文章编号: 1000-0887(2009)09-1100-07

双调和方程 Schwarz 区域分解算法的 Fourier 分析*

尚月强[1,2], 何银年[1]

(1. 西安交通大学 理学院,西安 710049;
2. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院,贵阳 550001)

(周哲玮推荐)

摘要: Schwarz 方法是一类重要的区域分解算法. 以 Fourier 变换作为分析工具,推导了经典 Schwarz 交替迭代法和加性 Schwarz 迭代法用于求解双调和方程的误差传播阵及其谱半径的准确表达式,不但从新的角度更简洁地证明了 Schwarz 交替迭代法和加性 Schwarz 迭代法的收敛性,还刻画了其收敛速度,以及收敛速度随子区域的重叠程度变化而变化的情况. 所得结果不依赖于任何未知常数,不受具体离散方法的影响,同时表明经典 Schwarz 交替迭代法具有比加性 Schwarz 方法快1倍的收敛速度.

关　键　词: 区域分解算法; Schwarz 方法; Fourier 变换; 双调和方程
中图分类号: O241.82　　文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.012

引　言

Schwarz 交替迭代法是一种经典的区域分解算法,最先由德国数学家 Schwarz 提出. 他首次应用交替迭代方法求解不规则区域上 Laplace 方程 Dirichlet 问题,并应用极大值原理证明了其收敛性[1]. 一个世纪后,Lions 于1987年基于偏微分方程的变分原理,使用投影技巧,巧妙地证明了 Schwarz 交替迭代法的收敛性[2],使之成为一种行之有效的计算方法,引起了研究者的广泛关注. 并行机的发展,更是促进了 Schwarz 方法的研究,各种可并行实现的 Schwarz 方法,如加性(additive) Schwarz 方法、受限加性(restricted additive) Schwarz 方法、调和扩充的加性 Schwarz 方法(additive Schwarz with harmonic extension method)等相继被提出并成功应用到各种线性与非线性问题. 对于连续问题(偏微分方程),基于极大值原理和投影方法,Schwarz 方法应用到诸多问题的收脸性得到了证明;并针对矩形区域的 Laplace 方程,得到了其收敛速度的相关信息[3]. 对于离散问题(离散所得的线性或非线性方程组),其分析大多集中在估计所得预处理后的离散方程组的条件数,证明其有与网格参数 h 无关的上界,但该上界依赖于一未知

* 收稿日期: 2008-12-04; 修订日期: 2009-07-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671154);国家基础研究基金资助项目(2005CB321703);贵州省科学技术基金资助项目(2008(2123))
作者简介: 尚月强(1976—),男,贵州人,讲师,博士生(E-mail: yueqiangshang@gmail.com);
何银年(1953—),男,陕西人,教授,博士(联系人. E-mail: heyn@mail.xjtu.edu.cn).

常数．除了一些特殊情形(如将求解区域分解成两子区域情形的 Laplace 方程的线性有限元离散[4])外, 该未知常数无法知晓．因此, 从该上界我们得不到其收敛速度的相关信息．

本文将经典 Schwarz 交替迭代法及其并行化的加性 Schwarz 方法用于求解双调和方程, 并以 Fourier 变换作为分析工具, 推导其误差传播矩阵及其谱半径的准确解析表达式, 不但从新的角度更简洁地证明了 Schwarz 交替迭代法与加性 Schwarz 方法的收敛性, 还刻画了其收敛速度, 以及收敛速度随子区域的重叠程度变化而变化的情况, 从理论上证明了 Schwarz 交替迭代法有比加性 Schwarz 方法快 1 倍的收敛速度.

对于双调和方程, 已有一些 Schwarz 区域分解算法[5-7]．但它们都是针对离散问题, 即针对某一具体的离散方法, 将各种 Schwarz 方法作为预处理算子去求解离散所得的线性或非线性方程组, 证明其收敛性及最优收敛率(收敛率不依赖于网格参数与子区域数, 但依赖于一未知常数)．而本文则是针对连续问题, 证明其收敛性并刻画其收敛速度; 所得结果不依赖于任何未知常数, 不受具体离散方法的影响, 因而具有普遍的意义．从计算的角度看, 离散的问题更重要．但由于 Schwarz 方法本身是针对连续问题(偏微分方程)发展而来的, 我们认为在连续问题的层次分析 Schwarz 方法显得更为自然; 而且, 不受具体离散方法的影响, 有助于我们从本质上去认识 Schwarz 方法, 为 Schwarz 方法应用于其它问题提供理论指导并发展新的 Schwarz 类型的区域分解算法(如优化的 Schwarz 方法(optimized Schwarz method)[8]).

1 双调和方程的 Schwarz 区域分解算法

考虑下列双调和方程:

$$\Delta^2 u = f, \qquad \Omega = R^2, \tag{1}$$

其中, f 为定义在 $H_0^2(\Omega)$ 上的有界线性泛函．我们假设 u 及其一阶外法向导数在无穷远处为 0．方程(1)是具有广泛应用的一类方程, 它描述了平板在不同荷载下的横向变形及 Stokes 流体的流动等.

注 对于齐次 Dirichlet 边值问题, 当求解区域 Ω 是具有光滑边界的有界区域时, 可将解零延拓到整个平面; 另一方面, 由 Sobolev 空间中函数的延拓性质(见文献[9]的定理 4.8 和定理 4.9):

设 $m \geqslant 0$, Ω 是 $R^n(n \in \mathbf{Z}^+, 1 \leqslant n < \infty)$ 中具有光滑边界的有界区域, 则

(a) 函数 v 属于 $H_0^m(\Omega)$ 的充要条件是其零延拓函数

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ 0, & \text{在 } R^n \setminus \Omega \text{ 中} \end{cases}$$

属于 $H_0^m(R^n)$;

(b) $v \in H^m(\Omega)$ 的充要条件是 v 可视为 $H^m(R^n)$ 函数在 Ω 上的限制.

我们可以看出, 对于一个定义在有界区域 Ω 的问题, 其解至少从理论上可以通过求解一个定义在整个平面 R^2 上的相同问题得到．因此, 不失一般性, 我们考虑求解区域为整个平面的情形．相同的无界区域 R^2 在文献[8, 10]中也被用到.

将区域 Ω 分解成两个相互重叠的子区域:

$$\Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbf{R}, \quad \Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbf{R}, \qquad L > 0,$$

并设 $\boldsymbol{n}_j$ 为子区域 Ω_j 的单位外法向向量$(j = 1, 2)$, 我们得到求解方程(1)的 Schwarz 交替迭代法与加性 Schwarz 方法:

算法 I　Schwarz 交替迭代法

给定迭代初值 $u_2^0 \in H_0^2(\Omega)$, u_1^{n+1} 与 u_2^{n+1} 通过交替迭代求解下列方程得到:

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 中}, \\ u_1^{n+1}(L, y) = u_2^n(L, y), & y \in \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_1^{n+1}(L, y)}{\partial \boldsymbol{n}_1} = -\dfrac{\partial u_2^n(L, y)}{\partial \boldsymbol{n}_2}, & y \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2a}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 中}, \\ u_2^{n+1}(0, y) = u_1^{n+1}(0, y), & y \in \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_2^{n+1}(0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_2} = -\dfrac{\partial u_1^{n+1}(0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_1}, & y \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{2b}$$

算法 II　加性 Schwarz 迭代法

给定迭代初值 $u_1^0, u_2^0 \in H_0^2(\Omega)$, u_1^{n+1} 与 u_2^{n+1} 通过迭代求解下列方程得到:

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 中}, \\ u_1^{n+1}(L, y) = u_2^n(L, y), & y \in \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_1^{n+1}(L, y)}{\partial \boldsymbol{n}_1} = -\dfrac{\partial u_2^n(L, y)}{\partial \boldsymbol{n}_2}, & y \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{3a}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 中}, \\ u_2^{n+1}(0, y) = u_1^n(0, y), & y \in \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_2^{n+1}(0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_2} = -\dfrac{\partial u_1^n(0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_1}, & y \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3b}$$

上述算法中我们也要求每次的迭代解及其一阶外法向导数在无穷远处为 0.

2　双调和方程 Schwarz 区域分解算法的 Fourier 分析

为分析上述算法, 我们首先引进 Fourier 变换: 一个定义在急降函数空间 $S(\mathbf{R})$[11] 中的函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(k) = F[f](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx, \qquad k \in \mathbf{R},$$

$\hat{f}(k)$ 的 Fourier 逆变换定义为

$$f(x) = F^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)\,dk,$$

其中 i 为虚数单位, 满足 $i^2 = -1$. 函数 $f(x) \in S(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换具有性质:

i) $F[\partial^\alpha f(x)/\partial x^\alpha] = (ik)^\alpha F[f]$, $\alpha \in \mathbf{Z}^+$;

ii) $F[(ix)^\alpha f] = (-1)^\alpha \partial^\alpha F[f]/\partial k^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{Z}^+$;

iii) Fourier 变换及 Fourier 逆变换确定一个 $S(\mathbf{R}) \to S(\mathbf{R})$ 的连续线性映射.

定理 1　对任意给定的迭代初值 $u_2^0 \in H_0^2(\Omega)$, 算法 I 所得的近似解序列收敛于原方程 (1) 的解.

证明　由方程及算法的线性, 我们可直接考察误差方程, 即取方程的右端项 $f = 0$, 然后证明 $u_1^{n+1} \to 0$, $u_2^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ 即可. 对算法 I 关于变量 y 施行 Fourier 变换并注意到在人工边界 $x = 0, L$ 上有 $\partial/\partial \boldsymbol{n}_1 = -\partial/\partial \boldsymbol{n}_2 = \partial/\partial x$, 我们得到

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^4\right)\hat{u}_1^{n+1} = 0, \qquad x < L,\ k \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$\hat{u}_1^{n+1}(L,k)=\hat{u}_2^n(L,k),\qquad k\in\mathbf{R},\tag{5}$$

$$\frac{\partial\hat{u}_1^{n+1}(L,k)}{\partial x}=\frac{\partial\hat{u}_2^n(L,k)}{\partial x},\qquad k\in\mathbf{R},\tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-2k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^4\right)\hat{u}_2^{n+1}=0,\qquad x>0,\ k\in\mathbf{R},\tag{7}$$

$$\hat{u}_2^{n+1}(0,k)=\hat{u}_1^{n+1}(0,k),\qquad k\in\mathbf{R},\tag{8}$$

$$\frac{\partial\hat{u}_2^{n+1}(0,k)}{\partial x}=\frac{\partial\hat{u}_1^{n+1}(0,k)}{\partial x},\qquad k\in\mathbf{R}.\tag{9}$$

对于给定的 k, 方程(4) 是关于变量 x 的一个常微分方程． 由迭代解在无穷远处的条件, 我们得到当 $k\neq 0$ 时, 方程(4) 具有下列形式的解:

$$\hat{u}_1^{n+1}(x,k)=A_1(k)\mathrm{e}^{|k|x}+B_1(k)x\mathrm{e}^{|k|x},$$

进一步将人工边界条件(5)、(6) 代入上式求出 $A_1(k)$ 和 $B_1(k)$, 可得

$$\hat{u}_1^{n+1}(x,k)=\left((1+|k|(L-x))\hat{u}_2^n(L,k)-(L-x)\frac{\partial\hat{u}_2^n(L,k)}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{|k|(x-L)}.\tag{10}$$

同理可得

$$\hat{u}_2^{n+1}(x,k)=\left((1+|k|x)\hat{u}_1^{n+1}(0,k)+x\frac{\partial\hat{u}_1^{n+1}(0,k)}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{-|k|x}.\tag{11}$$

令

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1+|k|L & -L\\ |k|^2L & 1-|k|L\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-|k|L},\\ \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1+|k|L & L\\ -|k|^2L & 1-|k|L\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-|k|L},\end{cases}\tag{12}$$

则由式(10)、(11) 可得

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\boldsymbol{MN}\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n-1}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n-1}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\cdots=(\boldsymbol{MN})^{2n-1}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{0}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{0}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix},\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix}=\cdots=(\boldsymbol{NM})^{2n}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{0}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{0}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix}.\tag{14}$$

由

$$\boldsymbol{MN}=\begin{bmatrix}(1+|k|L)^2+|k|^2L^2 & 2|k|L^2\\ 2|k|^3L^2 & (1-|k|L)^2+|k|^2L^2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-2|k|L},\tag{15}$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{bmatrix}(1+|k|L)^2+|k|^2L^2 & -2|k|L^2\\ -2|k|^3L^2 & (1-|k|L)^2+|k|^2L^2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-2|k|L},\tag{16}$$

我们可得 $\boldsymbol{MN}$ 与 $\boldsymbol{NM}$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2}(\boldsymbol{MN}) = \lambda_{1,2}(\boldsymbol{NM}) = \left(1+2|k|^2L^2 \pm 2|k|L\sqrt{1+|k|^2L^2}\right)e^{-2|k|L}. \tag{17}$$

从而可得其谱半径

$$\rho(\boldsymbol{MN}) = \rho(\boldsymbol{NM}) = \left(1+2|k|^2L^2+2|k|L\sqrt{1+|k|^2L^2}\right)e^{-2|k|L}. \tag{18}$$

下面我们证明当 $k \neq 0$ 时，$\rho(\boldsymbol{MN}) = \rho(\boldsymbol{NM}) < 1$．为此，令 $t = |k|L > 0$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{MN})(t)}{\partial t} &= \frac{2\sqrt{1+t^2}(-2t^2+2t-1)+4t(-t^2+t-1)+2}{\sqrt{1+t^2}e^{2t}} = \\ &\frac{-2\sqrt{1+t^2}(t^2+(t-1)^2)-4t((t-1)^2+t)+2}{\sqrt{1+t^2}e^{2t}} < \\ &\frac{-2(t^2+(t-1)^2)-4t((t-1)^2+t)+2}{\sqrt{1+t^2}e^{2t}} = \\ &\frac{-4t^3}{\sqrt{1+t^2}e^{2t}} < 0.\end{aligned} \tag{19}$$

由此可得 $\rho(\boldsymbol{MN})(t)$ 关于 t 是严格单调递减的，从而 $\forall t > 0$，$\rho(\boldsymbol{MN})(t) < \rho(\boldsymbol{MN})(0) = 1$．将 $t = |k|L$ 代回即得 $\forall k \neq 0$，$\rho(\boldsymbol{MN}) < 1$．

又由 $\rho(\boldsymbol{M}) = \rho(\boldsymbol{N}) = e^{-|k|L} < 1$ ($k \neq 0$ 时)，我们可得

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix} \to 0,\quad \begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix} \to 0 \qquad (n \to \infty, k \neq 0). \tag{20}$$

由齐次 Dirichlet 边界条件的齐次双调和方程只有零解，我们得到

$$\hat{u}_1^{2n+1}(x,k) \to 0,\quad \hat{u}_2^{2n}(x,k) \to 0 \qquad (n \to \infty, k \neq 0).$$

对于 $k = 0$ 的情形，由方程(4) 和(7) 可得 $\hat{u}_1^{n+1}(x,0)$ 和 $\hat{u}_2^{n+1}(x,0)$ 都是关于变量 x 的系数待定的多项式函数．进一步由其在无穷远处的条件，我们立刻得到

$$\hat{u}_1^{n+1}(x,0) = 0,\quad \hat{u}_2^{n+1}(x,0) = 0.$$

因此，我们在 Fourier 空间中证明了算法Ⅰ 的收敛性，由 Fourier 变换的性质，我们得到了物理空间中算法Ⅰ 的收敛性．　□

定理 2　对任意给定的迭代初值 $u_1^0, u_2^0 \in H_0^2(\Omega)$，算法 II所得的近似解序列收敛于原方程(1) 的解．

证明　仿定理 1 的证明，我们可得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix} &= \boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n-1}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix} = \boldsymbol{MN}\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n-2}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n-2}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix} = \\ &\cdots = (\boldsymbol{MN})^n\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{0}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{0}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix} = \boldsymbol{N}\begin{bmatrix}\hat{u}_1^{2n-1}(0,k)\\ \dfrac{\hat{u}_1^{2n-1}(0,k)}{\partial x}\end{bmatrix} = \boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^{2n-2}(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^{2n-2}(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix} =$$

$$\cdots = (\boldsymbol{NM})^{n}\begin{bmatrix}\hat{u}_2^0(L,k)\\ \dfrac{\hat{u}_2^0(L,k)}{\partial x}\end{bmatrix}, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ 如式(12)所定义. 仿定理1的推导过程, 我们很容易证明算法II的解序列收敛于原方程的解. □

定理3 若迭代初值满足 $u_1^0 = u_2^0 \in H_0^2(\Omega)$, 则算法I 的收敛速度是算法II的2倍.

证明 比较式(13)、(14)与式(21)、(22), 我们立即获得该定理的证明. □

由定理1~ 定理3的证明我们可以看出: 通过Fourier 变换工具, 我们不但非常容易地证明了算法I 与算法II的收敛性, 还给出了其收敛速度的相关详细信息, 它除了跟频数 k 及子区域的重叠程度 L 有关外, 不依赖于其他任何未知常数, 参见式(18). 式(18)表明: 对于给定的频数 k, Schwarz 交替迭代法与加性Schwarz 迭代法的收敛速度都随子区域重叠尺度的增加而变快, 而当两子区域互不重叠时(即当 $L = 0$ 时), 对于所有的频数 $k \neq 0$, Schwarz 交替迭代法与加性Schwarz 迭代法都发散; 对于高频分量, Schwarz 交替迭代法与加性Schwarz 迭代法收敛速度都较快, 但对于低频分量, 收敛速度却很慢(当 $|k| \to 0$ 时, $\rho(\boldsymbol{MN}) \to 1$), 这从另一角度解释了多水平Schwarz 方法的必要性, 以及在使用Krylov 子空间迭代法加速时, 为使算法是可扩展的, 引入粗网格空间的必要性.

3 结 束 语

本文以双调和方程为模型, 针对两个子区域的情形, 通过Fourier 变换, 不但非常容易地证明了Schwarz 交替迭代法与加性Schwarz 迭代法的收敛性, 还推导出其误差传播阵及其谱半径的准确表达式, 给出了算法收敛速度的相关详细信息. 所得的结果不依赖于任何未知常数, 也不受具体离散方法的影响. 同时还从理论上证明了Schwarz 交替迭代法具有比加性Schwarz 方法快1倍的收敛速度.

[参 考 文 献]

[1] Schwarz H A. Gesammelte Mathematische Abhandlungen [M]. Vol **2**. Berlin: Springer, 1890, 133-143 (First published in Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Volume 15, 1870).

[2] Lions P L. On the Schwarz alternating method I [A]. In: Golub G H, Meurant G A, Periaux J, et al, Eds. Proceedings of the 1st International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations [C]. Philadelphia: SIAM, 1988, 1-42.

[3] 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[4] Bjørstad P E. Multiplicative and additive Schwarz methods: convergence in the two subdomain case [A]. In: Chan T F, Glowinski R, Periaux J, et al, Eds. Proceedings of the Second International Symposium on Domain Decomposition Methods [C]. Philadelphia: SIAM, 1989, 147-159.

[5] ZHANG Xue-jun. Two-level Schwarz method for biharmonic problems discretized by C^1 conforming elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, **33**(2): 555-570.

[6] XU Xue-jun, Lui S H, Rahman T. A two-level additive Schwarz method for the Morley nonconforming element approximation of a nonlinear biharmonic equation[J]. IMA J Numer Anal, 2004, **24**(1): 97-122.

[7] SHI Zhong-ci, XU Xue-jun. The mortar element method for a nonlinear biharmonic equation[J]. J

Comput Math, 2005, **23**(5): 537-560.

[8] Gander M J. Optimized Schwarz methods[J]. SIAM J Numer Anal, 2006, **44**(2): 699-731.

[9] 陈恕行. 现代偏微分方程导论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[10] Dolean V, Nataf F, Rapin G. Deriving a new domain decomposition method for the Stokes equations using the Smith factorization[J]. Math Comp, 2009, **78**(266): 789-814.

[11] 李开泰, 马逸尘, 王立周. 广义函数和 Sobolev 空间[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2008.

Fourier Analysis on Schwarz Domain Decomposition Methods for the Biharmonic Equation

SHANG Yue-qiang[1,2], HE Yin-nian[1]

(1. Faculty of Science, Xi' an Jiaotong University, Xi' an 710049, P. R. China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, P. R. China)

Abstract: Schwarz methods are an important type of domain decomposition methods. Using the Fourier transform tool, the error propagation matrices and their spectral radii of the classical Schwarz alternating method and the additive Schwarz method for the biharmonic equation were deduced. It not only concisely proves the convergence of the Schwarz methods from a new point of view, but also provides detailed information about the convergence speeds and their dependence on the overlapping size of subdomains. The obtained results are independent of any unknown constant and discretization method, show that the Schwarz alternating method converges twice as quickly as the additive Schwarz method.

Key words: domain decomposition algorithm; Schwarz method; Fourier transform; biharmonic equation