|p(t)|$. 由于 p 连续且 $\int_{|t|\leqslant\delta}|p(t)|^2<+\infty$. 所以有

$$
\begin{aligned}
\|p\|_{L^2}^2=&\int_{|t|\geqslant\delta}|p(t)|^2\mathrm{d}t+\int_{|t|\leqslant\delta}|p(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\\
&\int_{|t|\geqslant\delta}|p(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{|t|\leqslant\delta}|p(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\\
&\int_{-\infty}^{\infty}|p(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{|t|\leqslant\delta}|p(t)|^2\mathrm{d}t=\\
&\|p\|_{L^1}+\int_{|t|\leqslant\delta}|p(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty;
\end{aligned}
$$

(ii) 由 (H_3), $P(k)=\int_0^k p(s)\,\mathrm{d}s=0$. 如果 $|t|<k$, 那么

$$
|P_k(t)|=\left|\int_0^t p_k(s)\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\left|\int_0^t|p(s)|\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\|p\|_{L^1},
$$

如果 $nk\leqslant|t|\leqslant(n+1)k$, 其中 $n\in\mathbf{N}$, 那么

$$
\begin{aligned}
\|P_k(t)\|=&\left|\int_0^t p_k(s)\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int_0^{nk}p_k(s)\,\mathrm{d}s+\int_{nk}^t p_k(s)\,\mathrm{d}s\right|=\\
&\left|\int_{nk}^t p_k(s)\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int^{t-nk}p_k(nk+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|=\\
&\left|\int_0^{t-nk}p_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|=\left|\int_0^{t-nk}p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\|p\|_{L^1};
\end{aligned}
$$

(iii) 由 (H_1)知, 对任意 $k\in\mathbf{Z}$ 有 $P(k)=\int_0^k p(s)\,\mathrm{d}s=0$. 所以有

$$
\begin{aligned}
P_k(t+2k) &= \int_0^{t+2k} p_k(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-2k}^{t} p_k(\tau+2k)\,\mathrm{d}\tau = \\
&\int_{-2k}^{t} p_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-2k}^{0} p_k(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t p_k(s)\,\mathrm{d}s = \\
&\int_{-2k}^{0} p_k(s)\,\mathrm{d}s + P_k(t) = \\
&\int_{-2k}^{-k} p_k(s)\,\mathrm{d}s + \int_{-k}^{0} p_k(s)\,\mathrm{d}s + P_k(t) = \\
&\int_0^k p_k(s-2k)\,\mathrm{d}s + \int_{-k}^{0} p(s)\,\mathrm{d}s + P_k(t) = \\
&\int_0^k p_k(s)\,\mathrm{d}s - P(-k) + P_k(t) = P_k(t).
\end{aligned}
$$

证完. □

2　定理 1的证明

系统(4)等价于

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y - F(x) + P(t), \\
\dot{y} = -g(x).
\end{cases}
\tag{5}
$$

这样寻找系统(4)的最终零解等价于寻找系统(5)的使得当 $t\to\pm\infty$ 时 $(x(t), y(t))\to(0, 0)$ 的解. 事实上, 如果 $x(t)$ 是系统(4)的最终零解, 那么由系统(3)知, 当 $t\to\pm\infty$ 时 $x(t)\to 0$ 及 $\dot{x}(t)\to 0$. 注意到当 $t\to\pm\infty$ 时 $F(x(t))\to 0$. 另外, 由 (H_1) 知当 $t\to\pm\infty$ 时 $P(t)\to 0$. 所以, 从系统(5)的第 1个方程, 我们可看出, 当 $t\to\pm\infty$ 时 $y(t)\to 0$. 反之亦然. 类似于文献[16, 21], 我们考虑下列辅助系统:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y - F(x) + P_k(t), \\
\dot{y} = -g(x),
\end{cases}
\tag{6}
$$

其中 P_k 采用上一节的定义.

引理 2　如果条件 $(\mathrm{H}_1\sim\mathrm{H}_3)$ 成立, 那么对任意 $k\in\mathbf{N}$, 系统(6)有 $2k$ 周期解 q_k. 并且, $\left\{q_k\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ 一致有界.

证明　由条件 (H_2), 存在正数 d, ϵ 和 α 使得

$$
|F(\pm a)| > d + \epsilon > d \geqslant \|p\|_{L^1}
\tag{7}
$$

以及

$$
\alpha > 2|F(\pm a)| + 2a\epsilon^{-1}|g(\pm a)|.
\tag{8}
$$

这样, 设 D 是由闭曲线 $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i$ 围成的平面闭区域(见图 3), 其中

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= \left\{(x, y)\in R^2 \,\middle|\, \frac{y^2}{2} + G(x) = \frac{\alpha^2}{2} + G(-a),\ x \leqslant -a\right\}, \\
\Gamma_2 &:= \left\{(x, y)\in R^2 \,\middle|\, y - \frac{\epsilon(x+a)}{2a} = \alpha,\ -a \leqslant x \leqslant a,\ y > 0\right\}, \\
\Gamma_3 &:= \left\{(x, y)\in R^2 \,\middle|\, \frac{(y-\epsilon)^2}{2} + G(x) = \frac{\alpha^2}{2} + G(a),\ x \geqslant a\right\}, \\
\Gamma_4 &:= \left\{(x, y)\in R^2 \,\middle|\, y - \frac{\epsilon(x+a)}{2a} = -\alpha,\ -a \leqslant x \leqslant a,\ y < 0\right\}.
\end{aligned}
$$

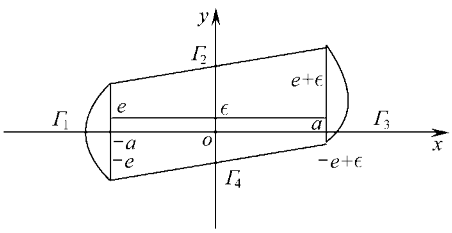

图 3 区域D

设 $\Xi := \{(x, y, t) \mid (x, y) \in D,\ t \in \mathbf{R}\}$. 对任意 $t_0 \in \mathbf{R}$, $(x_0, y_0) \in \Gamma$, 我们断言, 对任意 $t > t_0$, 对应的解 $q_k(t; t_0, x_0, y_0) \in \Xi$. 我们只需要证明对于柱体 $\Gamma \times \mathbf{R}$ 表面上任意点出发的解断言都成立. 事实上, 如果 $(x_0, y_0) \in \Gamma_1$, 由引理 1 (ii)和式(7), $|P_k(t)| \leqslant \|p\|_{L^1} \leqslant d$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y^2}{2} + G(x)\right]\Bigg|_{(6)} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -g(x)[F(x) - P_k(t)] < 0.$$

这表明对于 $t > t_0$ 积分曲线不会从 $\Gamma_1 \times \mathbf{R}$ 离开 Ξ. 如果 $(x_0, y_0) \in \Gamma_2$, 由式(8), 我们得到

$$\dot{x} = y - F(x) + P_k(t) = \alpha + \frac{\epsilon(x+a)}{2a} - F(x) + P_k(t) > \alpha - |F(\pm a)| - d > 0.$$

因此, $\dot{y} \leqslant 0$和 $t > t_0$时, 积分曲线不会从 $\Gamma_2 \times \mathbf{R}$ 离开 Ξ. 当 $\dot{y} > 0$时, 由

$$0 < \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \leqslant \frac{|g(\pm a)|}{|\alpha - F(\pm a)| - d} \leqslant \frac{|g(\pm a)|}{\alpha - 2|F(\pm a)|} \leqslant \frac{\epsilon}{2a},$$

当 $t > t_0$ 时积分曲线也不会从 $\Gamma_2 \times \mathbf{R}$ 离开 Ξ. Γ_3 和 Γ_4 的情形分别类似于 Γ_1 及 Γ_2. 这样我们证明了这个断言.

我们注意到系统(6)是 $2k$ 周期系统, 其对应的扭扩系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + P_k(\theta), \\ \dot{y} = -g(x), \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{9}$$

其中 $(x, y, \theta) \in R^2 \times S^1$, S^1 是周长为 $2k$ 的圆周. 我们考虑截面 $\sum^{t_0} = \{(x, y, t) \mid t = t_0 \in [-k, k]\} \subset R^2 \times S^1$. 设 $\mathscr{F} = \{((x, y, t) \mid (x, y) \in D,\ t = t_0 \in [-k, k]\} \subset \sum^{t_0}$, 我们研究 Poincar 映射 $\mathscr{P}: \mathscr{F} \to \sum^{t_0}$, $\mathscr{P}(q_k(t_0, t_0, x_0, y_0)) = q_k(t_0 + 2k, t_0, x_0, y_0)$. 由上面的断言, 我们知道 $\mathscr{P}: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$. 另外, $\mathscr{F}$ 是紧凸集. 所有由 Schauder不动点定理可知, $\mathscr{P}$ 有不动点, 这就表明系统(6)有 $2k$ 周期解. 因为区域 D 与 k 无关. 所以 $\{q_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 一致有界. 证完. □

实际上, 系统(6)的每个解都是正向有界且定义在 $[t_0, \infty)$ 上. 事实上, 对任意 $(x_0, y_0) \in R^2$, 我们可以象在引理 2那样选择足够大的 α 来构造区域 D 使 $(x_0, y_0) \in D$, 并且证明对应的解都是正向有界且定义在 $[t_0, \infty)$ 上.

注 1 引理 2证明周期解存在性的思路可以在文献[26]中找到. 我们更多的是关注周期解序列的有界性. 从区域 D 的构造可知, 引理 2中得到的周期解序列 $\{q_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 一致有界. 由于 D 与 k 无关, 这样就存在与 k 无关的正数 M 使得

$$|q_k(t)| = \max_{t \in \mathbf{R}}\{|x_k(t)|, |y_k(t)|\} \leqslant M. \tag{10}$$

于是, 由条件 (H_2) 和 (H_3) 可知, 存在与 k 无关的正数 b 和 c 使得

$$b \leqslant f(x_k) \leqslant c, \quad b \leqslant g'(x_k) \leqslant c. \tag{11}$$

现在, 我们考察周期解序列 $\{q_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, 利用 Ascoli-Arzela引理可以得到以下结论.

引理 3 存在 $\{q_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 的子列 $\{q_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ 及 $C_b(\mathbf{R}, R^2)$ 中的连续函数 $q_0: \mathbf{R} \to R^2$ 和 $q_0: \mathbf{R} \to R^2$ 使得当 $i \to +\infty$ 时, $q_i \to q_0$, $\dot{q}_i \to \dot{q}_0$.

证明　我们注意到

$$|x_k(t)-x_k(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right| =$$

$$\left|\int_{t_0}^{t}(y_k(t)-F(x_k(t))+P_k(t))\mathrm{d}t\right|,$$

$$|y_k(t)-y_k(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{t_0}^{t}g(x_k(t))\right|.$$

由引理 1(ⅱ)和式(10)知,存在与 k 无关的正常数 M_1, M_2 使得 $|y_k(t)-F(x_k(t))+P_k(t)|\leqslant M_1$ 及 $|g(x_k(t))|\leqslant M_2$. 这样

$$|x_k(t)-x_k(t_0)|\leqslant M_1|t-t_0|,$$

$$|y_k(t)-y_k(t_0)|\leqslant M_2|t-t_0|.$$

所以$\{q_k\}_{k\in\mathbf{N}}$等度连续. 另外,由式(10)知,$\{q_k\}_{k\in\mathbf{N}}$还是一致有界的. 因此,由 Ascoli-Arzela引理,存在$\{q_k\}_{k\in\mathbf{N}}$的子列$\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}}$收敛于 $C_b(R, R^2)$中的某个函数 $q_0 := (x_0(t), y_0(t))$.

现在,我们来证明$\{\dot{q}_j\}_{j\in\mathbf{N}}$的有界性,这就可以表明$\{\dot{q}_j\}_{j\in\mathbf{N}}\subset C_\mathrm{b}(\mathbf{R}, R^2)$. 事实上,从上面的讨论可知,

$$|\dot{x}_j| = |y_j - F(x_j)+P_j(t)|\leqslant M_1,$$

$$|\dot{y}_j| = |g(x_j)|\leqslant M_2.$$

另外,$\{\dot{q}_j\}_{j\in\mathbf{N}}$还是等度连续的. 实际上,由引理 1(ⅰ)和式(11),设 $\|p\|_{L^2} = d_1 > 0$. 则

$$|\dot{x}_j(t)-\dot{x}_j(t_0)|\leqslant|y_j(t)-y_j(t_0)|+|F(x_j(t))-F(x_j(t_0))|+$$

$$|P_j(t)-P_j(t_0)|\leqslant$$

$$M_2|t-t_0|+\left|\int_{x_j(t_0)}^{x_j(t)}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$M_2|t-t_0|+c|x_j(t)-x_j(t_0)|+d_1|t-t_0|\leqslant$$

$$M_2|t-t_0|+cM_1|t-t_0|+d_1|t-t_0| =$$

$$(M_2+cM_1+d_1)|t-t_0|,$$

$$|\dot{y}_j(t)-\dot{y}_j(t_0)| = |g(x_j(t))-g(x_j(t_0))| = \left|\int_{x_j(t_0)}^{x_j(t)}g'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$c|x_j(t)-x_j(t_0)|\leqslant cM_1|t-t_0|.$$

所以,存在着$\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}}$的子列$\{\dot{q}_{j_i}\}_{i\in\mathbf{N}}\subset\{\dot{q}_j\}_{j\in\mathbf{N}}$在 $C_\mathrm{b}(\mathbf{R}, R^2)$中收敛于某个函数 $\dot{q}_0$. 显然,$\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}}$也 $C_\mathrm{b}(\mathbf{R}, R^2)$中收敛于 q_0.

注 2　我们没有确定子列$\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}}$对于 $t\in\mathbf{R}$ 的一致收敛性. 但是,对任意 $a, b\in\mathbf{R}$, $a<b$, 其一致收敛性在$[a, b]$上成立.

为方便起见,我们仍然用$\{q_k\}$来表示$\{q_i\}_{i\in\mathbf{N}}$. 对任意 $k\in\mathbf{N}$, 设 $E_{2k}\subset C_\mathrm{b}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$表示 $\mathbf{R}$到 $\mathbf{R}$的 $2k$周期函数在范数

$$\|x\|_{E_k} = \left(\int_{-k}^{k}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

下构成的 Banach空间.

现在我们来证明 q_0 为系统(5)的最终零解.

引理 4　在引理 3中得到的函数 q_0 是系统(5)的一个非平凡最终零解.

证明　我们分 4步来证明这个引理.

第 1步　我们证明 q_0 是系统 (5) 的一个解. 对任意 $k\in\mathbf{R}$ 和 $t\in\mathbf{R}$ 有

$$\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}=y_k(t)-F(x_k(t))+P_k(t),\tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t}=-g(x_k(t)).\tag{13}$$

对任意固定的 a, $b\in\mathbf{R}$, $a<b$, 因为在 $[a,b]$ 上 $q_k\to q_0$ 及 $P_k\to P$ 是一致的, 所以在 $[a,b]$ 上

$$\dot{q}_k=\left(\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t}\right)\to w:=(y_0(t)-F(x_0(t))+P(t),\ -g(x_0(t)))\tag{14}$$

也是一致的. 这样就存在 $k_0\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $k\geqslant k_0$ 及 $t\in[a,b]$, 式 (13) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}=y_k(t)-F(x_k(t))+P(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t}=-g(x_k(t)).$$

因此, 如果 $k\geqslant k_0$ 那么 $\dot{q}_k$ 在 $[a,b]$ 上是连续的. 由引理 3 我们知道当 $k\geqslant k_0$ 时, $\dot{q}_k$ 在 $[a,b]$ 内是 q_k 的导函数且一致收敛于 q_0. 在 $[a,b]$ 上式 (14) 和 $q_k\to q_0$ 一致成立, 所以在 (a,b) 上 $w=\dot{q}_0$. 由 a 和 b 的任意性, 我们知道 $w=\dot{q}_0$ 在 $\mathbf{R}$ 上成立且 q_0 满足系统 (5). 另外, 我们实际上已经证明了 $\{q_k\}$ 在 $C_b(\mathbf{R},R^2)$ 中收敛于 q_0;

第 2步　我们证明当 $t\to\pm\infty$ 时 $x_0(t)\to0$. 注意到

$$\ddot{x}_k=-g(x_k)-f(x_k)\dot{x}_k+p_k(t),$$

$$\dot{x}_k\ddot{x}_k=-g(x_k)\dot{x}_k-f(x_k)(\dot{x}_k)^2+p_k(t)\dot{x}_k$$

将上式从 $-k$ 到 k 积分得

$$\int_{-k}^{k}f(x_k)(\dot{x}_k)\,\mathrm{d}t=\int_{-k}^{k}p_k(t)\dot{x}_k\mathrm{d}t.$$

由式 (11), $f(x_k)\geqslant b$. 则

$$b\|\dot{x}_k\|_{E_k}^2\leqslant\left|\int_{-k}^{k}f(x_k)(\dot{x}_k)^2\mathrm{d}t\right|=$$

$$\left|\int_{-k}^{k}p(t)\dot{x}_k\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{-k}^{k}|p_k(t)||\dot{x}_k|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\|p_k\|_{E_k}\|\dot{x}_k\|_{E_k}.\tag{15}$$

又由式 (7), 有

$$\|p_k\|_{E_k}\leqslant\|p\|_{L^2}=d_1.$$

因而, 由式 (15), 得到

$$\|\dot{x}_k\|_{E_k}\leqslant\frac{\|p_k\|_{E_k}}{b}\leqslant\frac{d_1}{b}.\tag{16}$$

另一方面, 我们有

$$x_k\ddot{x}_k=-g(x_k)x_k-f(x_k)x_k\dot{x}_k+pk(t)x_k,$$

将上式从 $-k$ 到 k 积分得

$$-\int_{-k}^{k}(\dot{x}_k)^2\,\mathrm{d}t=-\int_{-k}^{k}x_k\ddot{x}_k\,\mathrm{d}t=-\int_{-k}^{k}g(x_k)x_k\,\mathrm{d}t+\int_{-k}^{k}p_k(t)x_k\,\mathrm{d}t.$$

由式 (11) 及 (H_2), $g(x_k)x_k\geqslant bx_k^2$. 所以有

$$\|\dot{x}_k\|_{E_k}^2=\int_{-k}^{k}g(x_k)x_k\,\mathrm{d}t-\int_{-k}^{k}p_k(t)x_k\,\mathrm{d}t\geqslant$$

$$
\begin{aligned}
&b\|x_k\|_{E_k}^2 - \|p_k\|_{E_k}\|x_k\|_{E_k} \geqslant \\
&b\|x_k\|_{E_k}^2 - d_1\|x_k\|_{E_k}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

因此, 由式(16)和式(17), 存在着与 k 无关的常数 m_1 使得

$$\|x_k\|_{E_k} \leqslant m_1.$$

我们注意到

$$\|x_0\|_{L^2}^2 = \lim_{i\to+\infty}\int_{-i}^{i}|x_0(t)|^2\mathrm{d}t = \lim_{i\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{-i}^{i}|x_k(t)|^2\mathrm{d}t.$$

显然, 对任意 $i\in\mathbf{N}$ 和 $k\in\mathbf{N}$, $k\geqslant i$, 有

$$\int_{-i}^{i}|x_k(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \int_{-k}^{k}|x_k(t)|^2\mathrm{d}t = \|x_k\|_{E_k}^2 \leqslant m_1^2.$$

由注 2, $x_k\to x_0$ 在 $[-i, i]$ 上一致成立. 让 $k\to+\infty$, 则

$$\int_{-i}^{i}|x_0(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant m_1^2,$$

再让 $i\to+\infty$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x_0(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant m_1^2,$$

所以

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{|t|\geqslant r}|x_0(t)|^2\mathrm{d}t = 0, \tag{18}$$

这就表明当 $t\to+\infty$ 时 $x_0(t)\to 0$.

第 3 步　我们证明当 $t\to+\infty$ 时 $y_0(t)\to 0$. 由条件 (H_3), 存在正常数 d_2 满足

$$\|P\|_{L^2} \leqslant d_2. \tag{19}$$

由系统(6), 有

$$y_k^2 = \dot{x}_k y_k + F(x_k)y_k - P_k(t)y_k. \tag{20}$$

又由式(11)和 (H_3), 我们得到

$$g(x_k)x_k \leqslant cx_k^2,$$

所以

$$\left|\int_{-k}^{k}\dot{x}_k y_k\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-k}^{k}\dot{y}_k x_k\,\mathrm{d}t\right| = \int_{-k}^{k}x_k g(x_k)\,\mathrm{d}t \leqslant c\|x_k\|_{E_k}^2.$$

由式(11)和 (H_2), 有

$$|F(x_k)| \leqslant c|x_k|,$$

因此

$$\left|\int_{-k}^{k}F(x_k)y_k\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-k}^{k}|F(x_k)y_k|\,\mathrm{d}t \leqslant c\|x_k\|_{E_k}\|y_k\|_{E_k}.$$

另外, 由式(19),

$$\|P_k\|_{E_k} \leqslant \|P\|_{L^2} \leqslant d_2.$$

所以

$$\left|\int_{-k}^{k}P_k(t)y_k\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-k}^{k}|P_k(t)y_k|\,\mathrm{d}t \leqslant d_2\|y_k\|_{E_k}$$

于是, 由式(20), 有

$$
\begin{aligned}
&\|y_k\|_{E_k}^2 \leqslant c\|x_k\|_{E_k}^2 + c\|x_k\|_{E_k}\|y_k\|_{E_k} + d_2\|y_k\|_{E_k} \leqslant \\
&\quad cm_1^2 + (m_1 + d_2)\|y_k\|_{E_k},
\end{aligned}
$$

这表明存在与 k无关的正常数 m_2使得

$$\| y_k \|_{E_k} \leqslant m_2 .$$

类似于第 2步, 我们得到 $t\to \pm\infty$时 $y_0(t)\to 0$;

第 4步 $p(t)\neq 0$表明 q_0 是非平凡的.

引理证完. □

最后, 综合引理 2~引理 4的结果, 定理 1得证.

[参 考 文 献]

[1] Hahan W. Stability of Motion [M]. Berlin-New York Springer-Verlag 1967.

[2] Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov′s Second Method [M]. Takyo The Math Soc of Japan, 1996.

[3] Hale J K. Ordinary Differential Equations [M]. 2nd ed New York Willey-Interscience, 1980.

[4] Buica A, Gasull A, Yang J The third order Melnikov function of a quadratic center under quadratic perturbations [J]. J Math Anal Appl, 2007, **331**(1) 443–454.

[5] Champneys A, Lord G, Computation of homoclinic solutions to periodic orbits in a reduced-water-wave problem [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1997, **102**(1/2) 101–124.

[6] Chow S N, Hale J K, Mallet-Paret J An example of bifurcation to homoclinic orbits [J]. J Differential Equations, 1980, **37**(3) 351–371.

[7] Dumortier F, LI Cheng-zhi, ZHANG Zhi-fen Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded heteroclinic loops [J]. J Differential Equations, 1997, **139**(1) 146–193.

[8] LI Cheng-zhi, Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation the cusp of order 4 [J]. J Differential Equations, 1989, **79**(1) 132–167.

[9] ZHU Chang-rong ZHANG Wei-nian Computation of bifurcation manifolds of linearly independent homoclinic orbits [J]. J Differential Equations, 2008, **245**(7) 1975–1994.

[10] Mawhin J, Ward J Periodic solutions of second order forced Li nard differential equations at resonance [J]. Arch Math, 1983, **41**(2) 337–351.

[11] Omari P, Villari G, Zanolin F Periodic solutions of Li nard differential equations with one-sided growth restriction [J]. J Differential equations, 1987, **67**(2) 278–293.

[12] Franks J Generalizations of the Poincar –Birkhoff theorem [J]. Annals of Math, 1988, **128**(1) 139–151.

[13] Jacobowitz H Periodic solutions of $\ddot{x}+f(x, t)=0$ via Poincar –Birkhoff theorem [J]. J Differential Equations, 1976, **20**(1) 37–52.

[14] Andronov A, Vitt E, Khaiken S Theory of Oscillators [M]. Oxford Pergamon Press, 1966.

[15] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York Springer, 1983.

[16] Rabinowitz P. Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1990, **114A** (1): 33-38.

[17] Ambrosetti A, Rabinowitz P. Dual variational methods in critical point theory and applications [J]. J Funct Anal, 1973, **14**(2) 349–381.

[18] Chow S N, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory [M]. New York, Springer. 1982.

[19] Carriao P, Miyagaki O. Existence of homoclinic solutions for a class of time-dependent Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl, 1999, **230**(1) 157–172.

[20] Szulkin A, Zou W. Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems [J]. J

Funct Anal, 2001, **187**(1): 25-41.

[21] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems [J]. J Differential Equations, 2005, **219**(2): 375-389.

[22] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for nonautonomous second order Hamiltonian systems with a coercive potential [J]. J Math Anal Appl, 2007, **335**(2): 1119-1127.

[23] Tang X H, Xiao L. Homoclinic solutions for nonautonomous second-order Hamiltonian systems with a coercive potential [J]. J Math Anal Appl, 2009, **351**(2): 586-594.

[24] Tang X H, Xiao L. Homoclinic solutions for a class of second-order Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl, 2009, **354**(2): 539-549.

[25] Zelati V, Ekeland I, S r E. A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems [J]. Math Ann, 1990, **288**(1): 133-160.

[26] Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations [M]. New York: Pergamon Press, 1964.

Eventually Vanished Solutions of a Forced Li nard System

ZHANG Yong-xin

(Department of Mathematics, Sichuan University,
Chengdu 610064, P. R. China)

Abstract Eventually vanished solutions, a special class of bounded solutions which tend to 0 as $t\to\pm\infty$, of a Li nard system with a time-dependent force were found. Not assuming it to be a small perturbation of a Hamiltonian system, the well-known Melnikov method could not be employed to determine the existence of eventually vanished solutions. A sequence of periodically forced systems was applied to approximate the considered system and their periodic solutions were found, where the difficulties caused by the non-Hamiltonian form were overcome by applying the Schauder′s fixed point theorem. The fact that the sequence of those periodic solutions has an accumulation gave the existence of an eventually vanished solution of the forced Li nard system.

Key words eventually vanished; bounded solution; non-Hamiltonian; accumulation