

# 多项式基函数法<sup>\*</sup>

吴望一, 林光

(北京大学 工学院 湍流与复杂系统国家重点实验室, 力学与空天技术系, 北京 100871)

(本刊原编委吴望一来稿)

**摘要:** 提出一种新型的数值计算方法——基函数法. 此方法直接在非结构网格上离散微分算子. 采用基函数展开逼近真实函数, 构造出了导数的中心格式和迎风格式. 取二阶多项式为基函数, 并采用通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术以消除激波附近的非物理波动, 构造出数值求解无粘可压缩流动二阶多项式的基函数格式. 通过多个二维无粘超音速和跨音速可压缩流动典型算例的数值计算表明, 该方法是一种高精度的、对激波具有高分辨率的无波动新型数值计算方法, 与网格自适应技术相结合可得到十分满意的结果.

**关键词:** 多项式基函数法; 新型数值计算方法; 非结构网格

**中图分类号:** V211.3      **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1009-0887.2009.09.003

## 引 言

现有的数值方法可以分为两类: 一类是在结构网格上离散微分算子, 例如差分方法, 谱方法; 另一类是在非结构网格上离散积分算子, 例如有限元法和有限体积法. 它们各有特色, 也各有其优缺点. 有限差分法是计算流体力学领域中一种主要的数值计算方法, 它简单高效、适应面广、发展完善、有众多优点. 但是不可否认, 它也有一些不尽人意之处. 处理复杂边界需要采用坐标变换或分区处理的办法, 比较麻烦. 其次, 也不易采用网格自适应技术有效地提高计算结果的精度. 边界上的格式精度往往比内点的格式精度要低. 有限元法是计算力学中另一类重要的数值计算方法. 由于有限元法采用非结构网格, 因此比较容易处理复杂边界, 也易于采用网格自适应技术提高计算精度. 但是有限元法的计算时间及所需的内存较有限差分法高出很多.

为了丰富和发展现有的计算方法, 本文提出一种新型的数值计算方法——基函数法. 此方法直接在非结构网格中离散微分算子, 生成网格后, 在网格单元上采用基函数展开逼近真实函数, 总体基函数逼近可以看作是由单元基函数组合而成的. 基函数可以取任意正交完备函数族, 常用的基函数是多项式和三角函数, 也可以取 Chebyshev 多项式, Legendre 多项式等作为基函数, 从而构造出不同的基函数法. 本文取二阶多项式为基函数. 为了求出节点上的物理量, 基函数法采用微分形式的控制方程. 我们成功地在非结构网格节点上构造出导数的中心

\* 收稿日期: 2009-04-14; 修订日期: 2009-07-30

基金项目: 国家自然科学基金(重点)基金资助项目(19889210)

作者简介: 吴望一(1933—), 男, 浙江镇海人, 教授(联系人, E-mail: wuw@pku.edu.cn).

格式和迎风格式. 为了验证基函数法, 本文运用此法数值求解无粘可压缩流动, 并采用通量分裂法及激波前后中心格式和迎风格式相结合的技术, 以消除激波附近的非物理波动, 为此, 本文根据物理考虑首次提出新的构造激波附近无波动格式的普适性准则, 由此构造出数值求解无粘可压缩流动的二阶多项式基函数格式. 为了检验此格式, 我们对多个二维无粘可压缩流动的典型算例进行了数值计算, 均得到了十分满意的结果.

下面只考虑二维问题, 一维和三维问题可以类似地写出.

## 1 基函数的构造

采用基函数  $\phi_i^{(n)}(x, y)$  展开逼近真实函数  $f(x, y)$ :

$$f^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \phi_i^{(n)}(x, y), \quad (1)$$

式中,  $f^{(n)}(x, y)$  是真实函数的  $n$  阶近似,  $f(x_i, y_i)$  是节点上的函数值, 基函数  $\phi_i^{(n)}(x, y)$  可以取任意正交完备函数族, 最常用的基函数是多项式和三角函数, 当  $n$  取不同整数时, 可得不同阶次的逼近函数,  $m$  是单元中基函数的个数.

本文只研究基函数是多项式的情形, 并重点研究二阶多项式类型基函数格式. 为了便于公式的推导和表达, 引入面积坐标  $\xi_i$ .

$$\xi_i = A_i/A \quad (i = 1, 2, 3),$$

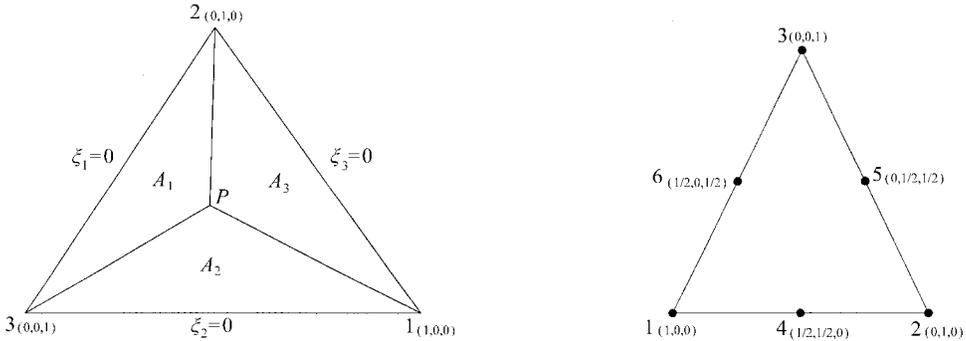


图 1 三角形单元的面积坐标示意图和 6 节点三角形单元的面积坐标示意图

式中,  $A$  是三角形单元的面积,  $A_i$  的意义见图 1. 因  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ , 故 3 个面积坐标中, 只有两个是独立的.  $\xi_i$  与直角坐标之间的关系为

$$\xi_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad (2)$$

其中

$$a_i = \frac{1}{D}(x_j y_k - x_k y_j), \quad b_i = \frac{1}{D}(y_j - y_k), \quad c_i = \frac{1}{D}(x_k - x_j), \quad (3)$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A. \quad (4)$$

对于一阶多项式, (1) 式可写为

$$f^{(1)}(x, y) = \sum_{i=1}^3 f(x_i, y_i) \phi_i^{(1)}(x, y), \quad (5)$$

$\phi_i^{(1)}(x, y)$  是一阶多项式类型的基函数, 它在面积坐标下的表达式为(见图 1)

$$\phi_i^{(1)}(x, y) = \xi_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

其一阶导数为

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} = b_i f_i, \quad \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} = c_i f_i, \tag{7}$$

式中  $f_i = f(x_i, y_i)$ .

## 2 非结构网格上导数的中心格式和迎风格式

下面我们来构造网格节点上函数的导数值. 根据物理问题的需要, 应区分中心格式和迎风格式两种情形.

### 2.1 一阶中心格式(1C)

中心格式是指一点的物理量受其周围各个方向的信息的影响. 设  $n$  点周围有  $N$  个三角元, 则根据(7)式在  $n$  点有  $N$  个不同的导数值  $(\partial f^{(1)}/\partial x)_n^{e_i} (i = 1, 2, \dots, N)$ .  $e_i$  表示  $n$  点周围第  $i$  个三角元, 下标  $n$  表示  $n$  点上的值. 我们采用加权平均法求  $n$  点上的函数值  $(\partial f^{(1)}/\partial x)_n$ . 由于面积越小,  $(\partial f^{(1)}/\partial x)_n$  的值越接近精确值, 故权因子取  $1/A_{e_i}$  是合适的.

于是一阶导数的中心格式是

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_n^{1C} = \left[ 1 \left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{e_i}} \right. \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{e_i}} \left[ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} \right]_n^{e_i} \right] \begin{matrix} j = 1, 2, \\ x_1 = x, x_2 = y \end{matrix}. \tag{8}$$

### 2.2 一阶迎风格式(1U)

为了在非结构网格上构造导数的迎风格式, 我们提出三角元迎风面积的概念. 从物理上容易理解只有迎风面积这部分才对该点迎风导数值起作用.

对每个单元的每个节点引入迎风系数  $\alpha_n^i$ , 它与单元  $e_i$  及局部节点编号  $n$  有关. 以图2所示的二维区域为例, 不失一般性, 假设有4个单元  $e_i (i = 1, \dots, 4)$ . 中心点总体编号为1, 4个单元的局部节点按逆时针方向排序, 且总以中心点为第1点. 若  $x$  轴正向为迎风方向, 通过  $n$  点作  $x$  轴的垂线, 将  $n$  点周围每个三角元分成迎风面积和背风面积两部分. 此时我们有表1所示的迎风系数.

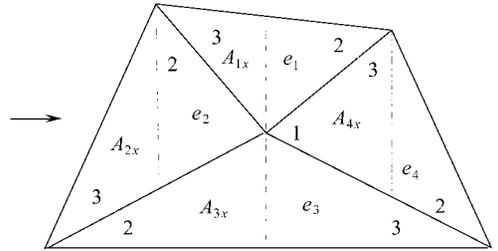


图2 非结构网格迎风区域示意图

表1 迎风系数

单元编号	$e_1$			$e_2$			$e_3$			$e_4$		
局部节点号	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\alpha_n^i$	$A_{1x}/A_{e_1}$	1	0	1	$A_{2x}/A_{e_2}$	0	$A_{3x}/A_{e_3}$	0	1	0	1	$A_{4x}/A_{e_4}$

一阶导数的一阶迎风格式为

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_n^{1U} = \left[ 1 \left| \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_n^i}{A_{e_i}} \right. \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_n^i}{A_{e_i}} \left[ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} \right]_n^{e_i} \right] \begin{matrix} j = 1, 2, \\ x_1 = x, x_2 = y \end{matrix}, \tag{9}$$

容易看出,  $\alpha_n^i$  取为1时, 迎风格式转变为 中心格式(8).

### 2.3 二阶多项式基函数

此时(5)式变为

$$f^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \phi_i^{(2)}(x, y), \tag{10}$$

式中  $\phi_i^{(2)}(x, y)$  是二阶多项式类型的基函数,  $f^{(2)}(x, y)$  是函数  $f$  的二阶近似函数. 容易求出  $\phi_i^{(2)}(x, y)$  在面积坐标下的表达式为(见图 1)

$$\begin{cases} \phi_i^{(2)} = \xi_i(2\xi_i - 1) & (i = 1, 2, 3), \\ \phi_{i+3}^{(2)} = 4\xi_i\xi_{i+1} & (i = 1, 2, 3; \xi_4 = \xi_1), \end{cases} \quad (11)$$

一阶导数  $\partial f^{(2)}/\partial x, \partial f^{(2)}/\partial y$  的表达式为

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y} = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial y}, \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial x} = b_i(4\xi_i - 1), \quad \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial y} = c_i(4\xi_i - 1), \\ \frac{\partial \phi_{i+3}^{(2)}}{\partial x} = 4b_i\xi_{i+1} + 4b_{i+1}\xi_i, \quad \frac{\partial \phi_{i+3}^{(2)}}{\partial y} = 4c_i\xi_{i+1} + 4c_{i+1}\xi_i, \end{cases} \quad (13)$$

二阶导数  $\partial^2 f^{(2)}/\partial x^2, \partial^2 f^{(2)}/\partial y^2$  的表达式为

$$\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial y^2}, \quad (14)$$

式中

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial x^2} = 4b_i^2, \quad \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial y^2} = 4c_i^2, \\ \frac{\partial^2 \phi_{i+3}^{(2)}}{\partial x^2} = 8b_ib_{i+1}, \quad \frac{\partial^2 \phi_{i+3}^{(2)}}{\partial y^2} = 8c_ic_{i+1}. \end{cases} \quad (15)$$

于是二阶中心格式(2C)和二阶迎风格式(2U)是

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_n^{2C} = \left( 1 \left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{A e_i} \right. \right) \sum_{i=1}^N \frac{1}{A e_i} \left[ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_j} \right]_n^{e_i} \begin{cases} j = 1, 2, \\ x_1 = x, x_2 = y \end{cases}, \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_n^{2U} = \left( 1 \left| \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_n^i}{A e_i} \right. \right) \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_n^i}{A e_i} \left[ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_j} \right]_n^{e_i} \begin{cases} j = 1, 2, \\ x_1 = x, x_2 = y \end{cases}, \quad (17)$$

上述构造中心格式和迎风格式的方法很容易推广到二阶以上, 三维及其它基函数的情形.

### 3 可压缩流体 Euler 方程的基函数格式

考虑可压缩流体的 Euler 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u_j, \rho \varepsilon)^T, \quad \mathbf{F}_i = (\rho u_i, \rho u_i u_j + p \delta_{ij}, u_i(\rho \varepsilon + p))^T,$$

这里  $\rho$  是流体的密度,  $p$  为压力,  $u_i$  是直角坐标下的速度分量,  $\varepsilon$  表示流体的比能, 上标 T 表示向量的转置,  $\gamma$  为比热比, 取  $\gamma = 1.4$ ,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号.

#### 3.1 流通量分裂技术

(18) 式可改写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (19)$$

将矩阵  $\mathbf{A}$  写成

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \Lambda \mathbf{R}, \quad (20)$$

其中  $\Lambda$  为特征对角线矩阵, 其表达式为

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \tag{21}$$

$\lambda_i$  为  $A$  的特征值, 令

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-, \quad \lambda_i^\pm = \frac{(\lambda_i \pm |\lambda_i|)}{2},$$

并引进

$$\Lambda^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \lambda_2^\pm, \dots, \lambda_m^\pm), \tag{22}$$

令

$$A^\pm = R^{-1} \Lambda^\pm R, \quad F_i^\pm = A^\pm U, \tag{23}$$

(18) 式可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} + \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} = 0. \tag{24}$$

### 3.2 中心格式与迎风格式的结合

为了避免激波附近的非物理波动, 激波前后必须采用适当的格式. 在构造差分法无波动格式时所采用的准则<sup>[1]</sup>, 现在已不能用于处理多维问题的基函数方法中去. 为了解决此问题, 我们根据物理考虑首次提出新的构造无波动格式的普适准则.

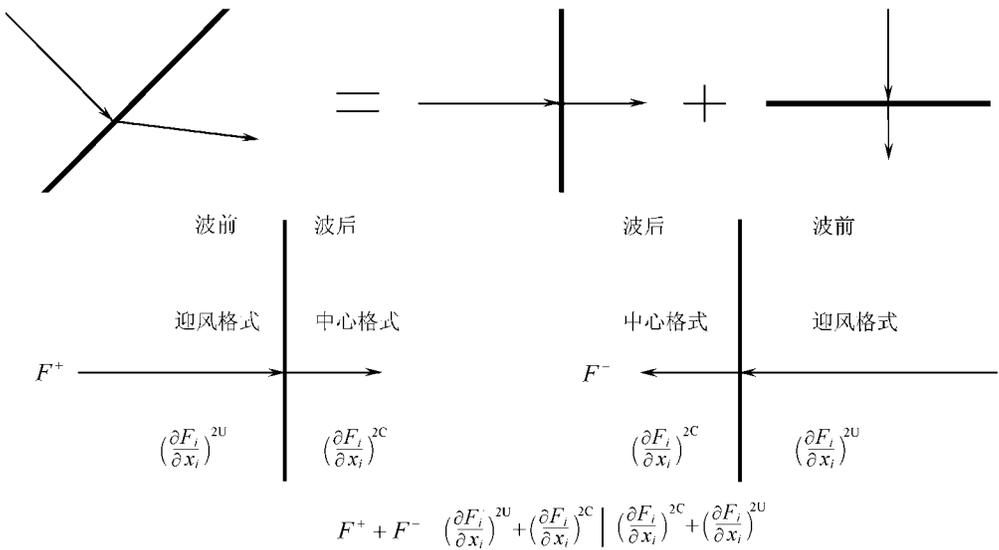


图3 基函数法在激波前后的格式选取示意图

首先, 让我们考虑一下激波前后的不同的物理特性. 任何一个斜激波在波前波后都可以将其看作是在  $x$  和  $y$  两个方向分量的复合. 假设间断面与  $x$  和  $y$  方向均不重合, 由于斜激波的存在, 速度将减小, 很容易证明速度在波前  $x, y$  两个方向上的分量要分别大于波后  $x, y$  方向的分量, 即速度在  $x, y$  两个方向上都会发生间断, 因此可将斜激波看成是沿  $x$  方向和  $y$  方向的两个正激波的复合. 由于超音速气流在通过正激波后总会减速变为亚音速气流. 因此, 在分解后的两个方向的正激波的两侧, 总是波前是超音速流场, 波后为亚音速流场.

考虑到在超音速流场下游的扰动是无法传播到上游的, 为了能够正确地模拟超音速流场, 就必须符合该流场的物理特性. 因此, 在波前采用迎风格式是合适的. 相反, 在亚音速流场下游的扰动是可以传播到上游的. 因此, 在波后应该采用中心格式. 经过流场分裂后, 各流通

量在激波前后应采取的格式如图 3 所示.

采用二阶格式时,有时在激波附近会出现数值波动,这种非物理的数值波动是不合理的,因此在波动区还应该采用一阶迎风格式来抑制这种波动,使局部极值逐渐消除.因此,可压缩流体 Euler 方程的基函数格式是二阶迎风格式、二阶中心格式和一阶迎风格式相结合的一种无波动的混合格式,这种格式可以有效地消除激波附近的非物理波动.

### 3.3 间断前后的判断

选定格式后,还必须能够在计算中判定网格点相对激波的位置.考察激波前后物理量分布,不难发现,间断前,物理量的一阶导数和二阶导数符号一致,而间断后两者的符号则相反,这就是间断前后的判断准则.计算通量  $F$  在正负方向的两个单侧导数,记为  $\delta^+ F$  和  $\delta^- F$  引入:

$$\delta^2 F = \delta^+ F - \delta^- F, \quad \delta F = \delta^+ F + \delta^- F,$$

$\delta^2 F$  和  $\delta F$  分别与通量  $F$  的二阶导数和一阶导数相当.可将间断前后的判断准则写为

$$\begin{cases} \delta^+ F \cdot \delta^- F \leq 0, & \text{节点在波动区,} \\ \delta^+ F \cdot \delta^- F > 0, \text{ 且 } \delta^2 F \cdot \delta F > 0, & \text{节点在间断上游,} \\ \delta^+ F \cdot \delta^- F > 0, \text{ 且 } \delta^2 F \cdot \delta F < 0, & \text{节点在间断下游,} \end{cases}$$

当  $\delta^+ F$  与  $\delta^- F$  同号时,说明数值解单调,不在激波区,应继续判断  $\delta^2 F$  与  $\delta F$  是否同号以确定在间断的上游或下游,分别选择迎风格式或中心格式.当  $\delta^+ F$  与  $\delta^- F$  异号时,说明数值解出现波动,应采用一阶迎风格式抑制波动,使局部极值逐渐消除.间断两侧应选取的格式如表 2 所示(参阅文献[2]).

表 2 间断两侧选取格式

	$\delta^+ F$ 与 $\delta^- F$ 同号		$\delta^+ F$ 与 $\delta^- F$ 异号
	间断上游区 $\delta^2 F$ 与 $\delta F$ 同号	间断下游区 $\delta^2 F$ 与 $\delta F$ 异号	
$a^+ > 0$	$\left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2U}$	$\left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2C}$	$\left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{1U}$
$a^- < 0$	$\left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2C}$	$\left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2U}$	$\left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{1U}$
$a^+ + a^-$	$\left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2U} + \left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2C}$	$\left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2C} + \left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2U}$	$\left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right]^{1U}$

### 3.4 混合格式的表达

为使格式易于表达,我们引进

$$\theta = \frac{1}{2} | \text{sign}(\delta^+ F) + \text{sign}(\delta^- F) | \quad (25)$$

及

$$K = \frac{1}{2} | \text{sign}(\delta^2 F) + \text{sign}(\delta F) |, \quad (26)$$

采用上述消除激波附近非物理波动的方法后,取二阶多项式为基函数的显式格式如下式所示:

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t \left\{ K(1-\theta) \left[ \left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2U} + \left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2C} \right] + (1-K)(1-\theta) \left[ \left[ \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} \right]^{2U} + \left[ \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} \right]^{2C} \right] + \theta \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right]^{1U} \right\}^n, \quad (27)$$

式中

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial F_i^{\pm}}{\partial x_i} \right]_n^{2U} = \left( 1 \left| \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_n^e}{A_{e_j}} \right. \right) \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_n^e}{A_{e_j}} \left[ \frac{\partial F_i^{\pm(2)}}{\partial x_i} \right]_{n'}^{e_j}, \\ \left[ \frac{\partial F_i^{\pm}}{\partial x_i} \right]_n^{2C} = \left( 1 \left| \sum_{j=1}^N \frac{1}{A_{e_j}} \right. \right) \sum_{j=1}^N \frac{1}{A_{e_j}} \left[ \frac{\partial F_i^{\pm(2)}}{\partial x_i} \right]_{n'}^{e_j}, \\ \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right]_n^{1U} = \left( 1 \left| \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_n^e}{A_{e_j}} \right. \right) \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_n^e}{A_{e_j}} \left[ \frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial x_i} \right]_{n'}^{e_j}. \end{cases} \quad (28)$$

(28) 式就是我们首次提出的处理无粘可压缩流动的二阶多项式基函数显式格式. 在数值求解可压缩流动时, 边条件的取法是: 外部边界采用无反射边条件; 在壁面上采用法向速度为 0 的绕流条件. 初始条件是: 对于定常问题可任意取, 例如可取均匀来流条件; 对于不定常问题, 应视不同问题取不同的初始条件.

### 4 算 例

为了验证基函数法, 选择了 9 个二维定常算例. 我们采用前沿推进法或前沿推进法与 Delaunay 方法相结合的方法生成网格<sup>[3-4]</sup>, 该方法可方便地进行网格自适应. 对每个算例都进

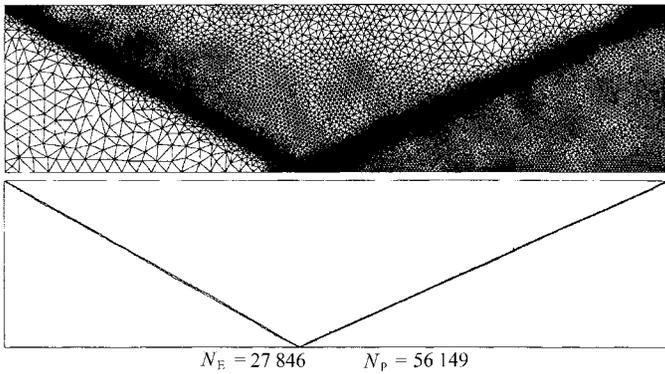


图 4 激波反射问题 ( $M_\infty = 2.9$ ) 自适应网格和等压线分布图

行了初网格计算并采用网格自适应技术<sup>[5]</sup> 以提高对间断的分辨能力. 在计算中采用时间相关法处理定常问题. 算例 1 考虑入射激波在平板上的正规反射问题. 来流  $M_\infty = 2.9$ , 激波入射角为  $29^\circ$ , 计算区域是  $0 < x < 4, 0 < y < 1$ , 波后  $y = 1$  上的边界条件利用斜激波关系式精确得出. 图 4 是计算得到的自适应网格及等压线分布图; 可以看出格式无波动, 激波分辨率高. 图 5 是 3 个不同的截面  $y = 0.25, 0.5, 0.75$  上的压力分布, 与精确解符合得很好. 算例 2 是二维通道内可压缩流体的定常流动, 单侧收缩  $15^\circ$ , 来流  $M_\infty = 2.0$ . 图 6 是计算得到的自适应网格及等压线分布图; 可以看出, 整个流动分辨率高, 无数值波动. 自适应使得网格在物理量变化剧烈的激波附近加密, 效果十分显著. 算例 3 是 NACA 0012 翼型定常超音速绕流,  $M_\infty = 1.2$ , 攻角  $\alpha = 7.0^\circ$ . 图 7

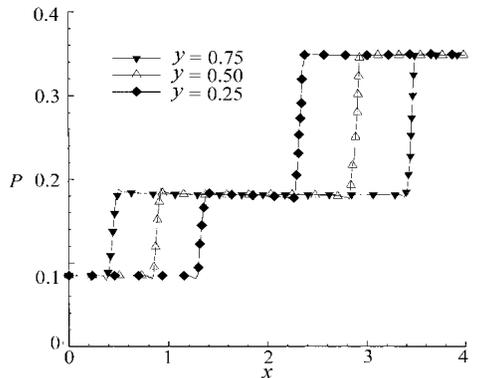


图 5 激波反射问题 ( $M_\infty = 2.9$ ) 不同  $y$  值上的压力分布图

是自适应网格和等压线分布图;可以看出, 计算结果对脱体激波和尾部激波的捕捉和分辨率都比较好.

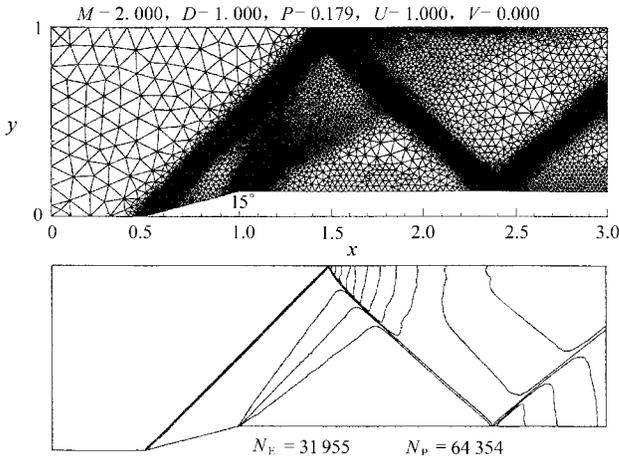


图 6 二维通道流动 ( $M_\infty = 2.0$ ) 自适应网格和等压线分布图

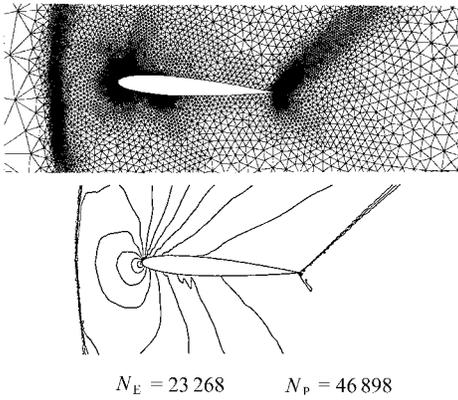


图 7 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 1.2, \alpha = 7.0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

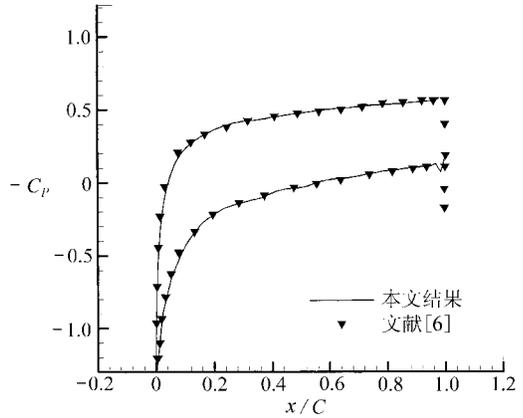


图 8 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 1.2, \alpha = 7.0^\circ$ ) 表面压力系数分布曲线图

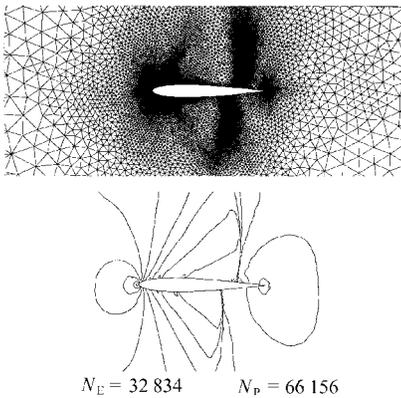


图 9 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

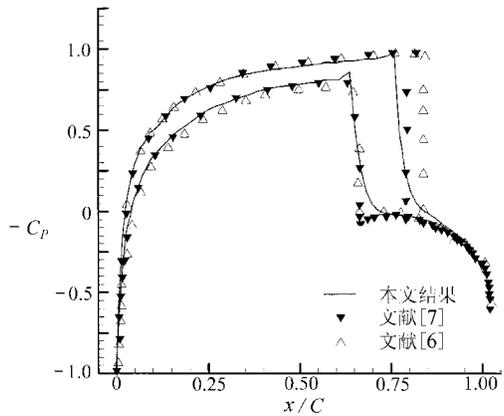


图 10 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ ) 表面压力系数分布曲线图

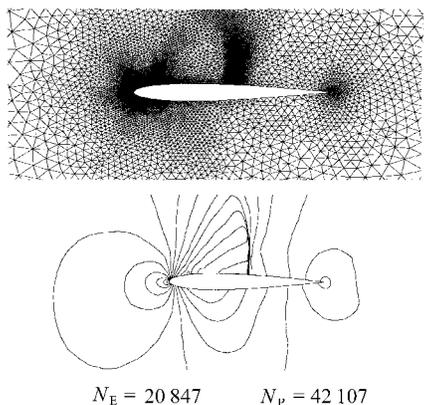


图 11 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

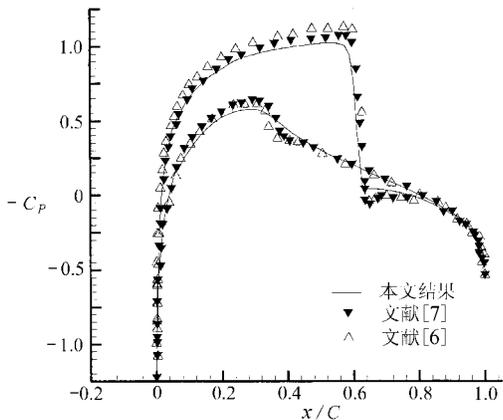


图 12 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$ ) 表面压力系数分布曲线图

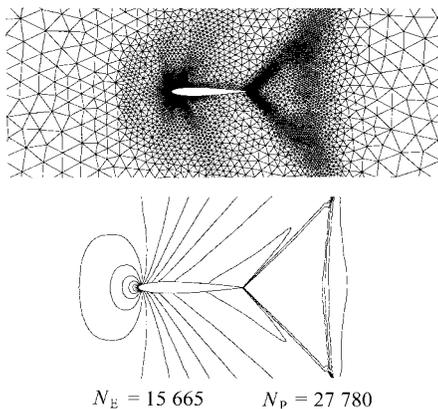


图 13 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.95, \alpha = 0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

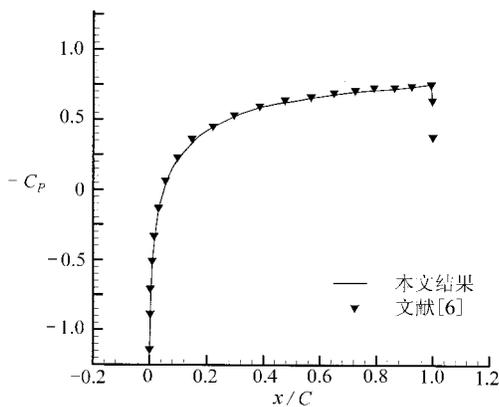


图 14 NACA 0012 翼型 ( $M_\infty = 0.95, \alpha = 0^\circ$ ) 表面压力系数分布曲线图

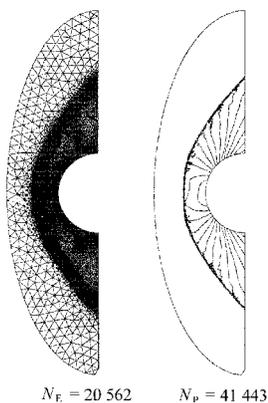


图 15 圆柱超音速绕流 ( $M_\infty = 4.0, \alpha = 0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

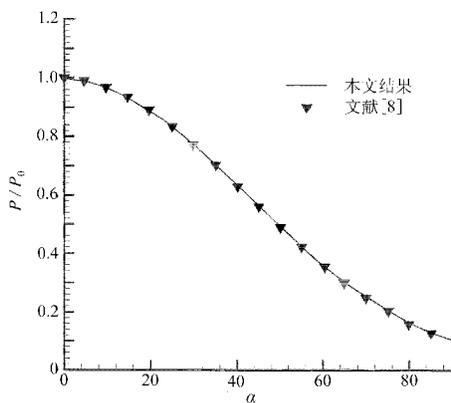


图 16 圆柱超音速绕流 ( $M_\infty = 4.0, \alpha = 0^\circ$ ) 表面压力分布图

图 8 是翼型表面压力系数的分布曲线, 与文献[6]中的结果符合得很好. 算例 4 是 NACA 0012 翼型定常跨音速绕流,  $M_\infty = 0.85$ , 攻角  $\alpha = 1.0^\circ$ . 图 9 是自适应网格和等压线分布图;

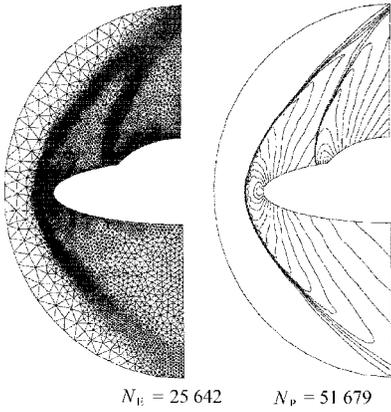


图 17 双椭圆外形 ( $M_\infty = 2.0, \alpha = 0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布图

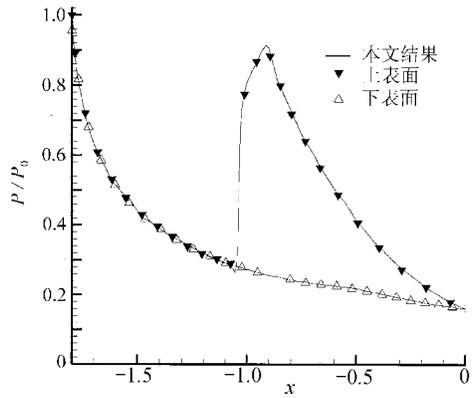


图 18 双椭圆外形 ( $M_\infty = 2.0, \alpha = 0^\circ$ ) 表面压力分布图

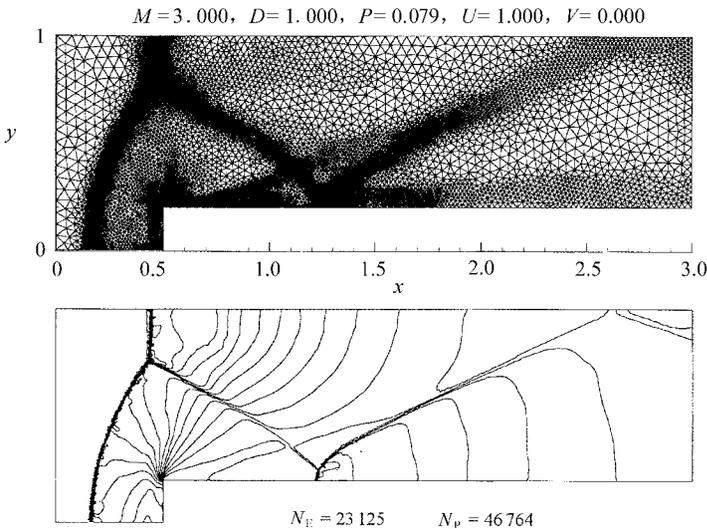


图 19 二维前台阶通道流动 ( $M_\infty = 3.0, \alpha = 0.0^\circ$ ) 自适应网格和等压线分布

计算可清晰地捕捉到翼面上下激波,并具有较好分辨率. 图 10 是翼型表面压力系数分布曲线,与文献[6-7]比较符合得较好. 算例 5 和算例 4 是同一情形,只是  $M_\infty$  和  $\alpha$  不同,分别是  $M_\infty = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$ . 图 11 是自适应网格和等压线分布图;此时只有翼型上表面有激波. 图 12 是翼型表面压力系数分布曲线图,与文献[6-7]的结果基本符合. 算例 6 是 NACA 0012 翼型定常跨音速绕流,  $M_\infty = 0.95$ , 攻角  $\alpha = 0^\circ$ . 图 13 是自适应网格和等压线分布图,能清晰地捕捉到尾部上下两条激波. 图 14 是翼型剖面压力系数分布图,与文献[6]符合得很好. 算例 7 是圆柱的定常超音速绕流,来流  $M_\infty = 4.0$ , 攻角  $\alpha = 0^\circ$ . 图 15 是自适应网格及其等压线分布;图 16 是壁面压力分布;与文献[8]比较,两者相当吻合. 算例 8 是双椭圆外形的超音速定常绕流,来流  $M_\infty = 2.0$ , 攻角  $\alpha = 0^\circ$ . 图 17 是自适应网格和等压线分布图;可以看出,座舱前的激波是脱体的,并且与头激波相交,使得头激波在座舱上方略向上抬起. 图 18 是翼面压力分布图. 算例 9 是前台阶超音速绕流,来流  $M_\infty = 3.0$ , 攻角  $\alpha = 0^\circ$ . 几何参数及来流参数见图 19. 此算例流动情况比较复杂,流场中包含激波、膨胀波和接触间断等复杂图像. 图 19 是自适应网格及等压线分布图. 图 20 是等 Mach 线分布图和等密度线分布图,从中可明显看出

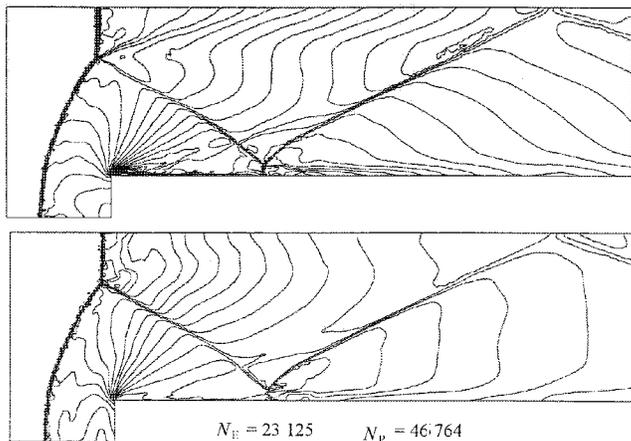


图 20 二维前台阶通道流动 ( $M_\infty = 3.0, \alpha = 0.0^\circ$ ) 利用自适应网格计算的等 Mach 线和等密度分布图

接触间断.

## 5 结 论

1) 本文首次提出在非结构网格上直接离散微分算子的新型数值计算方法——基函数法. 该方法是以基函数展开来逼近真实函数的. 在此基础上, 成功地构造出在非结构网格上导数的中心格式和迎风格式. 为消除激波附近的非物理波动, 本文采用了通量分裂法及基于物理考虑的中心格式与迎风格式相结合的技术, 构造出了处理无粘可压缩流动的二阶多项式基函数格式. 二维多种典型算例表明, 此方法对间断有高的分辨率. 采用自适应技术后, 可以得到无波动的, 精度及分辨率都十分令人满意的结果.

2) 基函数法成功地保留了有限差分法和有限元法的一些优点. 首先, 由于基函数法和有限元法一样是在非结构网格上构造的, 因此它能方便地处理复杂边界, 保持边界点与内点格式精度的一致, 并便于采用自适应技术改进计算的精度; 其次, 基函数法和有限差分法一样直接离散微分算子, 因而显著节约了计算时间和内存; 最后, 基函数法格式构造统一、规范, 逻辑简单, 便于编制通用程序.

3) 本文根据物理考虑首次提出新的构造激波附近无波动格式的普适性准则.

### [参 考 文 献]

- [1] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. 空气动力学学报, 1988, 6(2): 143-165.
- [2] 吴望一, 蔡庆东. 非结构网格上一种新型的高分辨率高精度无波动的有限元格式[J]. 中国科学(A辑), 1998, 28(7): 633-643.
- [3] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, et al. Adaptive remeshing for compressible flow computations[J]. Journal of Computational Physics, 1987, 72(2): 449-466.
- [4] 谢文俊. 基函数法在三维无粘可压缩流动中的研究与应用以及三维非结构网格的生成及自适应技术研究[D]. 硕士研究生学位论文. 北京: 北京大学, 2002.
- [5] Zeeuw D D, Powell K G. An adaptively refined cartesian mesh solver for the Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 104(1): 56-68.
- [6] Yee H C, Harten A. Implicit TVD scheme for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates

- [J]. AIAA J, 1987, 25(2): 266-274.
- [7] Hwang C J, Wu S J. Adaptive finite upwind approach on mixed quadrilateral-triangular meshes[J]. AIAA J, 1993, 31(1): 61-67.
- [8] Lyubimov A N, Rusanov V V. Gas flow past blunt bodies[R]. NASA-TT-F715, 1973.

## Basic Function Scheme of Polynomial Type

WU Wang-yi, LIN Guang

(State Key Laboratory for Turbulence and Complex System, Department of  
Mechanics and Aerospace Engineering, College of Engineering,  
Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

**Abstract:** A new numerical method—Basic Function Method was proposed. This method could directly discrete differential operator on unstructured grids. By using the expansion of basic function to approach the exact function, the central and upwind schemes of derivative were constructed. By using the second order polynomial as basic function and applying the technique of flux splitting method and the combination of central and upwind schemes to suppress the non-physical fluctuation near the shock wave, the second order basic function scheme of polynomial type for solving inviscid compressible flow numerically was constructed. Several numerical results of many typical examples for two dimensional inviscid compressible transonic and supersonic steady flow illustrate that it is a new scheme with high accuracy and high resolution for shock wave. Especially, combined with the adaptive remeshing technique, the satisfactory results can be obtained by these schemes.

**Key words:** basic function scheme of polynomial type; new numerical method; unstructured grid