

多杆空间柔性机器人递推 Lagrange 动力学建模和仿真*

章定国

(南京理工大学 理学院, 南京 210094

(陈立群推荐

摘要: 研究了多杆空间柔性机器人的动力学问题. 运用 Lagrange 方法, 结合齐次变换矩阵, 推导得到了多杆空间柔性机器人动力学方程. 在推导过程中采用了运动学递推策略以提高计算效率. 建模时除考虑柔性构件的横向弯曲变形外, 还计及了构件的扭转变形. 基于上述理论研制了多杆空间柔性机器人动力学仿真软件, 并对一空间柔性机器人进行了动力学仿真计算, 验证了理论和软件的先进性能.

关键词: 柔性机器人; 动力学; 数值模拟; 建模

中图分类号: O313.7 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.008

引 言

在机器人动力学特性分析中通常将机器人系统模化为由刚性杆和刚性铰组成的多刚体系统^[1-2]. 然而, 随着机器人朝着高速、轻质、大跨度方向发展, 机器人各部件的弹性变形对机器人末端的运动精度和系统振动等产生了不可忽视的影响. 传统的多刚体系统模型已经无法正确描述实际的机器人系统的动力学性能, 柔性效应对机器人动力学特性的影响受到了各国学者的高度重视^[3-19]. Book^[4]采用 Lagrange 方法, 结合 4×4 齐次变换矩阵、模态展开法, 运用递推策略非常程式化地推导得到了计算效率高的柔性机器人动力学方程. 但 Book 的这部分工作中有缺陷, 在模拟构件的扭转变形时动力学方程是病态的, 模型不能处理构件的扭转效应, 由于问题的复杂性, Book 在文中没有给出仿真算例, 也未能发现这一错误. Cyril^[10]将 N-E 法和 L-E 法相结合, 程式化地得到了柔性杆机器人的动力学方程, 并采用自然正交补方法对动力学方程进行了求解, 文中给出了 6 杆空间构型机器人动力学仿真算例. 潘振宽、洪嘉振、刘延柱^[13]运用 Jourdain 变分原理, 采用单向递推组集方法对柔性机械臂进行动力学建模, 给出了 3 杆机械手的仿真算例. Liu 和 Hong^[16]导出了多柔性杆系统计及动力刚化效应的动力学模型, 考虑

* 收稿日期: 2008-08-15; 修订日期: 2009-08-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10772085); 江苏省自然科学基金资助项目 (BK2007205); 江苏省“青蓝工程”资助项目

作者简介: 章定国 (1967—), 男, 浙江嘉善人, 教授, 博士, 博士生导师 (Tel + 86-25-84315639, E-mail zhangd419@mail.njust.edu.cn; zhangd419@163.com).

了柔性杆的弯曲和拉伸变形,文中给出了平面 2 杆系统的仿真算例. Meirovitch 等^[14]考虑了柔性杆的弯曲和扭转变形,同时也计及了柔性杆横截面转动效应以及剪切效应,这是多杆系统中较少见到的考虑柔性杆扭转变形的动力学模型,但文中未给出相应的仿真算例以说明该方法的程式化计算的可行性.文献[17-19]研究了柔性杆柔性铰机器人的动力学建模和仿真问题,计及了铰的柔性和质量,但模型中未考虑杆的扭转变形.由此可见,在柔性机器人动力学研究中尚少见对臂杆弯扭组合变形的计算,而考虑转动效应对机器人动力学问题非常重要,精确的分析模型应该包含对扭转变形的分析.本文研究了多杆空间柔性机器人递推 Lagrange 动力学建模和仿真技术,不但考虑柔性杆件的横向弯曲变形,而且还计及杆件的扭转变形,在 Book^[4]工作基础上优化了运动递推过程,提高了计算效率.基于所建立的动力学模型,研制了通用的机器人动力学仿真软件.对国际空间站上的 Canadarm2 空间柔性机器人进行了动力学仿真计算,验证了理论和软件的先进性能.

1 柔性机器人运动学

1.1 坐标系的建立和坐标系变换

本文研究由 n 个杆件通过 n 个转动铰连接而成的空间链式机器人.为了清楚地表示坐标系之间的变换关系,对第 i 杆件建立 4 个正交坐标系:坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 固定在第 i 杆件的近端(在铰 i 端, X_b 沿杆件 i 未变形时的中心轴,这个坐标系作为第 i 杆件的基础参考系;坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 固定在第 i 杆件的远端(在铰 $i+1$ 端处,在杆件 i 未变形时, $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 看作是 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 沿杆件 i 的轴线方向平移杆件 i 的长度 L_i 而成;坐标系 $(H_x, H_y, H_z)_i$ 是杆件 i 的 Denavit-Hartenberg 坐标系^[11],固定在第 i 杆件的远端,坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 与坐标系 $(H_x, H_y, H_z)_i$ 之间的 4×4 齐次变换矩阵 dH_i 是一个常数阵;坐标系 $(H_x, H_y, H_z)_i$ 固定在第 i 杆件的近端,铰 i 未动作时, $(H_x, H_y, H_z)_i$ 与 $(H_x, H_y, H_z)_{i-1}$ 重合,它们之间的变换矩阵 HH_i^{-1} 只是铰 i 的铰变量 q_i 的函数.坐标系 $(H_x, H_y, H_z)_i$ 与 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 之间的变换矩阵 Hb_i 也是一个常数阵.定义铰 i 变换矩阵 A_i 为从坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_{i-1}$ 到坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 的变换矩阵,则

$$A_i = dH_{i-1} HH_i^{-1} Hb_i \quad (1)$$

显然 A_i 只是变量 q_i 的函数.定义 E_i 是杆件 i 的变形变换矩阵,即从坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 到杆件 i 变形后坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 的变换矩阵.由于杆件 i 的变形是微变形,故 E_i 可近似表达为^[4]

$$E_i = H_i + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} M_{ij} \quad (2)$$

其中

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{ij} & 0 & -\theta_{z_{ij}} & \theta_{y_{ij}} \\ y_{ij} & \theta_{z_{ij}} & 0 & -\theta_{x_{ij}} \\ z_{ij} & -\theta_{y_{ij}} & \theta_{x_{ij}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} 分别是杆件 i 的第 j 变形线位移模态(在坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 处在坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 的 3 轴上的分量; $\theta_{x_{ij}}, \theta_{y_{ij}}, \theta_{z_{ij}}$ 分别是杆件 i 的第 j 变形角位移模态(在坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_i$ 处在坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 的 3 轴上的分量; δ_{ij} 是杆件 i 第 j 个模态坐标; m_i 是杆件 i 的模态数.

令 0W_i 或 W_i 是机座坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_0$ 到 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 之间的 4×4 齐次变换矩阵,则

$${}^0W_i = W_i = W_{i-1} E_{i-1} A_i = W_{i-1} A_i, \quad (4)$$

其中 W_{i-1} 是机座坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_0$ 到杆件 $i-1$ 的远端坐标系 $(X_d, Y_d, Z_d)_{i-1}$ 之间的 4×4 齐次变换矩阵.

1.2 杆件上点的速度

设 ${}^i h_i(\eta)$ 是杆件 i 上距离坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 的原点为 η 的点, 在变形后表示在坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 的齐次坐标, 则 ${}^i h_i(\eta)$ 可写为

$${}^i h_i(\eta) = [1 \quad \eta \quad 0 \quad 0]^T + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} [0 \quad x_{ij}(\eta) \quad y_{ij}(\eta) \quad z_{ij}(\eta)]^T. \quad (5)$$

该点表示在机座坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_0$ 中的齐次坐标 ${}^0 h_i$ 或 h_i 为

$$h_i = W_i {}^i h_i. \quad (6)$$

于是该点的速度可由下式求出:

$$\frac{dh_i}{dt} = \dot{h}_i = W_{i\tau} \dot{h}_i + W_i \dot{h}_i. \quad (7)$$

为了提高 $W_{i\tau}$ 和 \dot{W}_i 的计算效率, 我们运用运动递推算法, 由式 (4) 对时间分别求一次、二次导数得

$$W_{i\tau} = W_{i-1} A_i + W_{i-1} \dot{A}_i, \quad (8)$$

$$\dot{W}_i = W_{i-1} A_i + 2 W_{i-1} \dot{A}_i + W_{i-1} \ddot{A}_i, \quad (9)$$

其中

$$\dot{A}_i = U_i \dot{q}_i, \quad (10)$$

$$\ddot{A}_i = U_{2i} \dot{q}_i^2 + U_i \ddot{q}_i. \quad (11)$$

这里, $U_i \triangleq \partial A_i / \partial q_i$ 和 $U_{2i} \triangleq \partial^2 A_i / \partial q_i^2$, q_i 是铰变量. 这样, $W_{i\tau}$ 和 \dot{W}_i 就可以从 W_{i-1} 和它的时间导数中递推计算而得. 而 W_{i-1} 和它的时间导数又可从 W_{i-1} 和它的时间导数中递推计算而得,

$$W_i = W_i E_i, \quad (12)$$

$$W_i = W_{i\tau} E_i + W_i \dot{E}_i, \quad (13)$$

$$W_i = W_i E_i + 2 W_{i\tau} \dot{E}_i + W_i \ddot{E}_i, \quad (14)$$

其中

$$E_i = \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} M_{ik}, \quad (15)$$

$$\ddot{E}_i = \sum_{k=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ik} M_{ik}. \quad (16)$$

2 柔性机器人动力学建模

使用 Lagrange 动力学方程推导系统的动力学方程, 为此需要求出系统的动能和势能.

2.1 系统动能

假定机器人的柔性杆是细长型, 采用 Euler-Bernoulli 梁理论, 杆件 i 的动能可表示为

$$K_i = \frac{1}{2} \int_0^L \mu(\eta) \operatorname{tr}(\mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^L J_x(\eta) \left(\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial t} \right)^2 d\eta, \quad (17)$$

式中, $\operatorname{tr}(\cdot)$ 代表对括号中的矩阵求迹, μ 和 J_x 分别代表杆件单位长度质量和绕 x 轴单位长度的转动惯量. 式中第 1 项计及了杆的刚体运动和横向、纵向变形运动的动能, 第 2 项计及了杆的扭转变形运动动能. 把式 (7 表示的 \mathbf{h}_i 和下式表达的杆件扭转角 θ_{xi} , 即

$$\theta_{xi} = \sum_{k=1}^{m_i} \delta_k \theta_{xik} \quad (18)$$

代入式 (17 进行展开, 并将所有杆件的动能累加即得系统的动能, 其中 δ_k 是时间的函数, 而 θ_{xik} 是位置 η 的函数. 系统的动能为

$$K = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\mathbf{W}_i \mathbf{B}_{3i} \mathbf{W}_i^T + 2\mathbf{W}_i \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_i^T + \mathbf{W}_i \mathbf{B}_{1i} \mathbf{W}_i^T) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_i} \dot{\delta}_k \dot{\delta}_l T_{ikl}, \quad (19)$$

其中

$$T_{ikl} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu(\eta) \theta_{xik} \theta_{xil} d\eta \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_{1i} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu^i \mathbf{h}_i^i \mathbf{h}_i^{iT} d\eta \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_{2i} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu^i \mathbf{h}_i^i \mathbf{h}_i^{iT} d\eta \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_{3i} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu^i \mathbf{h}_i^i \mathbf{h}_i^{iT} d\eta \quad (23)$$

考虑到式 (5 表示的 ${}^i \mathbf{h}_i$ 及其时间导数

$${}^i \mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_j [0 \quad x_{ij} \quad y_{ij} \quad z_{ij}]^T \quad (24)$$

又可将 \mathbf{B}_{1i} , \mathbf{B}_{2i} , \mathbf{B}_{3i} 分别写为^[4]

$$\mathbf{B}_{1i} = \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_{ik} \dot{\delta}_{ij} \mathbf{C}_{ikj} \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{2i} = \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_j \mathbf{C}_{j+} + \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_k \dot{\delta}_j \mathbf{C}_{ikj} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_{3i} = \mathbf{C}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_j (\mathbf{C}_{j+} + \mathbf{C}_{ij}^T) + \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_k \dot{\delta}_j \mathbf{C}_{ikj}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{C}_{ikj} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu [0 \quad x_{ik} \quad y_{ik} \quad z_{ik}]^T [0 \quad x_{ij} \quad y_{ij} \quad z_{ij}] d\eta, \quad (28)$$

$$\mathbf{C}_{j+} = \frac{1}{2} \int_0^L \mu [1 \quad \eta \quad 0 \quad 0]^T [0 \quad x_{ij} \quad y_{ij} \quad z_{ij}] d\eta, \quad (29)$$

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{2} \int_0^L \mu [1 \quad \eta \quad 0 \quad 0]^T [1 \quad \eta \quad 0 \quad 0] d\eta. \quad (30)$$

上述假定的机器人的杆型是细长型, 其实还可以进一步推广到以下几种杆型:

I 杆件 i 是任意形状的刚体. 在这种情况下, $m_i = 0$, $\mathbf{B}_{1i} = \mathbf{B}_{2i} = 0$, 在 \mathbf{B}_{3i} 中只剩下 \mathbf{C}_i , 这一项体现了刚体的惯量项, 具体形式比式 (30 来得复杂一些, 是文献 [1] 中的伪惯量阵. 因此当考虑有刚体构件时, 构件形状可以是任意, 只要输入相应的 \mathbf{C}_i 即可.

II 柔性杆件外端有集中质量 M_i . 此时要在动能中加入集中质量 M_i 的贡献, 只要在 C_{ik} , C_{ij} , C_i 中加入集中质量 M_i 的贡献项 C'_{ik} , C'_{ij} , C'_i 即可, 其中

$$C'_{ik} = \frac{1}{2} M_i [0 \quad x_{ik}(L_i) \quad y_{ik}(L_i) \quad z_{ik}(L_i)]^T [0 \quad x_{ij}(L_i) \quad y_{ij}(L_i) \quad z_{ij}(L_i)], \quad (31)$$

$$C'_{ij} = \frac{1}{2} M_i [1 \quad L_i \quad 0 \quad 0]^T [0 \quad x_{ij}(L_i) \quad y_{ij}(L_i) \quad z_{ij}(L_i)], \quad (32)$$

$$C'_i = \frac{1}{2} M_i [1 \quad L_i \quad 0 \quad 0]^T [1 \quad L_i \quad 0 \quad 0]. \quad (33)$$

III 构件近端有集中质量 M_i , 则其贡献只要在 C_i 加上 C''_i , 其中

$$C''_i = \frac{1}{2} M_i [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (34)$$

若集中质量 M_i 在近端附近 (x_0, y_0, z_0 处, 则 C''_i 改为

$$C''_i = \frac{1}{2} M_i [1 \quad x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T [1 \quad x_0 \quad y_0 \quad z_0], \quad (35)$$

若在近端有刚体, 则 C''_i 为伪惯量阵.

2 2 系统势能

势能来源于杆件的弹性变形能和重力势能, 下面分别求这两部分势能.

2 2 1 弹性变形能

假定柔性杆是细长型、小变形, 忽略纵向拉压变形能, 变形能主要由弯曲和扭转变形能构成. 长度为 $d\eta$ 的微元的变形能为^[4]

$$dV_{ei} = \frac{1}{2} d\eta \left\{ E \left[I_z \left(\frac{\partial \theta_{zi}}{\partial \eta} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial \theta_{yi}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + G I_x \left(\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial \eta} \right)^2 \right\}, \quad (36)$$

其中, θ_{xi} , θ_{yi} , θ_{zi} 分别是杆件中性线在位置 η 处绕 x_i, y_i, z_i 轴的转角, E 是材料弹性模量, G 是材料剪切模量, I_x 是杆件横截面对中性轴的极面积惯性矩, I_y, I_z 分别是杆件横截面关于 y_i, z_i 轴的面积惯性矩. 如同式 (18), θ_{yi}, θ_{zi} 可以表示为

$$\theta_{yi} = \sum_{k=1}^{m_i} \delta_k \theta_{yk}, \quad (37)$$

$$\theta_{zi} = \sum_{k=1}^{m_i} \delta_k \theta_{zk}, \quad (38)$$

式中, θ_{yk}, θ_{zk} 的意义如式 (3) 所述. 对式 (36) 在杆件长度上进行积分, 并将所有杆件的变形能相加, 得到系统的变形能 V_e 为

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_i} \delta_k \delta_l K_{ikl} \quad (39)$$

其中

$$K_{ikl} = K_{xikl} + K_{yikl} + K_{zikl}, \quad (40)$$

$$K_{xikl} = \int_0^L G I_x(\eta) \frac{\partial \theta_{xil}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_{xik}}{\partial \eta} d\eta, \quad (41)$$

$$K_{yikl} = \int_0^L E I_y(\eta) \frac{\partial \theta_{yil}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_{yik}}{\partial \eta} d\eta, \quad (42)$$

$$K_{zikl} = \int_0^L E I_z(\eta) \frac{\partial \theta_{zil}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_{zik}}{\partial \eta} d\eta. \quad (43)$$

2.2.2 重力势能

如文献 [4], 系统重力势能为

$$V_g = -\mathbf{g}^T \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i \mathbf{r}_i, \quad (44)$$

其中

$$\mathbf{r}_i = M_i \mathbf{r}_{i1} + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_k \boldsymbol{\varepsilon}_{ik}, \quad (45)$$

其中, \mathbf{g} 是重力矢量, 对于惯性坐标系的形式为 $\mathbf{g}^T = [0 \quad g_x \quad g_y \quad g_z]$; M_i 为杆件 i 的质量; $\mathbf{r}_{i1} = [1 \quad r_{xi} \quad r_{yi} \quad r_{zi}]^T$ 是杆件 i 质心在坐标系 $(X_b, Y_b, Z_b)_i$ 中的齐次坐标; $\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}$ 可以由 C_{ik} 的第 1 行获得, 表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \int_0^{L_i} \mu [0 \quad x_{ik} \quad y_{ik} \quad z_{ik}]^T d\Omega. \quad (46)$$

2.3 系统动力学方程

同文献 [4], 运用 Lagrange 方程来推导机器人系统动力学方程. 对于铰变量 q_j , Lagrange 方程为 (简称铰变量方程)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} + \frac{\partial V_e}{\partial q_j} + \frac{\partial V_g}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (47)$$

对于变形变量 δ_f , Lagrange 方程为 (简称变形变量方程)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\delta}_f} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \delta_f} + \frac{\partial V_e}{\partial \delta_f} + \frac{\partial V_g}{\partial \delta_f} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; f = 1, 2, \dots, m_p, \quad (48)$$

其中 F_j 是作用在铰 j 处的驱动力矩. 将式 (19)、(39)、(44) 表示的动能和势能代入式 (47)、(48), 经过较复杂的推演和归并就能获得系统动力学方程为 (我们进行了详细的推导, 并纠正了文献 [4] 中的许多错误)

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}, \quad (49)$$

其中 \mathbf{z} 是广义坐标列阵, 定义为

$$\mathbf{z} = [q_1 \quad \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \dots \quad \delta_{m_1} \quad q_2 \quad \delta_{21} \quad \dots \quad \delta_{m_2} \quad \dots \quad q_h \quad \delta_{h1} \quad \dots \quad \delta_{m_h} \quad \dots \quad \delta_{m_n}]^T, \quad (50)$$

\mathbf{J} 是系统广义质量阵, 它由动力学方程中广义加速度 $\ddot{\mathbf{z}}$ 前的系数构成, 是正定的对称阵, 它由如下式子给出的量, 按照广义坐标列阵 \mathbf{z} 的次序组合而成:

I 铰变量方程 j ($j = 1, 2, \dots, n$) 中铰变量 q_h 的二次时间导数 \ddot{q}_h 的系数 J_{jh} 为

$$J_{jh} = 2 \text{tr}(\mathbf{W}_{j-1} \mathbf{U}_j \overset{\leftarrow}{\mathbf{F}}_h \mathbf{U}_h^T \mathbf{W}_{h-1}^T), \quad (51)$$

其中

$$\overset{j}{\mathbf{F}}_h = \sum_{i=\max(h, j)}^n \overset{j}{\mathbf{W}}_i \mathbf{G}_i \overset{h}{\mathbf{W}}_i^T \quad (52)$$

由式 (51) 容易得 $J_{jh} = J_{hj}$ (对称性).

II 铰变量方程 j ($j = 1, 2, \dots, n$) 中变形变量 δ_{hk} 的二次时间导数 $\ddot{\delta}_{hk}$ 的系数 J_{jhk} 为 ($1 \leq k \leq m_h$)

对于 $h = n; j = 1, \dots, n$ 情况:

$$J_{jhk} = 2 \text{tr} \left(\overset{\leftarrow}{\mathbf{W}}_{j-1} \mathbf{U}_j \overset{j}{\mathbf{W}}_n \mathbf{D}_{nk} \overset{n}{\mathbf{W}}_n^T \right); \quad (53)$$

对于 $h = j, \dots, n-1; j = 1, \dots, n-1$ 情况:

$$J_{j,hk} = 2 \text{tr} \left\{ \left(\overleftarrow{W}_{j-1} U_j \left[{}^j F_h M_{hk}^T + {}^j \tilde{W}_h D_{hk} \right] W_h^T \right) \right\}; \quad (54)$$

对于 $h = 1, \dots, j-1; j = 2, \dots, n$ 情况:

$$J_{j,hk} = 2 \text{tr} \left\{ \left(\overleftarrow{W}_{j-1} U_j \left[{}^j F_h M_{hk}^T W_h^T \right] \right) \right\}, \quad (55)$$

其中

$${}^j F_h = \sum_{i=\max(h+1, j)}^n {}^j W_i G_i^h W_i^T, \quad h = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, n. \quad (56)$$

值得注意的是: 铰变量方程 j ($j = 1, 2, \dots, n$) 中变形变量 δ_{hk} 的二次时间导数 $\ddot{\delta}_{hk}$ 的系数等于变形变量方程 h, k 中铰变量 q_j 的二次时间导数 \ddot{q}_j 的系数 (对称性)。

III 变形变量方程 j, f 中变形变量 δ_{hk} 的二次时间导数 $\ddot{\delta}_{hk}$ 的系数 I_{jfhk} 为 ($1 \leq f \leq m_j, 1 \leq k \leq m_h$)

对于 $j = h = n$ 情况:

$$I_{nfnk} = 2 \text{tr} \left\{ C_{nbf} \right\} + 2 T_{nbf}; \quad (57)$$

对于 $j = h = 1, \dots, n-1$ 情况:

$$I_{jfhk} = 2 \text{tr} \left\{ M_{jf}^j \Phi_j M_{jk}^T + C_{jbf} \right\} + 2 T_{jbf}; \quad (58)$$

对于 $h = n; j = 1, \dots, n-1$ 情况:

$$I_{jfnk} = 2 \text{tr} \left\{ W_j M_{jf}^j W_n D_{nk} W_n^T \right\}; \quad (59)$$

对于 $j = 1, \dots, n-1; h = j+1, \dots, n-1$ 情况:

$$I_{jfhk} = 2 \text{tr} \left\{ W_j M_{jf}^j \left[{}^j \Phi_h M_{hk}^T + {}^j W_h D_{hk} \right] W_h^T \right\}, \quad (60)$$

其中

$${}^j \Phi_h = \sum_{i=\max(j+1, h+1)}^n {}^j W_i G_i^h W_i^T, \quad j = 1, \dots, n-1; h = j, \dots, n-1. \quad (61)$$

由对称性得 $I_{jfhk} = I_{hkjf}$ 。

式 (49) 中的 R 是广义力列阵, 定义为

$$R = [R_1 R_{11} R_{12} \dots R_{1m_1} R_2 R_{21} \dots R_{2m_2} \dots R_j R_{j1} \dots R_j \dots R_{jm_j} \dots R_{nm_n}]^T, \quad (62)$$

其中, R_j 是铰变量方程 (47) 中除去广义坐标的二次时间导数项剩下的部分, $R_{j\ell}$ 是变形变量方程 (48) 中除去广义坐标的二次时间导数项剩下的部分, 具体地由下式给出:

$$R_1 = -2 \text{tr} \left\{ U_1 Q_1 \right\} + g^T U_1 P_1 + F_1, \quad (63)$$

$$R_j = -2 \text{tr} \left\{ \overleftarrow{W}_{j-1} U_j Q_j \right\} + g^T \overleftarrow{W}_{j-1} U_j P_j + F_j, \quad (64)$$

$$R_{nf} = -2 \text{tr} \left\{ \left[\overleftarrow{W}_{vn} D_{vf} + 2W_n^T \sum_{k=1}^{m_n} \ddot{\delta}_{nk} C_{nbf} \right] W_n^T \right\} - \sum_{k=1}^{m_n} \ddot{\delta}_{nk} K_{nkf} + g^T W_n \varepsilon_{nf} \quad (65)$$

$$R_{jf} = -2 \text{tr} \left\{ W_j M_{jf}^j A_{j+1} Q_{j+1} + \left[\overleftarrow{W}_{vj} D_{jf} + 2W_j^T \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} C_{jbf} \right] W_j^T \right\} - \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} K_{jbf} + g^T W_j M_{jf}^j A_{j+1} P_{j+1} + g^T W_j \varepsilon_{jf}, \quad (66)$$

其中 Q_j, P_j 可以由下面式子递推计算而得

$$Q_n = G_n \overleftarrow{W}_{vn}^T + 2 \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \ddot{\delta}_{nk} D_{nk} \right\} W_n^T, \quad (67)$$

$$Q_j = G_j \overleftarrow{W}_{vj}^T + 2 \left\{ \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} D_{jk} \right\} W_j^T + {}^j \overleftarrow{W}_{j+1} Q_{j+1}, \quad (68)$$

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{r}_n, \quad (69)$$

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{r}_j + {}^j\tilde{\mathbf{W}}_{j+1}\mathbf{P}_{j+1}. \quad (70)$$

在式 (51) ~ (70) 中出现的其它符号 (如 \mathbf{D}_{ik} , \mathbf{G}_i , ${}^j\tilde{\mathbf{W}}_i$, ${}^j\mathbf{W}_i$, $\dot{\mathbf{W}}_{vi}$) 的定义和求解如下:

$$\mathbf{D}_{ik} = \mathbf{C}_{ik} + \sum_{l=1}^{m_i} \delta_{il} \mathbf{C}_{ilk}, \quad (71)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{C}_i + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} (\mathbf{C}_{ik} + \mathbf{C}_{ik}^T), \quad (72)$$

而 ${}^j\tilde{\mathbf{W}}_i$, ${}^j\mathbf{W}_i$, $\dot{\mathbf{W}}_{vi}$ 的意义符合下列式子的表达:

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{A}_j \mathbf{E}_j \dots \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i = \overset{\leftarrow}{\mathbf{W}}_{j-1} \mathbf{A}_j {}^j\tilde{\mathbf{W}}_i = \mathbf{W}_j \mathbf{E}_j {}^j\mathbf{W}_i. \quad (73)$$

对上式求二次时间导数得

$$\dot{\mathbf{W}}_i = \sum_{j=1}^i \overset{\leftarrow}{\mathbf{W}}_{j-1} \mathbf{U}_j {}^j\tilde{\mathbf{W}}_i \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{m_j} \mathbf{W}_j \mathbf{M}_{jk} {}^j\mathbf{W}_i \ddot{q}_k + \dot{\mathbf{W}}_{vi}. \quad (74)$$

从式 (73) 和 (74) 可以看出, ${}^j\mathbf{W}_i$ 是杆件 j 的近端坐标系 ($X_b Y_b Z_b$) _{j} 到杆件 i 的近端坐标系 ($X_b Y_b Z_b$) _{i} 的齐次变换矩阵; ${}^j\tilde{\mathbf{W}}_i$ 是杆件 j 的远端坐标系 ($X_d Y_d Z_d$) _{j} 到杆件 i 的近端坐标系 ($X_b Y_b Z_b$) _{i} 的齐次变换矩阵; $\dot{\mathbf{W}}_{vi}$ 是 $\dot{\mathbf{W}}_i$ 中去掉包含 \ddot{q}_j ($j=1, 2, \dots, i$) 和 \ddot{q}_k ($j=1, 2, \dots, i-1; k=1, \dots, m_j$) 项以后剩下的部分, 可以由下式递推计算而得,

$$\dot{\mathbf{W}}_{vi} = (\dot{\mathbf{W}}_{v(i-1)} \mathbf{E}_{i-1} + 2\mathbf{W}_{v(i-1)} \dot{\mathbf{E}}_{i-1} \mathbf{A}_i + 2\overset{\leftarrow}{\mathbf{W}}_{i-1} \dot{\mathbf{A}}_i + \overset{\leftarrow}{\mathbf{W}}_{i-1} \mathbf{U}_{2i} \dot{q}_i^2) \quad (75)$$

为了进一步提高广义惯量阵的计算效率, 下面对式 (52)、(56)、(61) 中定义的 ${}^j\tilde{\mathbf{F}}_h$, ${}^j\mathbf{F}_h$, ${}^j\Phi_h$ 采用如下的递推计算策略:

对于 ${}^j\tilde{\mathbf{F}}_h$:

$${}^n\tilde{\mathbf{F}}_n = \mathbf{G}_n; \quad (76)$$

当 $j=n; h=n-1, n-2, \dots, 1$ 时,

$${}^n\tilde{\mathbf{F}}_h = {}^n\tilde{\mathbf{F}}_{h+1} (\mathbf{E}_h \mathbf{A}_{h+1})^T, \quad {}^h\tilde{\mathbf{F}}_n = ({}^n\tilde{\mathbf{F}}_h)^T; \quad (77)$$

当 $j=n-1, n-2, \dots, 1; h=j, j-1, \dots, 1$ 时,

$${}^h\tilde{\mathbf{F}}_h = \mathbf{G}_h + {}^h\tilde{\mathbf{F}}_{h+1} (\mathbf{E}_h \mathbf{A}_{h+1})^T, \quad (78)$$

$${}^j\tilde{\mathbf{F}}_h = \mathbf{G}_j {}^h\tilde{\mathbf{W}}_j^T + \mathbf{E}_j \mathbf{A}_{j+1} {}^{j+1}\tilde{\mathbf{F}}_h, \quad {}^h\tilde{\mathbf{F}}_j = ({}^j\tilde{\mathbf{F}}_h)^T. \quad (79)$$

对于 ${}^j\mathbf{F}_h$:

只有当 $m_h > 0$ 时, 才计算

$${}^j\mathbf{F}_h = {}^j\tilde{\mathbf{F}}_{h+1} \mathbf{A}_{h+1}^T, \quad j=1, \dots, n; h=1, 2, \dots, n-1. \quad (80)$$

对于 ${}^j\Phi_h$:

只有当 $m_h > 0$ 且 $m_j > 0$ 时, 才计算

$${}^j\Phi_h = \mathbf{A}_{j+1} {}^{j+1}\tilde{\mathbf{F}}_{h+1} \mathbf{A}_{h+1}^T, \quad j=1, \dots, n-1; h=j, \dots, n-1. \quad (81)$$

3 动力学仿真

基于上述动力学理论, 采用 C++ 语言研制了柔性机器人动力学仿真软件, 软件通用性强、计算效率高、数值稳定性好. 下面以国际空间站上的远程操作系统 (space station remote manipulator system (SSRMS, 又名 Canadam 2^[20]) 为例进行动力学仿真计算 (见图 1, 以验证本文提出的动力学理论和软件的先进性能.

Canadam 2 由肩、上臂、下臂、腕组成, 其中肩和腕各有 3 个转动自由度, 联系上、下臂的肘有 1 个转动自由度, 整个系统有 7 个转动铰和 7 个构件组成. 组成肩、腕的构件短粗, 作刚体假设, 而上、下两臂细长, 因而作柔性体假设. 考虑到计算机性能的限制, 仿真算例中保留了肩的俯仰转动, 凝固了其它两个方向的转动, 系统退化为 5 杆空间时偏置构型柔性机器人, 考虑柔性臂杆的横向弯曲变形以及绕纵轴的扭转变形, 对弯曲和扭转变形各取前 3 阶模态.

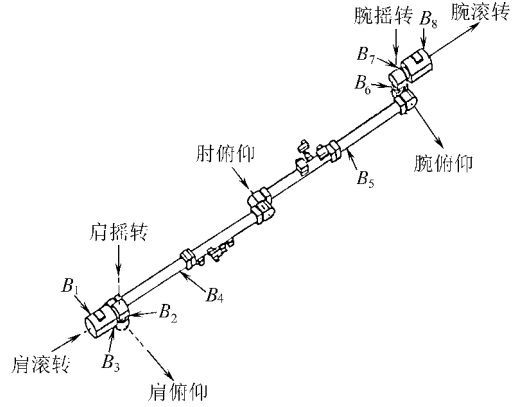


图 1 空间站远程操作系统

图 2~图 10 给出的是 Canadam 2 在某构型位置释放, 自由下落时某些运动结果. 图 2~图 6 给出了上、下臂均为刚性和柔性两种不同仿真情形的比较, 实线代表柔性机器人的运动参数变化图, 虚线代表刚性机器人的运动参数变化图, 图中可以看出 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 在柔性时有明显的波动. 图 7~图 10 表示了第 2 柔性杆末端的变形位移和变形速度, 而刚性机器人的变形为 0. 从这些结果可以看出, 臂杆的弯曲变形和扭转变形非常明显, 对系统的动力学性态的影响不容忽视.

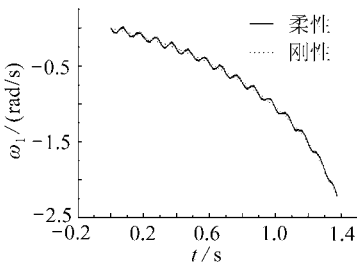


图 2 关节转角时间变化率 ω_1

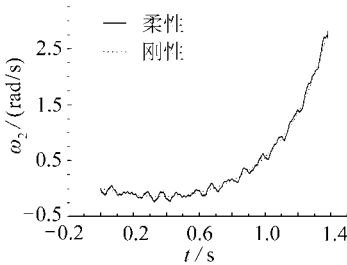


图 3 关节转角时间变化率 ω_2

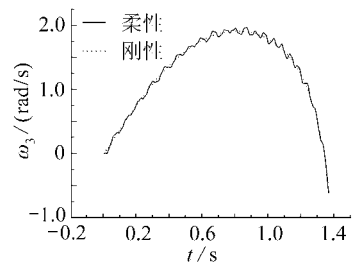


图 4 关节转角时间变化率 ω_3

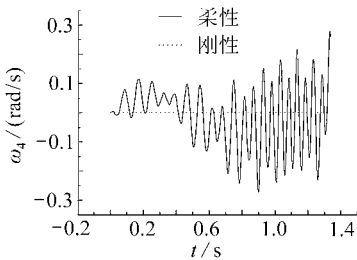


图 5 关节转角时间变化率 ω_4

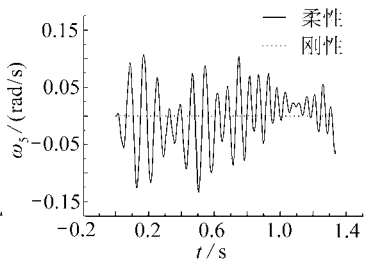


图 6 关节转角时间变化率 ω_5

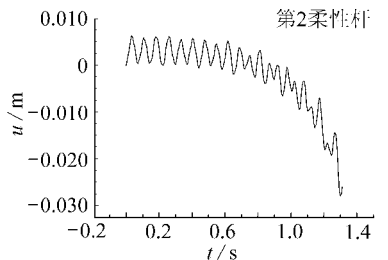


图 7 第 2 柔性杆末端弯曲变形

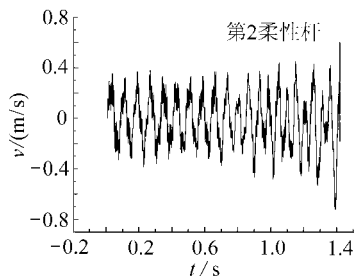


图 8 第 2 柔性杆末端弯曲变形速度

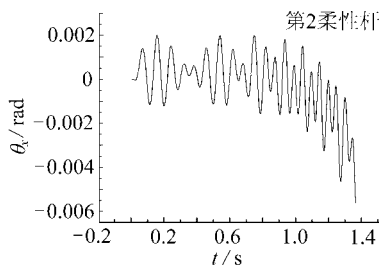


图 9 第 2 柔性杆末端扭转变形

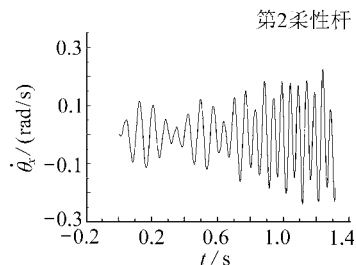


图 10 第 2 柔性杆末端扭转变形速度

致谢 感谢南京理工大学青年学者基金 (NJUST200504 对本文的资助。

[参 考 文 献]

- [1] Fu K S, Gonzalez R C, Lee C S G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence [M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1987
- [2] Angeles J Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms [M]. New York Springer-Verlag, 2002
- [3] Sunada W H, Dubowsky S. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members [J]. Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, **105**(1): 42-51
- [4] Book W J. Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms [J]. The International Journal of Robotics Research, 1984, **3**(3): 87-101
- [5] Urosic P B, Nadira R, Mahil S S. A finite element/Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulator [J]. Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, **108**(3): 198-205
- [6] Wang P K C, WEI Jin-duo. Vibrations in a moving flexible robot arm [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **116**(1): 149-160
- [7] Naganathan G, Soni A H. Coupling effects of kinematics and flexibility in manipulators [J]. The International Journal of Robotics Research, 1987, **6**(1): 75-84
- [8] Low K H, Vidyasagar M. A Lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator systems [J]. Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1988, **110**(2): 175-181.
- [9] Naganathan G, Soni A H. Nonlinear modeling of kinematic and flexibility effects in manipulator design [J]. Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1988, **110**(3): 243-254
- [10] Cyril X. Dynamics of flexible-link manipulators [D]. Ph.D Thesis Montreal Department of Mechanical Engineering McGill University, 1988
- [11] Jonker B. A finite element dynamic analysis of flexible manipulators [J]. The International Journal of Robotics Research, 1990, **9**(4): 59-74
- [12] 管贻生, 安永辰. 机器人手臂弹性动力学分析的 Kane 方法 [J]. 机器人, 1992, **14**(1): 45-51.
- [13] 潘振宽, 洪嘉振, 刘延柱. 柔性机械臂动力学方程单向递推组集建模方法 [J]. 力学学报, 1993, **25**(3): 327-333
- [14] Meirovitch L, Stemple T. Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasi-coordinates [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, **18**(4): 678-688
- [15] CHEN Wen. Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators [J]. Computers

- and Structures, 2001, **79**(2): 183-195
- [16] LIU Jin-yang HONG Jia-zhen Geometric stiffening of flexible link system with large overall motion[J]. Computers and Structures, 2003, **81**(32): 2829-2841.
- [17] 边宇枢, 陆震. 柔性机器人动力学建模的一种方法 [J]. 北京航空航天大学学报, 1999, **25**(4): 486-490
- [18] Albedoor B O, Alnusallam A A. Dynamics of flexible-link and flexible-joint manipulator carrying a payload with rotary inertia[J]. Mech Mach Theory, 2000, **35**(6): 785-820
- [19] 章定国, 周胜丰. 柔性杆柔性铰机器人动力学分析 [J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(5): 615-623
- [20] Nguyen P K, Hughes P C. Teleoperation from the space shuttle to the space station[J]. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1994, **161**: 353-410

Recursive Lagrangian Dynamic Modeling and Simulation of Multi-Link Spatial Flexible Manipulator Arms

ZHANG Ding-guo

(School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210094 P. R. China)

Abstract The dynamics for multi-link spatial flexible manipulator arms consisting of n links and n rotary joints is investigated. Kinematics of both the rotary-joint motion and the link deformation were described by 4×4 homogenous transformation matrices and the Lagrangian equations were used to derive the governing equations of motion of the system. In the modeling the recursive strategy for kinematics was adopted to improve the computational efficiency. Both the bending and torsional flexibility of the link were taken into account. Based on the presented method a general-purpose software package for dynamic simulation was developed. To validate the algorithm presented, the dynamic simulation of a spatial flexible manipulator arm was given as an example.

Key words flexible manipulator arm; dynamics; numerical simulation; modeling