

纳米力学共振腔的双模压缩态研究^{*}

范瑞琴¹, 羊红光², 白志明²

(1. 石家庄铁道学院 数理系, 石家庄 050043;
2. 河北科技大学 理学院, 石家庄 050018)

(郭兴明推荐)

摘要: 引入了一个方便的控制和测量纳米力学共振腔(NAMRs)的模型. 在旋波近似下引入产生、湮灭算符, 得到 de-SQUID 的自由 Hamilton 量和 de-SQUID 与两个纳米力学共振腔之间的相互作用 Hamilton 量. 在 Heisenberg 表象下, 把 de-SQUID 的模看作一个经典场, 采用共同坐标算符和动量算符发现两个纳米力学共振腔的双模会产生压缩态.

关键词: 力学共振腔; 双模; 压缩态

中图分类号: O413.1 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.010

引 言

近些年来, 人们对量子相干性研究越来越感兴趣. 力学共振腔在高精度探测方面有着重要的应用^[1-4]. 厉江帆等人运用 Lewis-Riesenfeld 不变量理论, 通过适当地选取 Hermite 不变量, 得到了含驱动项和双模耦合项的含时耦合谐振子系统 Schrödinger 方程的封闭解, 给出了系统的演化算符及其产生双模光场的压缩态的条件, 并得出系统压缩态的量子涨落与驱动项无关但与系统所处的初态有关的结论^[5]. 曾爱华等讨论了纠缠和压缩 2 种非经典效应的关系, 发现可以通过操纵纠缠度来达到增加或减弱压缩的目的, 并指出了单模压缩和双模压缩表现出完全不同的特性^[6]. 一个纳米力学共振腔和一个超导磁量子比特的强耦合腔体 QED 或一个带磁尖的纳米力学共振腔与一个自旋电子的耦合已经被发现^[7-8]. 现在 GHz 级纳米力学共振腔也已被制备出^[9-11]. 本文研究纳米力学共振腔的双模压缩态.

1 物理装置

研究装置包括一个矩形 de-SQUID 和两个 SQUIDs 环. 这两个 SQUIDs 环自由地悬浮在 de-SQUID 的左右两侧, 可当作力学共振腔. 在图 1 中, 左(右)虚线分别表示左(右)纳米力学共振腔的平衡位置, “×”代表 Josephson 结, $X_L(X_R)$ 是左(右)纳米力学共振腔中心偏离平衡位置的位移.

* 收稿日期: 2008-10-10; 修订日期: 2009-07-01

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A200600029); 河北省科技攻关资助项目(06547003D-1)

作者简介: 范瑞琴(1974-), 女, 石家庄人, 讲师, 硕士(联系人. Tel: + 86-311-87935502; E-mail: fanruiqin@126.com).

假设两端固支梁在 de-SQUID 环面上做标准挠曲模振动. 记 $I_L(I_R)$ 为左(右) Josephson 结点的电流, $\varphi_L(\varphi_R)$ 为左(右) Josephson 结点的相位降, 假设两个 Josephson 结是相同的, 并有相同的临界电流 I_c . 因此, de-SQUID 中的偏置电流 I_b 为

$$I_b = I_c(\sin \varphi_L + \sin \varphi_R). \quad (1)$$

假定 de-SQUID 环中的磁感应可以忽略不计, 则 de-SQUID 环中电流产生的磁能也可以忽略不计. 因此, 两个结的电压降为 0. 因而有 $\varphi_R - \varphi_L = \varphi_t$, 其中记 φ_t 是与穿过 de-SQUID 环的总磁流 Φ_t 相关的相位.

$$\varphi_t = \frac{2\pi \Phi_t}{\Phi_0}, \quad (2)$$

其中 $\Phi_0 = h/(2e)$ 是量子磁通. 引入两个新变换

$$\varphi = \frac{\varphi_R + \varphi_L}{2}, \quad (3a)$$

$$\varphi_- = \frac{\varphi_R - \varphi_L}{2}. \quad (3b)$$

考虑到 $\varphi_- = \varphi_t/2$, 方程(1)中的偏置电流可写为

$$I_b = 2I_c \sin \varphi \cos \frac{\varphi_t}{2}. \quad (4)$$

假设 $X_L(X_R)$ 是左(右)梁在标准挠曲模下的振幅, $B_L(B_R)$ 是垂直于 de-SQUID 在左(右)梁附近的磁场. 当 $X_L = X_R = 0$ 时, 垂直穿过 de-SQUID 环的外加磁场流为 Φ_b . 设在左(右)梁的振荡域内 $B_L(B_R)$ 为常数. 这时, 穿过 de-SQUID 环的总磁流为

$$\Phi_t = \Phi_b + \Phi_X, \quad (5)$$

其中 Φ_X 是穿过两个纳米力学共振腔偏离平衡位置时的那部分磁流:

$$\Phi_X = B_L X_L l + B_R X_R l, \quad (6)$$

其中 l 是左、右梁偏离的有效长度, 且有 $l = S_L/X_R$, S_L 是纳米力学共振腔从平衡位置开始弯曲过程中所扫过的面积. 即在图 1 中的曲线与虚线之间的区域. 方程(6)显示出两个纳米力学共振腔进入 de-SQUID 的动态变化引起了穿过 de-SQUID 的磁流变化. 两个纳米力学共振腔对 SQUID 的动态影响也表现为 de-SQUID 势能在数量上的变化, 因此这也是两个纳米力学共振腔位置的一个函数.

de-SQUID 的势能是

$$U(\varphi, \Phi_X) = -2E_J \cos \left[\frac{\pi \Phi_b}{\Phi_0} + \frac{\pi \Phi_X}{\Phi_0} \right] \cos \varphi - \frac{I_b}{I_c} E_J \varphi, \quad (7)$$

其中 $E_J = hI_c/(2e)$ 是 Josephson 结的能量, 且有 $\Phi_X/\Phi_0 \ll 1$. de-SQUID 载有的电荷能量为 $E_c \equiv (2e)^2/(2C_J)$, 假设它比改性的 de-SQUID 上 Josephson 结能量 $(\cos q_0) E_J$ 小很多, 其中 C_J 是左、右 Josephson 结的容量, 这里有 $q_0 = \arcsin(I_b/I_c)$.

de-SQUID 和 φ 的变化可以近似的用一个谐振子描述. 因此, de-SQUID 的自由 Hamilton 量可以写为谐振子 Hamilton 量:

$$\frac{H_s}{h} = E_c \varphi^2 + E'_J \varphi, \quad (8)$$

其中已删去常数项, 并有 $E'_J = E_J \cos q_0$. 引入产生及湮灭算符 a, a^\dagger :

$$a = \left[\frac{E_J}{E_c} \right]^{1/4} \varphi + i \left[\frac{E_c}{E_J} \right]^{1/4} \varphi, \quad (9a)$$

$$a^+ = \left[\frac{E_J}{E_c} \right]^{1/4} \varphi_- i \left[\frac{E_c}{E_J} \right]^{1/4} \mathcal{S}. \quad (9b)$$

这时, de-SQUID 的自由 Hamilton 量可以写为

$$H_s = h \Omega a^+ a, \quad (10)$$

其中角频率 $\Omega = \sqrt{E_c E_J}$. 当 de-SQUID 的能量不是很大 ($\langle a^+ a \rangle < N_{\max}$), 且有一个适当的偏磁流穿过 de-SQUID 环时, φ 的相位变化可很好的描述为一个谐振子. 对做标准挠曲模振动的两个纳米力学共振腔 ($i = L, R$) 引入产生、湮灭算符:

$$b_i = \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2h}} X_i + i \sqrt{\frac{1}{2hm_i \omega_i}} P_i, \quad (11a)$$

$$b_i^+ = \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2h}} X_i - i \sqrt{\frac{1}{2hm_i \omega_i}} P_i, \quad (11b)$$

其中 X_i 和 P_i 是纳米力学共振腔的坐标算符和动量算符. m_i 和 ω_i 是第 i 个纳米力学共振腔的有效质量和角频率. 略去常数项后, 两个纳米力学共振腔的自由 Hamilton 量可描写为

$$H_{\text{NAMR}} = h \omega_L b_L^+ b_L + h \omega_R b_R^+ b_R. \quad (12)$$

两个纳米力学共振腔与 de-SQUID 的相互作用 Hamilton 量为

$$V = - [g_L (b_L + b_L^+) + g_R (b_R + b_R^+)]^2 [c_1 (a + a^+) + c_2 (a + a^+)^2], \quad (13)$$

其中

$$g_L = \frac{\pi B_L l}{\Phi_0} \sqrt{\frac{h}{2m_L \omega_L}}, \quad (14a)$$

$$g_R = \frac{\pi B_R l}{\Phi_0} \sqrt{\frac{h}{2m_R \omega_R}}, \quad (14b)$$

$$c_1 = \frac{\Omega}{2} (\tan q_0) \left[\frac{E_J \cos q_0}{E_c} \right]^{1/4}, \quad (14c)$$

$$c_2 = \frac{\Omega}{8}. \quad (14d)$$

由于相互作用 Hamilton 量中包含了非线性项, 通常很难计算耦合系统的行为. 考虑到 de-SQUID 的频率 Ω 可由偏置电流 I_b 决定, 在旋波近似下就能化简了方程 (13) 中的相互作用 Hamilton 量为简单形式. 在相互作用绘景下, 重写自由 Hamilton 量为 $H_0 = h \Omega a^+ a + h \omega_L b_L b_L^+ + h \omega_R b_R b_R^+$; 相互作用 Hamilton 量为 $V_F = c_2 g_L g_R b_R^+ b_L a^+ a + \text{H. C.}$. 这就得到了一个控制和测量纳米力学共振腔的灵活模型.

2 双模压缩态的产生

假设两个纳米力学共振腔开始时处于真空态或非常低的能量态, 即

$$c_2 [g_L^2 \langle b_L^+ b_L \rangle + g_R^2 \langle b_R^+ b_R \rangle] \ll \Omega, \quad (15)$$

这时可以重写方程 (10) 中的 de-SQUID 的自由 Hamilton 量为

$$H_0 = \mathcal{Q} a^+ a + \omega_L b_L^+ b_L + \omega_R b_R^+ b_R, \quad (16)$$

其中

$$\mathcal{Q} = \Omega - \delta_{LR}, \quad \delta_{LR} = c_2 (g_L^2 \langle b_L^+ b_L \rangle + g_R^2 \langle b_R^+ b_R \rangle). \quad (17)$$

适当选择偏置电流 I_b 使满足条件: $\mathcal{Q} - \omega_L - \omega_R = 0$. 因此在相互作用绘景下, 采用旋波近似方法简化两个纳米力学共振腔与 de-SQUID 的相互作用 Hamilton 量为

$$V' = \eta (a^+ b_L b_R + a b_L^+ b_R^+), \quad (18)$$

其中 $\eta = -c_1 g_{LGR}$. 由于满足条件: $\Omega' - \omega_L - \omega_R = 0$, 整个系统的 Hamilton 量在 Heisenberg 绘景下与相互作用绘景下是一致的.

现在在相干态 $|\alpha\rangle (|\alpha| \gg 1)$ 下考虑 de-SQUID 的模. 把 de-SQUID 的模看作一个经典场, 用复数 $|\alpha| \exp(-i\phi)$ 取代方程(18) Hamilton 量 V' 中的量子算符 a . 在 Heisenberg 绘景下, 系统耦合部分 Hamilton 量描述为

$$V_I = e^{i\phi} |\alpha| \eta b_L b_R + e^{-i\phi} |\alpha| \eta b_L^\dagger b_R^\dagger. \quad (19)$$

在 $\omega_L = \omega_R$ 条件下, 相应地 b_L, b_R^\dagger 的 Heisenberg 运动方程为

$$\frac{\partial b_L(t)}{\partial t} = -i\omega_L b_L(t) - i\eta |\alpha| e^{-i\phi} b_R^\dagger(t), \quad (20a)$$

$$\frac{\partial b_R^\dagger(t)}{\partial t} = i\omega_R b_R^\dagger(t) + i\eta |\alpha| e^{i\phi} b_L(t), \quad (20b)$$

解得

$$b_L(t) = \left\{ \cosh Y - i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} \right\} b_L(0) - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh Y b_R^\dagger(0), \quad (21a)$$

$$b_R^\dagger(t) = \left\{ \cosh Y + i \frac{\omega_R \sinh Y}{\lambda} \right\} b_R^\dagger(0) + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh Y b_L(0), \quad (21b)$$

其中 $Y = |\alpha| \eta$. 同样有 b_R, b_L^\dagger 的 Heisenberg 运动方程为

$$\frac{\partial b_R(t)}{\partial t} = -i\omega_R b_R(t) - i\eta |\alpha| e^{-i\phi} b_L^\dagger(t), \quad (22a)$$

$$\frac{\partial b_L^\dagger(t)}{\partial t} = i\omega_L b_L^\dagger(t) + i\eta |\alpha| e^{i\phi} b_R(t), \quad (22b)$$

解得

$$b_R(t) = \left\{ \cosh Y - i \frac{\omega_R \sinh Y}{\lambda} \right\} b_R(0) - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh Y b_L^\dagger(0), \quad (23a)$$

$$b_L^\dagger(t) = \left\{ \cosh Y + i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} \right\} b_L^\dagger(0) + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh Y b_R(0). \quad (23b)$$

采用共同坐标算符和动量算符来研究两个纳米力学共振腔的双模压缩态的产生, 即

$$X_T(t) = X_L(t) + X_R(t), \quad (24a)$$

$$P_T(t) = P_L(t) + P_R(t), \quad (24b)$$

其中 $X_i(t)$ 和 $P_i(t)$ ($i = L, R$) 由方程(11)中的 b_i, b_i^\dagger 以及式(21)、式(23)中的 $b_i(t), b_i^\dagger(t)$ 来得出.

通过计算得到

$$\begin{aligned} X_T(t) = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m_L \omega_L}} \left[\left[\cosh Y - i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh Y \right] b_L(0) + \right. \\ & \left[\cosh Y + i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh Y \right] b_L^\dagger(0) + \\ & \left[\cosh Y - i \frac{\omega_R \sinh Y}{\lambda} + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh Y \right] b_R(0) + \\ & \left. \left[\cosh Y + i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh Y \right] b_R^\dagger(0) \right], \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T(t) = & \sqrt{\frac{2\hbar m_L \omega_L}{2i}} \left[\left[\cosh Y - i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh Y \right] b_L(0) - \right. \\ & \left. \left[\cosh Y + i \frac{\omega_L \sinh Y}{\lambda} + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh Y \right] b_L^\dagger(0) + \right. \end{aligned}$$

$$\left[\cosh \gamma - i \frac{\omega_R \sinh \gamma}{\lambda} - i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{i\phi} \sinh \gamma \right] b_R(0) - \left[\cosh \gamma + i \frac{\omega_L \sinh \gamma}{\lambda} + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} e^{-i\phi} \sinh \gamma \right] b_R^\dagger(0) \right]. \quad (26)$$

设左(右)纳米力学共振腔处于真空态,那么 $X_T(t)$, $P_T(t)$ 在共同坐标算符和动量算符下的平均值和它们平方的平均值分别为

$$\langle 0, 0 | X_T(t) | 0, 0 \rangle = 0, \quad (27a)$$

$$\langle 0, 0 | P_T(t) | 0, 0 \rangle = 0, \quad (27b)$$

$$\langle 0, 0 | X_T^2(t) | 0, 0 \rangle = \frac{h}{m_L \omega_L} \left[\cosh^2 \gamma + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} \sinh \gamma \cosh \gamma (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \right], \quad (27c)$$

$$\langle 0, 0 | P_T^2(t) | 0, 0 \rangle = h m_L \omega_L \left[\cosh^2 \gamma + i \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} \sinh \gamma \cosh \gamma (e^{-i\phi} - e^{i\phi}) + \frac{\omega_L \eta |\alpha|}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \frac{\omega_L^2 + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma \right]. \quad (27d)$$

所以共同坐标算符和动量算符的测不准关系为

$$\begin{aligned} \Delta[X_T(t)] \Delta[P_T(t)] &= h \left[\left[\cosh^2 \gamma + \frac{\omega_L + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{i\eta |\alpha|}{\lambda} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sinh \gamma \cosh \gamma - \frac{\omega_L \eta |\alpha|}{\lambda^2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \sinh^2 \gamma \right]^2 \right]^{1/2} = \\ &h \left[\left[\cosh^2 \gamma + \frac{\omega_L^2 + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{2\eta |\alpha|}{\lambda} \sinh \gamma \right]^2 \left[\sin \phi \cosh \gamma + \frac{\omega_L}{\lambda} \cos \phi \sinh \gamma \right]^2 \right]^{1/2} \geq \\ &h \left[\left[\cosh^2 \gamma + \frac{\omega_L^2 + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{2\eta |\alpha|}{\lambda} \sinh \gamma \right]^2 \left[\cosh^2 \gamma + \frac{\omega_L^2}{\lambda^2} \sinh^2 \gamma \right]^2 \right]^{1/2} = \\ &h (\cosh^2 \gamma - \sinh^2 \gamma) = h. \end{aligned} \quad (28)$$

当 $\phi = \arctan(\lambda^2/\omega_L)$ 时,有

$$\frac{\eta |\alpha|}{\lambda} \sin \phi = 1, \quad \frac{\omega_L^2 + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} - 2 \cos \phi \frac{\omega_L \eta |\alpha|}{\lambda} = 1. \quad (29)$$

因此,共同坐标算符的量子涨落值为

$$\begin{aligned} \Delta X_T(t) &= \sqrt{\frac{h}{m_L \omega_L}} \left[\cosh^2 \gamma - 2 \sin \phi \frac{\eta |\alpha|}{\lambda} \sinh \gamma \cosh \gamma - \right. \\ &\quad \left. 2 \frac{\omega_L + \eta |\alpha|}{\lambda} \cos \phi \sinh^2 \gamma + \frac{\omega_L^2 + \eta^2 |\alpha|^2}{\lambda^2} \right]^{1/2} = \\ &\sqrt{\frac{h}{m_L \omega_L}} (\cosh^2 \gamma - 2 \sinh \gamma \cosh \gamma + \sinh^2 \gamma)^{1/2} = \sqrt{\frac{h}{m_L \omega_L}} e^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (30)$$

因为 $\gamma = -c_1 g_L g_R |\alpha| t$, 所以 $\gamma < 0$. 因此两个纳米力学共振腔的双模会产生压缩态.

3 结 论

通过引入产生湮灭算符,在旋波近似下得到 de-SQUID 的自由 Hamilton 量和它与两个纳米力学之间的耦合 Hamilton 量. 因为 $\Omega - \omega_L - \omega_R = 0$, 所以在 Heisenberg 绘景下和相互作用绘

景下,系统的Hamilton量是一致的.在Heisenberg绘景下,计算了两个纳米力学共振腔随时间的演化情况.采用共同坐标算符和动量算符研究发现:当 $\phi = \arctan(\lambda^2/\omega_L)$ 时,两个纳米力学共振腔的双模会产生压缩态.

[参 考 文 献]

- [1] Cleland A N. Foundations of Nanomechanics: From Solid-State Theory to Device Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [2] Blick R H, Erbe A, Pescini L, et al. Nanostructured silicon for studying fundamental aspects of nanomechanics[J]. J Phys: Cond Mat, 2002, **14**(34): R905-R945.
- [3] Blencowe M. Quantum electromechanical systems[J]. Phys Rep, 2004, **395**(3): 159-222.
- [4] Schwab K C, Roukes M L. Putting mechanics into quantum mechanics[J]. Physics Today, 2005, **58**(7): 36-42.
- [5] 厉江帆, 黄春佳, 姜宗福, 等. 含时耦合谐振子系统的时间演化与双模压缩态[J]. 物理学报, 2005, **54**(2): 522-529.
- [6] 曾爱华, 赵云辉, 匡振华. 纠缠相干态的压缩特性[J]. 量子光学学报, 2004, **10**(2): 67-72.
- [7] Xue F, Wang Y D, Sun C P, et al. Controllable coupling between flux qubit and nanomechanical resonator by magnetic field[J]. New J Phys, 2007, **9**(2): 35-42.
- [8] XUE Fei, ZHONG Ling, LI Yong, et al. Analogue of cavity quantum electrodynamics for coupling between spin and a nanomechanical resonator: dynamic squeezing and coherent manipulations[J]. Phys Rev B, 2007, **75**(3): 33 407-33 410.
- [9] Huang X M H, Zorman C A, Mehregany M, et al. Nanoelectromechanical systems nanodevice motion at microwave frequencies[J]. Nature, 2003, **421**(6922): 496-498.
- [10] Gaidarzhy A, Zolfagharkhani G, Badzey R L, et al. Evidence for quantized displacement in macroscopic nanomechanical oscillators[J]. Phys Rev Lett, 2005, **94**(3): 30 402-30 405.
- [11] Schwab K C, Blencowe M P, Roukes M L, et al. Comment on "evidence for quantized displacement in macroscopic nanomechanical oscillators" [J]. Phys Rev Lett, 2005, **95**(24): 248 901-248 902.

Two-Mode Squeezed State of Nanomechanical Resonators

FAN Rui-qin¹, YANG Hong-guang², BAI Zhi-ming²

(1. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Railway Institute,
Shijiazhuang 050043, P. R. China;

2. College of Science, Hebei University of Science and Technology,
Shijiazhuang 050018, P. R. China)

Abstract: A flexible model for the control and measurement of NAMRs was introduced. The free Hamiltonian of the de-SQUID (direct current superconducting quantum interference device) and the interaction Hamiltonian between these two NAMRs and the de-SQUID by introducing the annihilation and creation operators under the rotating wave approximation were obtained. The mode of the de-SQUID as a classical field can be treated. In the Heisenberg picture, the generation of two-mode squeezed states of two nanomechanical resonators is shown by their collective coordinate and momentum operators.

Key words: mechanical resonator; two-mode; squeezed state