

任意梯度分布功能梯度圆环的热弹性分析*

彭旭龙, 李显方

(中南大学 土木建筑学院 力学与传感技术研究所, 长沙 410083)

(沈惠申推荐)

摘要: 对沿径向任意变化的材料参数的功能梯度圆环进行了热弹性分析. 与以前关于该问题的分析不同, 既不需要预先给定具体的梯度变化形式, 也不需要对接头进行细分. 给出一种新的有效解法将问题转换为求解 Fredholm 积分方程, 从而通过 Fredholm 积分方程的解给出热应力和位移的分布情况. 最后通过算例分析了内外表面受不同温度作用时, 材料参数呈梯度变化对圆环的应力和位移变化的影响, 计算结果表明某些特定的材料梯度可有效缓解圆环内的热应力分布. 该文得到的结果对功能梯度圆环在结构安全设计方面有重要的理论指导意义.

关键词: 功能梯度材料; 热弹性分析; 任意功能梯度; 圆环

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

DOI 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.001

引 言

功能梯度材料作为一种特殊的复合材料, 其材料的微观组成和性能随位置状态呈现连续变化, 并且功能梯度材料可将性能各异的材料按照设计的意愿在结构内部非均匀、连续地合成新型材料, 以适用于各种特殊的工程结构极限需要. 现在, 其用途已由原来的航天工业扩大到核能源、燃气涡轮发动机和土木工程等诸多领域.

起初, 人们期望将功能梯度材料用于航空航天、核反应堆和内燃机等承受极高热载的结构领域, 因而对功能梯度的热弹性应力的研究十分关注^[1-4]. 例如, Noda 等人主要研究了功能梯度材料板、空心圆环及空心球的热弹性问题^[1-3]; Tanigawa 等^[4-6]主要研究了非均匀材料在各种不同热源下的瞬态热弹性应力响应和热应力的缓和问题; 另外 Tanaka 等^[7-8]研究了功能梯度材料板及柱的稳态热应力优化设计问题; Ravichandran^[9], Font 等^[10]和 Chi^[11]等对功能梯度残余热应力进行了研究; Zimmernan 和 Lutz^[12]对功能梯度圆柱的一维热应力问题进行了分析, 另外 Jabbari 等^[13-14]求得了材料常数沿半径按幂函数形式变化时功能梯度圆柱中热应力分布情况. 由于功能梯度材料的材料参数随空间位置变化, 也就是说材料物性参数是坐标的函数, 因而所有描述功能梯度材料的控制方程都是变系数的微分方程, 除了几种特殊情况外要得到热弹性场的精确解析解几乎不可能. 因此, 以往的研究基本是针对几种特定的材料分布来求

* 收稿日期: 2009-05-15; 修订日期: 2009-08-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672189)

作者简介: 彭旭龙 (1983—), 女, 湖南湘乡人, 博士生;

李显方 (1964—), 男, 湖南永州人, 教授, 博士生导师 (联系人. Tel + 86-731-88877750, E-mail xfl@mail.csu.edu.cn).

解(如假设功能梯度材料的弹性参数按指数或幂函数形式变化),如文献[13-14].另一种方法就是采用多层均匀材料进行模拟取代,如文献[6].如果允许材料参数任意变化,能够给出应力的解析解或近似解,无疑会对工程设计和结构优化带来重要影响.

本文针对功能梯度圆环问题(如飞轮,散热片),提出一种新的方法,将热弹性问题转换为一个 Fredholm 积分方程的求解.通过 Fredholm 积分方程的解给出热应力和位移的分布情况,并通过数值算例分析了不同梯度变化对功能梯度圆环的热应力和位移变化的影响.该方法对于材料性能参数沿半径方向任意变化的功能梯度圆环均适用.

1 热弹性问题的描述

考虑一功能梯度圆环,其内外半径分别为 a 和 b (见图 1),其内部温度变化由 $T = T(r)$ 来描述,因此本问题为平面应力轴对称问题.此时,径向位移 $u_r \neq 0$ 对应的几何方程为

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \tag{1}$$

物理方程为

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1-\nu^2(r)} \left\{ \epsilon_r + \nu(r)\epsilon_\theta - \alpha(r)[1+\nu(r)]T(r) \right\}, \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(r)}{1-\nu^2(r)} \left\{ \epsilon_\theta + \nu(r)\epsilon_r - \alpha(r)[1+\nu(r)]T(r) \right\}. \tag{3}$$

考虑式(1)~(3),可以得到用径向应力 σ_r 表示的径向位移 u_r

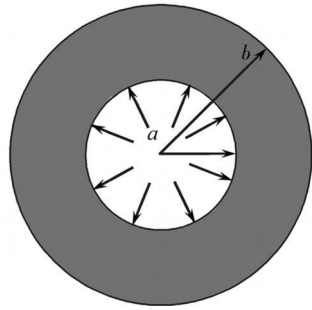


图 1 功能梯度圆环示意图 和环向应力 σ_θ 的表达式:

$$u_r = \frac{A}{x(r)} + \frac{1}{x(r)} \int_a^r x(s) \left\{ \frac{1-\nu^2(s)}{E(s)} \sigma_r(s) + \alpha(s)[1+\nu(s)]T(s) \right\} ds \tag{4}$$

$$\sigma_\theta = \nu(r)\sigma_r + \frac{E(r)}{r} u_r - E(r)\alpha(r)T(r), \tag{5}$$

其中, A 为由适当的边界条件决定的常数, $x(r) = \exp\left[\int_a^r \frac{\nu(s)}{s} ds \right]$.

将式(4)代入式(5),再代入平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{6}$$

经过化简,即得到一个关于 σ_r 的积分-微分方程:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1-\nu(r)}{r} \sigma_r - \frac{E(r)}{r^2 x(r)} \int_a^r \frac{[1-\nu(\rho)]x(\rho)}{E(\rho)} \sigma_r(\rho) d\rho = F(r) + A \frac{E(r)}{r^2 x(r)}, \tag{7}$$

式(7)两边对 r 积分得到

$$\sigma_r + \int_a^r K(r, \rho) \sigma_r(\rho) d\rho = F_1(r) + A f(r) + B, \tag{8}$$

其中, A, B 为待定常数,可由边界条件得到.函数 $F(r), F_1(r), K(r, \rho)$ 和 $f(r)$ 的具体表达式如下:

$$F(r) = \frac{E(r)}{r^2 x(r)} \int_a^r x(\rho) \alpha(\rho) [1+\nu(\rho)] T(\rho) d\rho - \frac{E(r)\alpha(r)T(r)}{r}, \tag{9}$$

$$F_1(r) = \int_a^r F(\rho) d\rho, \tag{10}$$

$$K(r, \rho) = \frac{1 - \nu(\rho)}{\rho} - \frac{[1 - \nu^2(\rho)]\chi(\rho)}{E(\rho)} \int_a^r \frac{E(s)}{s^2 \chi(s)} ds \quad (11)$$

$$f(r) = \int_a^r \frac{E(s)}{s^2 \chi(s)} ds. \quad (12)$$

值得指出的是在以上的推导过程中, 弹性模量 $E(r)$, Poisson 比 $\nu(r)$, 热膨胀系数 $\alpha(r)$ 以及下面的热传导系数 $k(r)$ 都沿半径方向任意变化. 功能梯度材料对应于这些材料参数为连续函数的情况, 而分层结构模型则对应于这些材料参数为分段常数的情况. 对于一些实际问题, 材料的物性参数有可能还与温度相关, 显然, 这将导致一个困难的非线性问题. 为简单起见, 我们在此考虑物性参数仅仅依赖于半径.

2 问题的求解

上面推导中, 式 (8) 中的积分常数 A, B 可由边界条件 $\sigma_r(a) = -q_i$, $\sigma_r(b) = -q_o$ 求得

$$A = \frac{-q_o + q_i}{f(b)} - \frac{F_1(b)}{f(b)} + \frac{1}{f(b)} \int_a^b K(b, \rho) \sigma_r(\rho) d\rho \quad B = -q_i$$

将求得的 A, B 代回式 (8), 即得到关于 σ_r 的 Fredholm 积分方程:

$$\sigma_r + \int_a^b L(r, \rho) \sigma_r(\rho) d\rho = h(r), \quad (13)$$

其中核函数 $L(r, \rho)$ 和 $h(r)$ 的具体表达式为

$$L(r, \rho) = \begin{cases} K(r, \rho) - \frac{f(r)}{f(b)} K(b, \rho), & \rho < r \\ -\frac{f(r)}{f(b)} K(b, \rho), & \rho > r \end{cases} \quad (14)$$

$$h(r) = F_1(r) + \frac{f(r)}{f(b)} [q_i - q_o - F_1(b)] - q_i \quad (15)$$

由于获得的方程 (13) 是第二类 Fredholm 积分方程, 根据 Fredholm 积分方程择一定理, 我们推知由该具体问题导出的方程有唯一解. 为求此解答, 我们采用文献 [15] 中给出的方法. 考虑到核函数 $L(r, \rho)$ 在对称轴 $r = \rho$ 上的不连续性, 对积分部分的求解采用修正的 Simpson 公式, 然后运用 Nyström 插值即可求得任意点处的 σ_r 值. 从而, 通过式 (4) 和式 (5) 可进一步确定位移 u_r 以及环向应力 σ_θ .

3 数值算例及讨论

下面我们主要对稳态温度场作用下的功能梯度圆环进行讨论. 假设圆环从某一均匀温度加热, 内面 ($r = a$) 增温 T_a , 外面 ($r = b$) 增温 T_b . 在没有内热源以及热流稳定以后, 变温 $T(r)$ 应当满足稳态条件下的热传导方程:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[rk(r) \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0 \quad a \leq r \leq b \quad (16)$$

上式两边乘以 $r dr$, 对 r 积分, 再乘以 $dr / (rk(r))$, 然后再对 r 进行积分, 得

$$T(r) = C \int_a^r \frac{1}{\rho k(\rho)} d\rho + D. \quad (17)$$

由边界条件 $T_{r=a} = T_a, T_{r=b} = T_b$ 求出任意常数 C 及 D 后再代回上式, 经过简化得

$$T(r) = \frac{T_b - T_a}{\int_a^b \frac{1}{\alpha_k(\rho)} d\rho} \int_a^r \frac{1}{\alpha_k(\rho)} d\rho + T_a \quad (18)$$

一旦变温 T 确定, 代入上面的热弹性分析中, 即可得到相应问题的热应力分布. 由于本文主要考虑材料的梯度变化对热应力的影响, 因此, 在以下的算例中, 我们假设圆环的内外表面无载荷作用, 即 $q_i = q_o = 0 \text{ Pa}$. 首先, 为验证本文提出的方法的有效性及其收敛性或者解答的精度, 我们对材料参数呈特殊函数变化时的解析解和本文提供的数值解进行比较. 假设 Poisson 比为常数, 其他所有的材料参数在径向上呈幂函数的梯度变化:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{a}\right)^{m_1}, \quad \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2}, \quad k(r) = k_i \left(\frac{r}{a}\right)^{m_3}, \quad (19)$$

其中, m_1, m_2, m_3 为常数, E_i, α_i, k_i 分别为圆环内面的材料参数. 采用文献 [13] 中的方法, 可求得此时功能梯度圆环中的位移和热应力为

$$\begin{cases} u_r = a \left[B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_1} + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_2} + D_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2+1} + D_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2-m_3+1} \right], \\ \sigma_r = \frac{E_i}{1-\nu^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{m_1} \left\{ (\eta_1 + \nu) B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_1-1} + (\eta_2 + \nu) B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_2-1} + \right. \\ \left. [(m_2 + 1 + \nu) D_1 - \alpha_i (1 + \nu) A_2] \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2} + [(m_2 - m_3 + 1 + \nu) D_2 + \alpha_i (1 + \nu) A_1] \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2-m_3} \right\}, \\ \sigma_\theta = \frac{E_i}{1-\nu^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{m_1} \left\{ (\eta_1 + 1) B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_1-1} + (\eta_2 + 1) B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{\eta_2-1} + \right. \\ \left. [(\eta_1 + 1 + \nu) D_1 - \alpha_i (1 + \nu) A_2] \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2} + [(\eta_2 + 1 + \nu) D_2 + \alpha_i (1 + \nu) A_1] \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2-m_3} \right\}, \end{cases} \quad (20)$$

参数 $\eta_1, \eta_2, A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2$ 的具体表达式见附录.

图 2(a), (b) 为式 (20) 与采用本文提出的方法得到的热应力分布的比较图. 图中采用 TiC 为内表面材料, 也即 $E_i = 460 \text{ GPa}, \alpha_i = 7.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, k_i = 20 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \nu = 0.336^{[16]}$, 内外表面增温分别为 $T_a = 0 \text{ K}, T_b = 500 \text{ K}$. 从图 2(a), (b) 可以看出, 采用本文提出的方法得到的结果(星号)与解析解(实线)吻合非常好.

与式 (19) 表示的材料参数分布形式不同, 下面我们考虑功能梯度圆环内外表面为给定的材料, 而内部的材料参数假定为如下形式:

$$\begin{cases} E(r) = E_i + (E_o - E_i) \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{\beta_1}, \\ \alpha(r) = \alpha_i + (\alpha_o - \alpha_i) \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{\beta_2}, \\ k(r) = k_i + (k_o - k_i) \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{\beta_3}, \end{cases} \quad (21)$$

其中, E_i, α_i, k_i 为内表面的材料参数 (如 TiC), E_o, α_o, k_o 为外表面的材料参数 ($NiE_o = 199.5 \text{ GPa}, \alpha_o = 18 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, k_o = 90.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}), \nu = 0.312^{[16-17]}$). Poisson比设为常数, 选取 TiC 和 Ni 的平均值 $\nu = 0.324^{[18]}$. 边界条件取 $T_a = 0 \text{ K}, T_b = 500 \text{ K}$. 另外, 为有效体现梯度参数对结构屈服破坏的影响, 除径向应力和环向应力外, 我们还采用与 von Mises 屈服准则相应的应力 $\sigma_{VM}^{[19]}$ 来对结构的受力情况进行分析, 其中 σ_{VM} 的具体表达式为

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (22)$$

图 3~5 分别分析了梯度参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 对热应力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{VM}$ 的影响. 从图 3 中可以看出, 随着 β_1 的增大, 径向应力 σ_r 增加, 屈服应力 σ_{VM} 增加, 环向应力 σ_θ 却是靠近内表面增加而靠近外表面却减少. 在圆环的外表面, 对于不同的梯度参数 β_1 有相同的 σ_θ 和 σ_{VM} 值. 在一定的梯度条件下, 与材料屈服相关最大的环向应力 σ_θ 以及 σ_{VM} 的最大值可能出现在结构内部, 这说明在一定的条件下, 结构的屈服可能发生在内部, 而非内外表面处. 这也是功能梯度材料的应力场与均匀材料所不一样的地方. 值得指出, 这里我们简单地假定材料的强度是不变的, 而事实上对于功能梯度材料而言, 屈服强度往往也是变化的, 当它也依赖于半径时, 屈服位置的确定则需要进一步的比较和判定.

图 4 (a), (b), (c) 是梯度参数 β_2 对热应力场的影响. 与 β_1 的影响不同, σ_r 的最大值随 β_2 的增大而减小. 同样, 某些 β_2 使得 σ_θ 和 σ_{VM} 的最大值可能出现在结构内部 (比如 $\beta_2 = 0.5$). 图 5 (a), (b), (c) 中发现梯度参数 β_3 对应力场的影响相对较小. 从上面分析可以得出, 不同的梯度变化可以有效缓解圆环内的热应力分布, 因此在实际工程中, 可根据不同的使用条件来对梯度变化的形式和大小进行合理设计, 从而更安全地利用材料.

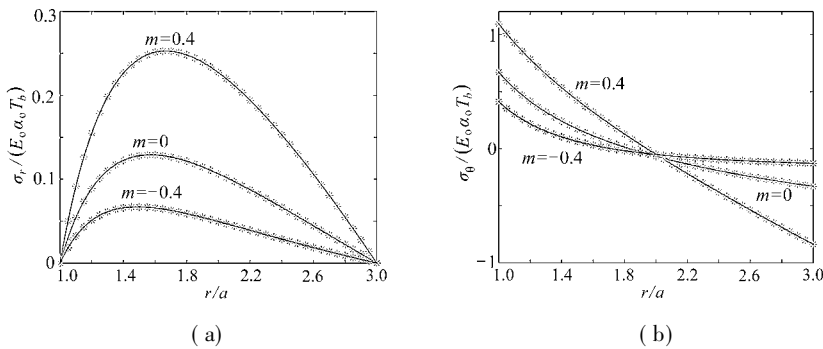


图 2 数值解与解析解的比较 (材料参数变化为式 (19), $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 实线: 解析解; 星号: 数值解)

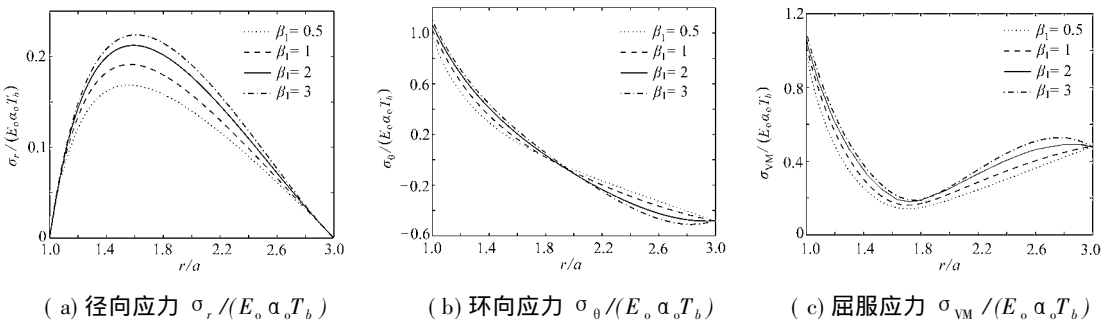
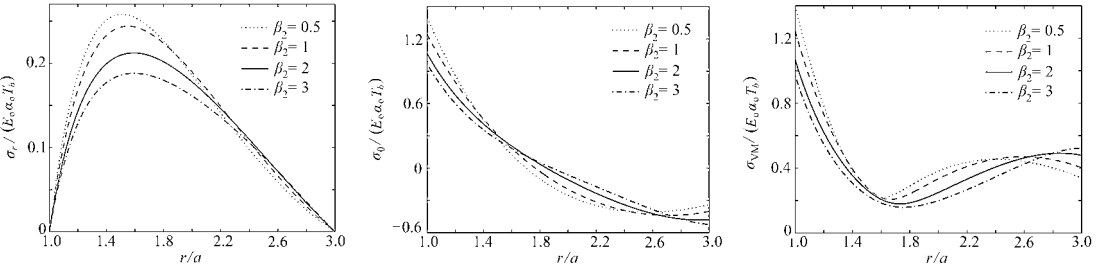


图 3 梯度参数 β_1 对应力场的影响 ($\beta_2 = \beta_3 = 1$)

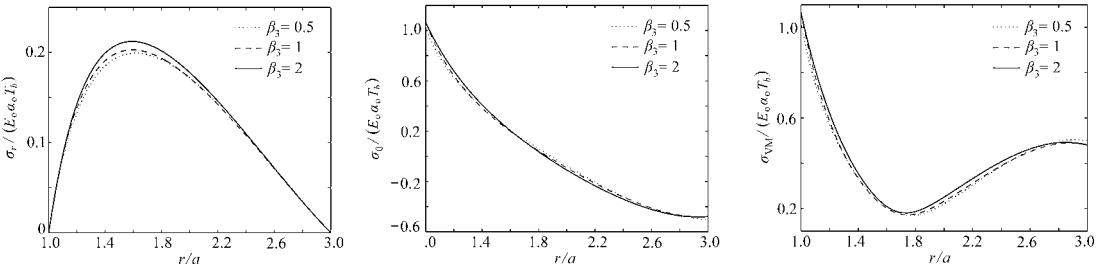
4 结 论

本文提出一种新的有效方法对材料参数沿径向任意变化的功能梯度圆环进行了热弹性分析,并通过算例分析了梯度参数对圆环的热应力变化的影响.计算结果表明特定的梯度可以有效缓解圆环内的热应力分布,在实际结构设计中,可根据不同的使用条件来对梯度变化的形式和参数大小进行设计,从而使得功能梯度圆环在热载荷下更安全.



(a) 径向应力 $\sigma_r / (E_0 \alpha_0 T_b)$ (b) 环向应力 $\sigma_\theta / (E_0 \alpha_0 T_b)$ (c) 屈服应力 $\sigma_{VM} / (E_0 \alpha_0 T_b)$

图 4 梯度参数 β_2 对应力场的影响 ($\beta_1 = \beta_3 = 1$)



(a) 径向应力 $\sigma_r / (E_0 \alpha_0 T_b)$ (b) 环向应力 $\sigma_\theta / (E_0 \alpha_0 T_b)$ (c) 屈服应力 $\sigma_{VM} / (E_0 \alpha_0 T_b)$

图 5 梯度参数 β_3 对应力场的影响 ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)

附 录

方程 (20) 中的参数表达式为

$$A_1 = \frac{T_a - T_b}{\left(\frac{b}{a}\right)^{-m_3} - 1}, \quad A_2 = \frac{T_a \left(\frac{b}{a}\right)^{-m_3} - T_b}{\left(\frac{b}{a}\right)^{-m_3} - 1},$$

$$\eta_{1,2} = -\frac{m_1}{2} \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{4} - m_1 \nu + 1}$$

$$D_1 = \frac{\alpha_1 (1 + \nu) (m_1 + m_2) A_2}{m_2 (m_2 + 1) + (m_1 + 1) (m_2 + 1) + m_1 \nu - 1}$$

$$D_2 = \frac{\alpha_1 (1 + \nu) (m_3 - m_1 - m_2) A_2}{(m_2 - m_3) (m_2 - m_3 + 1) + (m_1 + 1) (m_2 - m_3 + 1) + m_1 \nu - 1}$$

$$B_1 = \frac{d_4 d_5 - d_2 d_6}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \quad B_2 = \frac{d_1 d_6 - d_3 d_5}{d_1 d_4 - d_2 d_3},$$

$$d_1 = \eta_1 + \nu, \quad d_2 = \eta_2 + \nu, \quad d_3 = (\eta_1 + \nu) \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_1 - 1}, \quad d_4 = (\eta_2 + \nu) \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_2 - 1},$$

$$d_5 = -\frac{q_i(1-\nu^2)}{E_i} - [(m_2 + 1 + \nu)D_1 - \alpha_i(1 + \nu)A_2] - [(m_2 - m_3 + 1 + \nu)D_2 + \alpha_i(1 + \nu)A_1],$$

$$d_6 = -\frac{q_0(1-\nu^2)}{E_i} \left(\frac{b}{a}\right)^{-m_1} - [(m_2 + 1 + \nu)D_1 - \alpha_i(1 + \nu)A_2] \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2} - [(m_2 - m_3 + 1 + \nu)D_2 + \alpha_i(1 + \nu)A_1] \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2 - m_3}.$$

[参 考 文 献]

- [1] Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials[J]. Journal of Thermal Stresses, 1999, **22**(4): 477-512
- [2] Obata Y, Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material[J]. Journal of Thermal Stresses, 1994, **17**(3): 471-487.
- [3] Kim K S, Noda N. A Green's function approach to the deflection of an FGM plate under transient thermal loading[J]. Archive of Applied Mechanics, 2002, **72**(2/3): 127-137
- [4] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating[J]. Journal of Thermal Stresses, 1999, **22**(1): 35-55.
- [5] Ootao Y, Tanigawa Y. Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply[J]. Composite Structures, 2004, **63**(2): 139-146
- [6] Tanigawa Y, Oka N, Akai T, et al. One-dimensional transient thermal stress problem for nonhomogeneous hollow circular cylinder and its optimization of material composition for thermal stress relaxation[J]. JSME International Journal. Series A, Solid Mechanics and Material Engineering, 1997, **40**(2): 117-127
- [7] Tanaka K, Tanaka Y, Watanabe H, et al. An improved solution to the thermoelastic material design in functionally gradient materials scheme to reduce thermal stresses[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, **109**(3/4): 377-389
- [8] Tanaka K, Watanabe H, Sugano Y, et al. A multicriterial material tailoring of a hollow cylinder in functionally gradient materials scheme to global reduction of thermoelastic stresses[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **135**(3): 369-380
- [9] Ravichandran K S. Thermal residual stresses in functionally graded material system[J]. Materials Science and Engineering A, 1995, **201**(1/2): 269-276
- [10] Finot M, Suresh S, Bull M C, et al. Curvature changes during thermal cycling of a compositionally graded Ni-Al₂O₃ multi-layered material[J]. Materials Science and Engineering A, 1996, **205**(1/2): 59-71.
- [11] Chiu C C. Residual stresses in ceramic coatings as determined from the curvature of a coated strip[J]. Materials Science and Engineering A, 1992, **150**(1): 139-148
- [12] Zimmernan R W, Lutz M P. Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder[J]. Journal of Thermal Stresses, 1999, **22**(2): 177-188
- [13] Jabbari M, Sohrabpour S, Eshami M R. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2002, **79**(7): 493-497.

- [14] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami M R. General solution form mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads[J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 2003, 70(1): 111-118
- [15] Atkinson K E, Shampine L F. Algorithm 876 solving fredholm integral equations of the second kind in MATLAB[J]. ACM Transaction on Mathematical Software, 2008, 34(4), article 21.
- [16] ZHAO Jun, AI Xing LI Yan-zheng et al. Thermal shock resistance of functionally gradient solid cylinders[J]. Material Science and Engineering A, 2006, 418(1/2): 99-110
- [17] Shackelford James F, Alexander W. Material Science and Engineering Handbook [M]. Boca Raton CRC Press LLC, 2001.
- [18] You L H, Ou H, Li J. Stress analysis of functionally graded thick-walled cylindrical vessels[J]. AIAA Journal, 2007, 45(11): 2790-2798
- [19] Bhowmik S, Misra D, Nath Saha K. Approximate solution of limit angular speed for externally loaded rotating solid disk[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50(2): 163-174

Thermoelastic Analysis of a Functionally Graded Annulus With an Arbitrary Gradient

PENG Xu-long, LI Xian-fang

(IMST, School of Civil Engineering and Architecture, Central South University,
Changsha 410083, P. R. China)

Abstract A thermoelastic problem of a circular annulus made of functionally graded materials with an arbitrary gradient was investigated. Different from previous works, the analysis neither requires a special form of the gradient of material properties nor demands to partition the entire structure into a multilayered homogeneous structure. Instead, a new method for solving the thermoelastic problem of a functionally graded circular annulus by transforming it to a Fredholm integral equation was proposed. The distribution of thermal stresses and radial displacement could be obtained by the solution to the resulting equation. Finally, illustrative examples were given to show the effects of varying gradients on the thermal stresses and radial displacement for given temperature changes at the inner and outer surfaces. Obtained results indicate that the thermal stresses can be relaxed for specified gradients, which is of benefit to designing a non-homogeneous annulus to maintain structural integrity.

Key words functionally graded materials; thermoelastic analysis; arbitrary gradient; circular annulus