应用数学和力学, 第 30 卷 第 9 期
2009 年 9 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 9, Sep. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 09-1125-10

变差积分型约束总极值问题的不连续罚途径*

陈　柳[1], 姚奕荣[1], 郑　权[1, 2]

(1. 上海大学 理学院 数学系, 上海 200444;
2. 哥伦布州立大学 数学系, 乔治州 31907 美国)

(张石生推荐)

摘要: 结合积分途径运用不连续精确罚函数来求解全局约束最小化问题. 进一步, 提出了约束变差积分的一般形式并证明了其分析性质, 同时也给出并证明了其全局最优性条件, 并由此设计了一个新算法. 基于 Monte-Carlo 模拟技术, 运用交叉熵方法和重要样本实现了该算法. 数值实验也说明了这个新算法是有效的.

关 键 词: 全局优化; 约束问题; 变差积分; 交叉熵方法
中图分类号: O327　　文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.015

引　言

在最近发表的文章[1]中, 提出了一个一般形式的变差积分并证明了其分析性质. 基于这个变差积分, 我们利用不连续精确罚函数把约束问题转化为无约束问题来求解约束全局最小化问题. 我们定义了罚变差函数的一般形式 $V_{p,\phi}^{\alpha_n}(c_n)$. 这个函数对于全局优化具有很好的性质. 为了实现最优性条件和算法, 我们利用 Monte-Carlo 方法来估计积分 $V_{p,\phi}^{\alpha_n}(c_n)$. 具体地, 我们使用了重要样本[2]和交叉熵方法[3-5]来实现算法.

在这篇文章中, 我们首先回顾了丰满集合、丰满函数和 Q-测度空间的基本概念. 在第 2 节中, 我们引入了约束变差积分的概念, 并给出了其解析性质. 第 3 节中, 我们应用不连续精确罚方法来求解带约束的全局最小化问题. 在第 4 节中给出了这个算法的具体实现过程. 第 5 节中用数值试验来说明这个算法的有效性.

1　丰满集合、丰满函数和 Q-测度空间

在这一节中, 我们将总结关于丰满不连续函数的积分型全局最小化问题的几个概念和性质, 描述如下, 更详细可参见文献[6-9].

---

* 收稿日期: 2009-03-05; 修订日期: 2009-06-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771133); 上海市重点学科(运筹学与控制论)建设资助项目(S30104)
作者简介: 陈柳(1985—), 女, 硕士生(联系人. E-mail: chenliu07@shu.edu.cn).

1.1 丰满集合和丰满函数

令 X 是一个拓扑空间, 若 X 的一个子集 D 满足

$$\mathrm{cl}D = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}D, \tag{1}$$

则称 D 为丰满集. 其中 $\mathrm{cl}D$ 表示 D 的闭包, $\mathrm{int}D$ 表示 D 的内部.

若 $x \in D$ 且对于 x 的任意一个邻域 $N(x)$, 有 $N(x) \cap \mathrm{int}D \neq \varnothing$, 则称 x 是 D 的丰满点. 一个集合 D 是丰满的当且仅当 D 中每一点都是丰满点. $x \in D$ 是集合 D 的丰满点当且仅当存在一个序列 $\{x_\lambda\} \subset \mathrm{int}D$, 使得 $x_\lambda \to x$. 集合 D 是丰满的当且仅当 $\partial D = \partial \mathrm{int}D$, 其中 $\partial D = \mathrm{cl}D \setminus \mathrm{int}D$ 表示集合 D 的边界.

若集合

$$F_c = \{x : f(x) < c\} \tag{2}$$

对于每个实数 c 都是丰满的, 则称函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 是上丰满的.

两个上丰满函数的和或乘积可能不是上丰满的, 但是一个上丰满函数和一个上半连续函数的和是上丰满的. 一个函数 f 是上丰满的当且仅当 f 在每一点 x 都是上丰满的. 若 $x \in F_c$ 且 f 在 x 上是上丰满的, 则 x 是 F_c 的一个丰满点.

1.2 Q-测度空间和一些假设

为了利用积分途径研究全局最小化问题, 我们需要引入一类特殊的测度空间, 称之为 Q-测度空间.

令 X 是一个拓扑空间, Ω 是 X 的子集的一个 σ-域, μ 是 Ω 上的测度. (X, Ω, μ) 称之为 Q-测度空间, 如果满足下列条件:

1) X 中每个开集都是可测的;

2) X 中非空开集 G 的测度 $\mu(G)$ 为正: $\mu(G) > 0$;

3) X 中紧集 K 的测度 $\mu(K)$ 是有限的.

n-维 Lebesgue 测度空间 (R^n, Ω, μ) 是一个 Q-测度空间. 一旦测度空间给定, 我们就可用传统方式定义积分. 由于一个非空开集的内部是非空的, 包含非空丰满集的可测集的 Q-测度总是正的. 这是在最小化的积分型途径中, 所必需的性质. 因此, 通常需要作以下假设:

(A) f 是下半连续的(l. s. c.), 并且 X 是下紧的.

(M) (X, Ω, μ) 是一个 Q-测度空间.

(R) f 是一个可测的上丰满函数.

2 变差积分及其分析性质

设 f 是在一个紧的丰满集合 $S \subseteq X$ 上的可测丰满函数, 并且 $\min_{x\in S} f(x) = c^*$. 则我们有

引理 2.1[6-7] 对于 $c > c^*$

$$\mu(H_c \cap S) > 0. \tag{3}$$

定义 2.1 令 $\phi: R^1 \to R^1$ 是一个严格递增的连续函数, 且 $\phi(0) = 0$. 关于 f 的变差积分我们定义如下:

$$V_\phi(c) = \int_{H_c \cap S} \phi(c - f(x))\,\mathrm{d}\mu, \tag{4}$$

其中积分是关于在 $H_c \cap S$ 上的.

注意,当我们有时需要强调约束集 S 时,就用如下符号:

$$V_\phi(c;S)=V_\phi(c).$$

我们现在讨论关于积分 $V_\phi(c;S)$ 的性质,关于其性质的证明与文献[1]中的类似,在此省略.

性质 2.1　积分 $V_\phi(c;S)$ 有如下性质:

1) $V_\phi(c;S)>0,\quad \forall c>c^*$;

2) $V_\phi(c;S)=0,\quad \forall c<c^*$;

3) $V_\phi(c;S)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非递减的,并且在 (c^*,∞) 上是严格递增的;

4) $V_\phi(c;S)$ 是连续的.

定理 2.1　假设 ϕ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可微,且 $\phi'(0)=0$,则积分 $V_\phi(c)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是可微的,$V_\phi(c;S)$ 是凸的,且

$$V'_\phi(c;S)=V_{\phi'}(c;S). \tag{5}$$

例 2.1　令 $\phi(x)=x^m$, $m=1,2,\cdots$, 则我们可以得到更高阶的变差积分:

$$V_m(c)=\int_{H_c\cap S}(c-f(x))^m\mathrm{d}\mu,\qquad m=1,2,\cdots.$$

特别地当 $m=1,2$ 时,就得到均值和方差型变差积分:

$$m(c)=\int_{H_c\cap S}(c-f(x))\mathrm{d}\mu,\quad v(c)=\int_{H_c\cap S}(c-f(x))^2\mathrm{d}\mu.$$

当 $\phi(x)=x$, $\phi'(x)=1$, $\phi(0)\neq 0$ 时,我们可以得到如下性质:

性质 2.2　对于均值变差积分

$$m(c)=\int_{H_c\cap S}(c-f(x))\mathrm{d}\mu, \tag{6}$$

我们有

$$m'(c)=\mu(H_c\cap S).$$

这也意味着

$$V_m^{(k)}(\alpha)=k!\,\mu(H_c\cap D).$$

那么我们可以得到如下性质:

性质 2.3　在定理 2.1 的假设下,对于 $k\geqslant 1$, 我们有

$$V'_k(c)=kV_{k-1}(c),\qquad k=1,2,\cdots. \tag{7}$$

若 $k\geqslant 1$ 是一个整数,则

$$V_k^{(k)}(c)=k!\,\mu(H_c\cap D). \tag{8}$$

特别地,

$$v'(c)=2m(c).$$

如我们所知,$m(c)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,因此 $v'(c)=2m(c)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是连续的,所以我们得到

推论 2.1　变差积分 $v'(c)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是连续的.

性质 2.4　变差积分 $v(c)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凸的,并且在 $(c^*,+\infty)$ 上是严格凸的.

3　不连续罚途径

设 S 是度量空间 X 的一个闭的丰满子集,f 是 X 上的实值函数.用罚方法来考虑如下约束

问题:

$$c^{*}=\inf_{x\in S}f(x).\tag{9}$$

在假设条件(A)下,约束问题(9)的全局最优解的集合非空．这个约束问题的最优解可用相应的罚无约束问题的一系列解来逼近.

关于约束集 S 上的不连续罚函数定义及其性质如下[10-11]:

定义 3.1 在度量空间 (X,d) 上的函数 $p(x)$ 称为关于约束集 S 上的罚函数,如果

1) p 是下半连续的;

2) $p(x)=0$,若 $x\in S$;

3) $\inf_{x\notin S_\beta}p(x)>0$,其中 $S_\beta=\{u: d(u,v)\leqslant\beta,\ \forall v\in S\}$ 和 $\beta>0$.

利用罚函数 p,我们研究对应于问题(9)的一个罚无约束最小化问题:

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\},\tag{10}$$

其中 $\alpha(>0)$ 是罚参数．在假设条件(A)下,罚水平集

$$H_c^{\alpha}=\{x: f(x)+\alpha p(x)\leqslant c\}$$

是集合 H_c 的一个非空闭子集．这样,H_c^{α} 在 X 中是紧的,也就说明了式(10)最优解的存在性．而且

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\}\leqslant\min_{x\in S}\{f(x)+\alpha p(x)\}=\min_{x\in S}f(x)=c^{*}.$$

我们将构造两个序列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{c_n\}$,使得当 $n\to\infty$ 时,$\alpha_n\uparrow\infty$ 和 $c_n\downarrow c(\geqslant c^{*})$,并有如下性质:

$$\min_{x\in H_n}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}\to c^{*},\qquad \text{当 } n\to\infty,\tag{11}$$

其中,为了简化符号,我们定义

$$H_n=\{x: f(x)+\alpha_n p(x)\leqslant c_n\}.\tag{12}$$

性质 3.1 如果 $c_n\downarrow c\geqslant c^{*}$ 那么

$$\lim_{n\to\infty}H_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n=H_c\cap S.\tag{13}$$

下面的性质说明了一个约束问题的全局最小值是相应罚问题全局最小值的极限.

性质 3.2 假设 $\{\alpha_n\}$ 是一个正的递增序列,当 $n\to\infty$ 时,趋于无穷,并且 $\{c_n\}$ 是一个递减序列,当 $n\to\infty$ 时,趋于 $c(c\geqslant c^{*})$. 在假设条件(A)下,我们有

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}=\min_{x\in H_n}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}\to c^{*}=\min_{x\in S}f(x).\tag{14}$$

定义 3.2 对于约束集 S,如果存在一个实数 $\alpha_0>0$ 使得对于每个 $\alpha\geqslant\alpha_0$,有

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\}=\min_{x\in S}f(x)=c^{*},\tag{15}$$

并且

$$\{x: f(x)+\alpha p(x)=c^{*}\}=\{x\in S: f(x)=c^{*}\}=H^{*},\tag{16}$$

则称罚函数 p 关于问题(9)是精确的.

对于如下约束问题:

$$\min_{x\in S}f(x),\tag{17}$$

其中 S 是一个丰满集,f 在集合 S 上是上丰满的．它的不连续罚函数构造如下:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\in S,\\ \delta+d(x), & x\notin S,\end{cases}\tag{18}$$

其中 δ 是一个正数, $d(x)$ 是一个罚形式的函数.

定理 3.1　不连续罚函数(18) 是精确的.

为了应用积分总极值算法, 我们仍然要求 $f+\alpha p$ 满足丰满性.

性质 3.3　若 d 在 S 上是上丰满的, 那么 $p(x)$ 在 S 上也是上丰满的. 若 f 是上半连续的, d 在 S 上是上丰满的, 或者 f 在 S 上是上丰满的, d 是上半连续的, 那么对于每个 $\alpha>0, f+\alpha p$ 在 S 上是上丰满的.

我们现在考虑罚最优性条件.

设 S 是度量空间 X 的一个子集, f 是 X 上的一个实值函数, p 是对于约束集 S 的罚函数.

定义 3.3　设 $c_n > c^* = \inf_{x\in S} f(x)$, 在罚水平集

$$H_n=\left\{x: f(x)+\alpha_n p(x)\leqslant c_n\right\}$$

上, 定义关于 $f+\alpha_n p$ 的罚均值变差函数如下:

$$V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)=\int_{H_n}\phi(c_n-f(x)-\alpha_n p(x))\,\mathrm{d}\mu, \tag{19}$$

其中 $\phi: R^1\to R^1$ 是严格递增的连续函数, 并且 $\phi(0)=0$.

在假设(A)、(R) 和(M) 下, 它们能被很好地定义.

现在我们考虑当 $n\to\infty$ 时罚变差积分的收敛性质. 通常情况下, 我们假设

$$c_n\downarrow c\geqslant c^*=\min_{x\in S} f(x). \tag{20}$$

定理 3.2　假设 S 是丰满的, 并且 $f+\alpha p\,(\alpha>0)$ 在 S 上是丰满的. 在假设(A) 和(M) 下, 对于 $c\geqslant c^*$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)=V_\phi(c,S). \tag{21}$$

证明　我们证明当 $c\geqslant c^*$ 时, 式(21) 成立. 由于

$$V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)=\int_{H_n}\phi(c_n-f(x)-\alpha_n p(x))\,\mathrm{d}\mu=$$

$$\int_{H_n\setminus H_c\cap S}\phi(c_n-f(x)-\alpha_n p(x))\,\mathrm{d}\mu+$$

$$\int_{H_c\cap S}\phi(c_n-f(x)-\alpha_n p(x))\,\mathrm{d}\mu=I_1+I_2.$$

对于 $x\in H_n$, $c_n-f(x)-\alpha_n p(x)\geqslant 0$, 并且 $x\in H_n\setminus H_c\cap S$, $c_n-f(x)-\alpha_n p(x)\leqslant c_n-f(x)\leqslant c_n-c$, 所以得

$$0\leqslant I_1\leqslant\int_{H_n\setminus H_c\cap S}\phi(c_n-c)\,\mathrm{d}\mu\to 0.$$

因此, $\lim_{n\to\infty} I_1=0$. 又由于在 $H_c\cap S$ 上, $p(x)=0$, 可得

$$I_2=\int_{H_c\cap S}\phi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu\to\int_{H_c\cap S}\phi(c-f(x))\,\mathrm{d}\mu=V_\phi(c,S).$$

定理得证.

定理 3.3　在定理 3.2 的假设下, c^* $(c_n\downarrow c=c^*)$ 是 f 在 S 上的全局最优值当且仅当满足如下条件:

$$\lim_{n\to\infty} V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)=0. \tag{22}$$

证明　由 $V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)$ 的连续性, 并且当 $c<c^*$ 时, $V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n)=0$, 必要性得证.

充分性: 假定 c^* 不是f 的全局最优值, 但 $\hat{c}$ 是全局最优值. 令 $c^* - \hat{c} = 2\eta > 0$, 由定理 3.2 可知

$$V_\phi(c^*, S) = \lim_{n\to\infty} V_{\phi,p}^{\alpha_n}(c_n) = 0.$$

但是

$$\begin{aligned} V_\phi(c^*, S) &= \int_{H_{c^*}\cap S} \phi(c^* - f(x))\,\mathrm{d}\mu = \\ &\int_{(H_{c^*}\setminus H_{\hat{c}+\eta})\cap S} \phi(c^* - f(x))\,\mathrm{d}\mu + \int_{H_{\hat{c}+\eta}\cap S} \phi(c^* - f(x))\,\mathrm{d}\mu \geqslant \\ &\int_{H_{\hat{c}+\eta}\cap S} \phi(c^* - \hat{c} - \eta)\,\mathrm{d}\mu = \phi(\eta)\cdot\mu(H_{\hat{c}+\eta}\cap S) > 0, \end{aligned}$$

产生矛盾, 定理得证.

基于此, 对于约束全局最优化问题, 我们提出了一个称为"水平值估计算法"(LVEM) 算法.

算法 1 (水平值估计(LVEM) 算法)

步骤 1 取 $\epsilon > 0$ 足够小的值, 且$\{\alpha_n\}(\uparrow\infty)$. 给定一点 $x_0 \in X$, 计算 $c_0 = f(x_0) + \alpha_0 p(x_0)$, 置 $k := 0$.

步骤 2 按如下公式计算 $V_{p,\phi}^{\alpha_k}(c_k)$:

$$V_{p,\phi}^{\alpha_k}(c_k) = \int_{H_k} \phi(c_k - f(x) - \alpha_k p(x))\,\mathrm{d}\mu, \tag{23}$$

其中

$$H_k = \{x \in X: f(x) + \alpha_k p(x) \leqslant c_k\}. \tag{24}$$

注 由于 $c_k > c^*$, 我们总有 $V_{p,\phi}^{\alpha_k}(c_k) > 0$.

令

$$\lambda_k = \frac{V_{p,\phi}^{\alpha_k}(c_k)}{V_{p,\phi}^{\alpha_k'}(c_k)}. \tag{25}$$

步骤 3 如果 $\lambda_k < \epsilon$, 则转步骤 4; 否则令

$$c_{k+1} = c_k - \lambda_k \tag{26}$$

并且置 $k := k + 1$, 转步骤 2.

步骤 4 令 $c^* := c_k$ 和$H^* := H_k$, 其中 c^* 是近似的全局最优值, H^* 是近似全局最优解集.

作为一个特殊的例子, 考虑 $\phi = x$ 的情况, 此时我们记 $V_{p,\phi}^{\alpha_k}(c_k) = m_p^{\alpha_k}(c_k)$, 其中 $m_p^{\alpha_k}(c_k) = \int_{H_k}(c_k - f(x) - \alpha_k p(x))\,\mathrm{d}\mu$, 其算法如下:

算法 2

步骤 1 取 $\epsilon > 0$ 足够小的值, 且$\{\alpha_n\}(\uparrow\infty)$. 给定一点 $x_0 \in X$, 计算 $c_0 = f(x_0) + \alpha_0 p(x_0)$, 置 $k := 0$.

步骤 2 计算 $m_p^{\alpha_k}(c_k)$. 令

$$\lambda_k = \frac{m_p^{\alpha_k}(c_k)}{\mu(H_k)}. \tag{27}$$

步骤 3 若 $\lambda_k < \epsilon$, 则转步骤 4; 否则令

$$c_{k+1} = c_k - \lambda_k, \tag{28}$$

并且置 $k := k+1$, 转步骤 2.

步骤 4 令 $c^* := c_k$ 和 $H^* := H_k$, 其中 c^* 是近似的全局最优值, H^* 是近似全局最优解集.

定理 3.4(收敛性定理) 按照上述算法 2, 序列的极限 $\lim_{k\to\infty} c_k$ 是全局最小值 c^*, 且 $\lim_{k\to\infty} H_{c_k} = H^*$ 是全局最小点集.

证明 由序列 $\{c_k\}$ 的存在性推出

$$\lim_{k\to\infty}(c_k - c_{k+1}) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k = \hat{c} - \hat{c} = 0.$$

进一步, 我们有

$$\lambda_k = \frac{m_p^{\alpha_k}(c_k)}{\mu(H_k)} \geqslant \frac{m_p^{\alpha_k}(c_k)}{\mu(H_1)} \geqslant 0.$$

这就隐含着极限存在

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_p^{\alpha_k}(c_k)}{\mu(H_1)} = 0, \tag{29}$$

或者

$$\lim_{k\to\infty} m_p^{\alpha_k}(c_k) = m(\hat{c}) = 0. \tag{30}$$

因此 $\hat{c} = c^*$ 是全局最小值, 并且 $H^* = H_{c^*}$ 是全局最小值点集.

4 算法的实现

为了实现算法, 我们需要计算积分 $m_p^{\alpha_k}(c_k)$. 我们通过使用重要样本技术[2], 以及运用交叉熵方法的主要思想来更新概率密度函数的参数, 以此来计算该积分. 这与文献[4-5]中的方法有很大不同. 所以在这一小节中, 我们将回顾一下重要样本和交叉熵方法.

为了利用数值方法来计算积分, 我们运用概率密度函数(pdf)为 $g(x) = g(x; v)$ 的重要样本, 其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, v 是参数(或者参数向量). 例如, 用密度函数 $g(x)$ 在 A 上产生随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_N$, 我们利用

$$\hat{I}_{(g)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{G(X_i)}{g(X_i)} \tag{31}$$

作为如下积分的无偏估计

$$I = \int_A G(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{32}$$

交叉熵方法是由 Rubinstein[5] 研究得出, 并被用来解决连续多极值和各类离散组合优化问题. 这个方法就是利用重要样本技术来产生一个迭代随机过程. 这种随机机制是依据 Kullback-Leibler 交叉熵方法从一个迭代变换到另一个迭代. 交叉熵方法在数值试验中非常有效, 但是该算法的收敛性却还未得到解决.

交叉熵方法的基本思想由如下两个迭代阶段组成[3]:

1) 根据一个特定的随机机制来产生一个随机数据样本;

2) 在样本数据的基础上, 更新随机机制的参数, 通常是指概率密度函数的参数. 由此在下一步迭代中, 产生更好的样本.

在这里我们取 n-维正态密度函数, 记为 $g(x) = N(x; \mu, \sigma^2)$, 定义如下:

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^n \sigma_i}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right), \tag{33}$$

其中均值向量 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 和方差向量 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 中的分量都是独立的.

对于第3节中算法2的实现描述如下:

步骤1 令 $\epsilon>0$ 足够小, α_0 足够大, 而且 $\eta>1$, 给定一点 $x_0\in R^n$ 并计算 $c_0=f(x_0)+\alpha_0 p(x_0)$; 选取 $\hat{\mu}_0=(\hat{\mu}_{01},\cdots,\hat{\mu}_{0n})$ 以及 $\hat{\sigma}_0^2=(\hat{\sigma}_{01}^2,\cdots,\hat{\sigma}_{0n}^2)$, 给定 N 和 $0<\rho<0.1$; 令 $N^{\text{elite}}=[\rho N]$, $k:=0$;

步骤2 从 $g(x)=N(\hat{\mu}_k,\hat{\sigma}_k^2)$ 中产生样本 $X^k=\left\{X_1^k,X_2^k,\cdots,X_N^k\right\}$. 利用式(31), 计算积分的估计值, 并令

$$\hat{\lambda}_k=\frac{\hat{m}_p^{\alpha_k}(c_k)}{\hat{\mu}(H_{c_k})};\tag{34}$$

步骤3 如果 $\hat{\lambda}_k<\epsilon$, 则转步骤7; 否则转下一步;

步骤4 计算 $f(X_i^k)+\alpha_k p(X_i^k)$, $i=1,2,\cdots,N$ 的值, 选取 N^{elite} 个最好的样本(相应地就是 N^{elite} 个最小的 $f(X_i^k)+\alpha_k p(X_i^k)$ 值所对应的样本), 构造精英样本集合, 记为

$$\hat{H}_{c_k}=\left\{X_1^k,X_2^k,\cdots,X_{N^{\text{elite}}}^k\right\};\tag{35}$$

步骤5 利用如下公式, 更新参数向量 $(\hat{\mu}_k,\hat{\sigma}_k^2)$

$$\hat{\mu}_{k+1,j}:=\frac{1}{N^{\text{elite}}}\sum_{i=1}^{N^{\text{elite}}}X_{ij}^k,\qquad j=1,2,\cdots,n\tag{36}$$

和

$$\hat{\sigma}_{k+1,j}^2:=\frac{1}{N^{\text{elite}}}\sum_{i=1}^{N^{\text{elite}}}(X_{ij}^k-\hat{\mu}_{k+1,j})^2,\qquad j=1,2,\cdots,n.\tag{37}$$

再按以下公式光滑化:

$$\hat{\mu}_{k+1}=\alpha\hat{\mu}_{k+1}+(1-\alpha)\hat{\mu}_k,\quad \hat{\sigma}_{k+1}^2=\beta_k\hat{\sigma}_{k+1}^2+(1-\beta_k)\hat{\sigma}_k^2,\tag{38}$$

其中

$$\beta_k=\beta-\beta\left(1-\frac{1}{k}\right)^q,\qquad k=1,2,\cdots,\tag{39}$$

$0.5<\alpha<0.9$, $0.8<\beta<0.99$, $5\leqslant q\leqslant 10$;

步骤6 令

$$c_{k+1}=c_k-\hat{\lambda}_k,\quad \alpha_{k+1}=\eta\cdot\alpha_k.\tag{40}$$

$k:=k+1$, 转步骤2;

步骤7 令 $\hat{H}^*=\hat{H}_{c_k}=\left\{X_1^k,X_2^k,\cdots,X_{N^{\text{elite}}}^k\right\}$ 就是近似全局最优解集, $\hat{c}^*=c_{k+1}$ 就是近似全局最优值.

5 数值结果

我们在全局最小化问题中选择一些测试问题, 关于本算法的程序是由 Matlab7.4 编译, 在 Windows 环境下运行的. 这些数值例子在个人计算机上运行了数秒或数分钟后便得出数值结果. 在此我们选择了一些例子来说明算法的有效性.

问题1

$$\min f(x)=-x_1-x_2+x_3.\tag{41}$$

约束

$$h(x)=\sin(4\pi x_1)-2\sin(2\pi x_2)^2-2\sin(2\pi x_3)^2\geqslant 0,\qquad -5\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 5.\tag{42}$$

解

$$x^* = (4.7500000000, 4.9999999999, -5.0000000000),$$

$$f^* = -14.7499999999.$$

数据统计

1) 迭代次数: 8 104;

2) 修正方差的现行值: 1×10^{-10};

3) 计算时间: 42.408 414 s.

问题 2

$$\min f(x) = -(x_1-1)^2 - x_2^2 - (x_3-1)^2. \tag{43}$$

约束

$$x_1+x_2-x_3 \leqslant 1,\ -x_1+x_2-x_3 \leqslant -1,$$

$$12x_1+5x_2+12x_3 \leqslant 34.8,\ 12x_1+12x_2+7x_3 \leqslant 17.1,$$

$$-6x_1+x_2+x_3 \leqslant -4.1,\ 0.0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 5.0.$$

解

$$x^* = (1.0000002371,\ 0.0000000038,\ 0.0000003597),$$

$$f^* = -0.9999971490.$$

数据统计

1) 迭代次数: 566;

2) 修正方差的现行值: 1×10^{-10};

3) 计算时间: 9.350 534 s.

问题 3

$$\min f(x) = -2x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2. \tag{44}$$

约束

$$x_1+x_2 \leqslant 1,\ 1.5x_1+x_2 \leqslant 1.4,$$

$$0.0 \leqslant x_1 \leqslant 10.0,\ -10.0 \leqslant x_2 \leqslant 0.0.$$

解

$$x^* = (7.5999857205,\ -9.9999926416),\ f^* = -19.5172594413.$$

数据统计

1) 迭代次数: 473;

2) 修正方差的现行值: 0;

3) 计算时间: 3.243 225 s.

[参 考 文 献]

[1] YAO Yi-rong, CHEN Liu, ZHENG Quan. Optimality condition and algorithm with deviation integral for global optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, **357**(2): 371-384.

[2] Ross S M. Simulation[M]. 3rd Ed. New York: Academic Press, 2002.

[3] De Boer P-T, Kroese D P, Mannor S, et al. A tutorial on the cross-entropy method[J]. Annals of Operations Research, 2005, **134**(1): 19-67.

[4] Kroese D P, Porotsky S, Rubinstein R Y. The cross-entropy method for continuous multi-extremal

optimization[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2006, **8**(3): 383-407.

[5] Rubinstein R Y. The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 1999, **1**(2): 127-190.

[6] Zheng Q. Robust analysis and global minimization of a class of discontinuous functions (Ⅰ)[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Ser, 1990, **6**(3): 205-223.

[7] Zheng Q. Robust analysis and global minimization of a class of discontinuous functions (Ⅱ)[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Ser, 1990, **6**(4): 317-337.

[8] Zheng Q. Robust analysis and global optimization[J]. Annals of Operations Research, 1990, **24**(1): 273-286.

[9] SHI Shu-zhong, ZHENG Quan, ZHUANG De-ming. Discontinuous robust mapping are approximatable [J]. Trans Amer Math Soc, 1995, **347**(12): 4943-4957.

[10] ZHENG Quan, ZHANG Lian-sheng. Global minimization of constrained problems with discontinuous penalty functions[J]. Computers &Mathematics With Applications, 1999, **37**(4/5): 41-58.

[11] Zheng Q, Zhuang D-M. Integral global optimization of constrained problems in functional spaces with discontinuous penalty functions[A]. In: Floudas C A, Parclalos P M, Eds. Recent Advances in Global Optimization [C]. Princeton: Princeton University Press, 1992, 298-320.

Discontinuous Penalty Approach With Deviation Integral for Global Constrained Minimization

CHEN Liu[1], YAO Yi-rong[1], ZHENG Quan[1, 2]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Columbus State University, USA)

Abstract: The discontinuous exact penalty functions is employed to solve constrained minimization problems with the help of integral approach. A general form of constrained deviation integral was provided and its analytical properties was examined. Optimality conditions of the penalized minimization problem was proved as well. In order to implement the algorithm, cross-entropy method and important sampling were used on the basis of Monte-Carlo technique. Numerical tests show that the new algorithm is effective.

Key words: global optimization; constrained problems; deviation integral; cross-entropy method