

Duffing 简谐振子同伦分析法求解^{*}

冯少东¹, 陈立群^{1,2}

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 上海大学 力学系, 上海 200444)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 利用同伦分析方法求解了 Duffing 简谐振子, 数值确定了变形方程中的辅助参数, 得到了一族响应和频率的近似周期解, 该解与精确解符合很好. 结果表明, 同伦分析法在求解强非线性振子时, 仍然是一种行之有效的方法.

关键词: Duffing 简谐振子; 同伦分析法; 近似解

中图分类号: O241.7; O322 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.002

引 言

现实世界中的大多数自然现象究其本质而言是非线性的, 自计算机问世以来, 线性问题的求解变得越来越容易, 但是, 一般而言, 非线性问题仍颇难求得其精确解. 因此, 对经典非线性问题的求解显得至关重要. 考虑恢复力为有理函数的 Duffing 简谐振子^[1]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u^3}{1+u^2} = 0, \quad (1)$$

对应的初始条件为

$$u(0) = A, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

这里分别对于大小 u , 我们有

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u^3 = 0, \quad \text{当 } |u| \ll 1,$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0, \quad \text{当 } |u| \gg 1.$$

近年来很多学者用不同的方法对该振子进行了研究, Mickens 用谐波平衡法给出了其频率的解析估计^[1], Lim 和 Wu 结合线性化和谐波平衡法得到了频率和周期响应的近似表达式^[2], Tiwari, Rao, Swamy 等也求得了同样的频率, 并且基于谐波平衡和 Ritz 方法计算了该振子的响

* 收稿日期: 2009-04-13; 修订日期: 2009-07-20

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(10725209); 国家自然科学基金资助项目(10672092); 上海市优秀学科带头人计划资助项目(09XD1401700); 上海市重点学科建设资助项目(Y0103)

作者简介: 冯少东(1984—), 男, 浙江宁波人, 硕士生(E-mail: shaodong6819@163.com);

陈立群(1960—), 博士生导师(联系人. Tel: +86-21-66136905; E-mail: lqchen@shu.edu.cn).

应^[3], Hu 和 Tang 通过一阶谐波平衡法的首项系数得到同样的频率^[4], Lim, Wu 和 Sun 用 Newton 谐波法构造了其高阶近似解^[5], Hu 运用迭代法确定了其频率和周期响应的近似解析解^[6].

不同于摄动技术^[7-8], Liao 提出的同伦分析法^[9]属于非摄动方法, 对于求解非线性问题, 它能够确保级数解的收敛性, 并且可以得到足够精确的解析近似解^[10-12]. 1995 年, Liao 用同伦分析法(不依赖小参数)求解了一非线性振子^[13], 随后 Liao 和 Chwang 对 Duffing 振子、单摆和恢复力是有理函数形式的振子进行了同伦分析^[14], 文献[13-14]中的同伦分析法都还未引入辅助参数, 改进后的同伦分析法引入了辅助参数, 后被应用于求解几个典型的恢复力为多项式的非线性振子^[10-11], 尽管如此, 对 Duffing 简谐振子的同伦分析还研究甚少.

本文应用带辅助参数的同伦分析方法^[10]求解了 Duffing 简谐振子, 得到了它的解析近似解, 确定了辅助参数的有效区间, 并且将取得的解析近似解与精确周期解做了比较, 符合得非常好, 验证了该方法的有效性.

1 同伦分析

在方程(1)中引入新的变换 $\tau = \omega t$, 则方程变成

$$\omega^2 u''(\tau)(1 + u^2(\tau)) + u^3(\tau) = 0, \quad (3)$$

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (4)$$

式中, “'”表示对新变量 τ 求导, 新变量 τ 的选取使得方程(3)及对应初始条件(4)的解是关于 τ 的以 2π 周期的周期函数, 相应的非线性振子的周期由 $T = 2\pi/\omega$ 给出, 原非线性振动的频率 ω (或周期 T) 及周期响应 $u(\tau)$ 都依赖于振幅 A .

显然, 满足式(2)的振动系统的响应可由以下基函数表达^[10], 即

$$\left\{ \cos(k\tau) \mid k = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (5)$$

这就提供了该振动的解表达. 因此, 我们选取

$$L[\phi(\tau; q)] = \omega_0^2 \left[\frac{\partial^2 \phi(\tau; q)}{\partial \tau^2} + \phi(\tau; q) \right] \quad (6)$$

作为辅助线性算子, 具有性质

$$L(C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau) = 0, \quad (7)$$

这里 C_1, C_2 为常数. 由方程(3), 定义如下非线性算子

$$N[\phi(\tau; q), \Omega(q)] = \Omega^2(q) \frac{\partial^2 \phi(\tau; q)}{\partial \tau^2} [1 + \phi^2(\tau; q)] + \phi^3(\tau; q), \quad (8)$$

其中, $\phi(\tau; q), \Omega(q)$ 分别是关于 $u(\tau), \omega$ 的一个连续映射. 构造下列零阶形变方程^[10]

$$(1 - q)L[\phi(\tau; q) - u_0(\tau)] = qhH(\tau)N[\phi(\tau; q), \Omega(q)], \quad (9)$$

其中, $q \in [0, 1]$ 表示一嵌入变量, $h \neq 0$ 是一辅助参数, $H(\tau) \neq 0$ 是辅助函数, L 为辅助线性算子, $u_0(\tau)$ 表示 $u(\tau)$ 的初始猜测解. 为简便起见, 我们选取 $H(\tau) = 1$.

根据初始条件(4)和解表达式(5), 我们选取 $u_0(\tau) = A \cos \tau$. 同时满足初始条件

$$\phi(0; q) = A, \quad \frac{\partial \phi(\tau; q)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (10)$$

因此, 当 q 从 0 增大到 1 时, $\phi(\tau; q)$ 从初始猜测解 $u_0(\tau) = A \cos \tau$ 变化到精确解 $u(\tau)$, 同时, $\Omega(q)$ 从初始猜测频率 ω_0 变化到物理频率 ω , 这里 ω_0 会在下文给出.

利用 Taylor 级数展开定理, $\phi(\tau; q)$ 和 $\Omega(q)$ 可展开成如下 q 之幂级数:

$$\phi(\tau; q) = \phi(\tau; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\tau) q^m, \quad (11)$$

$$\Omega(q) = \Omega(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Omega(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = \omega_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \omega_m q^m. \quad (12)$$

假如辅助线性算子 L 、初始猜测解 $u_0(\tau)$ 、辅助参数 h 和辅助函数 $H(\tau)$ 选取合适, 级数 (11)、(12) 在 $q = 1$ 时收敛^[10], 则我们有级数

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\tau), \quad \omega = \omega_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \omega_m. \quad (13)$$

将零阶形变方程 (9) 对 q 求导 m 次, 再令 $q = 0$, 最后除以 $m!$, 则有高阶形变方程^[10]

$$L[u_m(\tau) - X_m u_{m-1}(\tau)] = hH(\tau) R_m(u_{m-1}, \omega_{m-1}), \quad (14)$$

这里, $X_m = 1 (m > 1)$, $X_1 = 0$, 且

$$R_m(u_{m-1}, \omega_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; q), \Omega(q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}. \quad (15)$$

将式 (11)、(12) 代入式 (15), 并且求高阶导数得

$$R_m(u_{m-1}, \omega_{m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{j=0}^k \omega_j \omega_{k-j} \right] u_{m-1-k} + \sum_{k=0}^{m-1} u_{m-1-k}(\tau) \sum_{j=0}^k u_{k-j}(\tau) u_j(\tau) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{l=0}^k \left[\sum_{i=0}^l \omega_i \omega_{l-i} \right] u_{k-l} \right] \left[\sum_{j=0}^{m-1-k} u_{m-1-k-j}(\tau) u_j(\tau) \right]. \quad (16)$$

根据式 (5) 和系统的奇非线性, $R_m(u_{m-1}, \omega_{m-1})$ 可表示成

$$R_m(u_{m-1}, \omega_{m-1}) = \sum_{n=0}^{\varphi(m)} b_n(\omega_{m-1}) \cos[(2n+1)\tau], \quad (17)$$

其中, $b_n(\omega_{m-1})$ 是一个依赖于 ω_{m-1} 的系数, 整数 $\varphi(m)$ 依赖于 m 和方程 (3) 的形式. 为避免 u_m 出现长期项 $\tau \cos \tau$, 必须强迫式 (17) 中 $\cos \tau$ 的系数为 0, 因此

$$R_1 = \left[-\omega_0^2 + \frac{3}{4}A^2 - \frac{3}{4}A^2\omega_0^2 \right] \cos \tau + \left[\frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{4}A^3\omega_0^2 \right] \cos 3\tau. \quad (18)$$

由式 (18) 得出初始猜测频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3A^2}{3A^2 + 4}}. \quad (19)$$

该解与其他解法^[1-6] 得出的初始解是一致的.

将式 (6) 和式 (17) 代入方程 (14), 我们可得 m 阶形变方程之解 ($m \geq 1$):

$$u_m(\tau) = X_m u_{m-1}(\tau) + \frac{h}{\omega_0} \sum_{n=2}^{\varphi(m)} \frac{b_n(\omega_{m-1})}{1-n^2} \cos(n\tau) + C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau. \quad (20)$$

根据解表达式 (5), 令 $C_1 = 0$. 为确保振动振幅为 A , 有

$$u_m(0) - u_m(\pi) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

系数 C_2 由式 (21) 确定.

因此, $u(\tau)$ 和 ω 的 m 阶近似级数解为

$$u(\tau) \approx \sum_{m=0}^M u_m(\tau), \quad \omega \approx \sum_{m=0}^M \omega_m, \quad (22)$$

例如, 物理频率的一阶近似解是

$$\omega \approx \omega_0 + \frac{3A^2 h (1 + 2A^2)}{\omega_0 (192 + 280A^2 + 108A^4)}. \quad (23)$$

2 数值结果及讨论

通过上节的推导, 我们可以得到两族含有辅助参数 h 的 $u(\tau)$ 和 ω 的 m 阶近似解表达式.

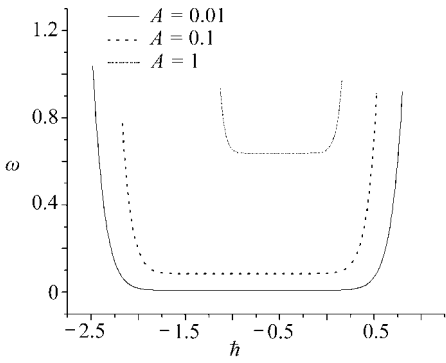


图 1 $A = 0.01, 0.1, 1.0$ 时, 级数解 (22) 之 $\omega-h$ 曲线

值得强调的是, 对于由式(6) 定义的线性算子 L , 我们仍然拥有较大的自由选取辅助参数 h 的值, 例如, 计算频率 ω 关于 h 的 15 阶近似解. 图 1 显示了当 $A = 0.01, 0.1, 1.0$ 时的 $\omega-h$ 曲线, 该曲线表明, h 的有效区间为 $-2.0 < h < 0 (A = 0.01)$, $-1.7 < h < 0 (A = 0.1)$, $-1.0 < h < 0 (A = 1.0)$. 可以看出, 在同阶近似中, 频率 ω 的收敛区间随着振幅 A 的增大而减小, 而对于大振幅的振动, 我们可以通过求解更高阶的近似解来扩大收敛区间.

对于在有效区间内选定的 h 值, 我们计算原振动系统响应的前 3 阶近似周期解, 图 2~ 图 4 分别显示了当 $A = 0.01, 0.1, 1.0$ 时, 该解与精确数值解的比较结果.

表明同伦分析法给出的近似解析解非常接近原方程的精确解, 并且振幅越小, 该近似解与精确解的误差越小.

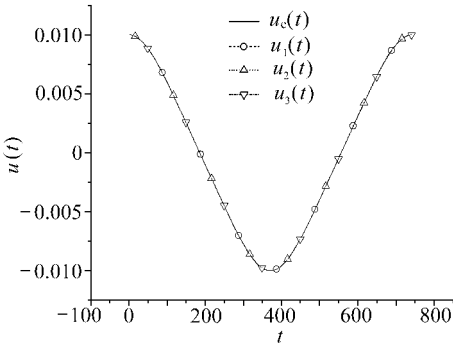


图 2(a) $A = 0.01$ 时, 近似周期解与精确解的比较

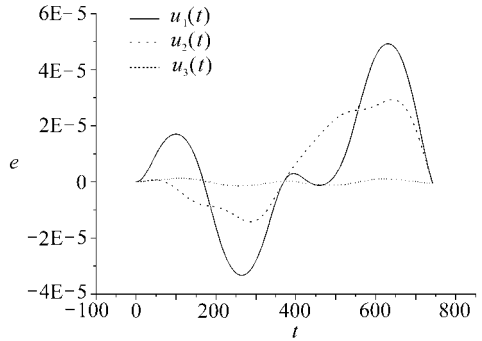


图 2(b) $A = 0.01$ 时, 前 3 阶近似解的误差

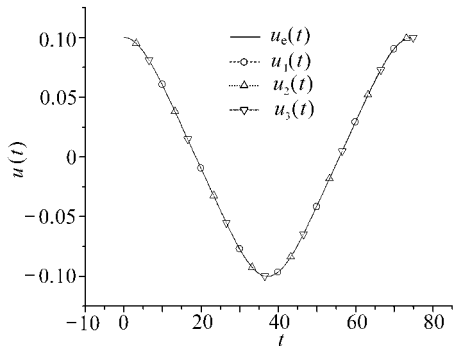


图 3(a) $A = 0.1$ 时, 近似周期解与精确解的比较

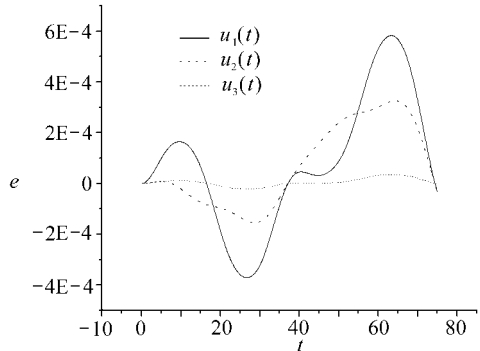


图 3(b) $A = 0.1$ 时, 前 3 阶近似解的误差

根据原初始条件(2), 非线性方程(1)有精确解析解^[2]

$$\omega_e(A) = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{A \cos t dt}{\sqrt{A^2 \cos^2 t + \ln|1 - A^2 \cos^2 t / (1 + A^2)|}} \right]^{-1}. \tag{24}$$

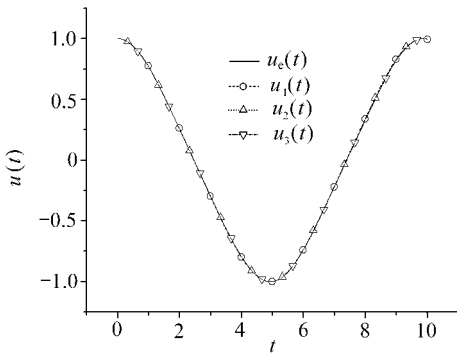


图 4(a) A = 1.0 时, 近似周期解与精确解的比较

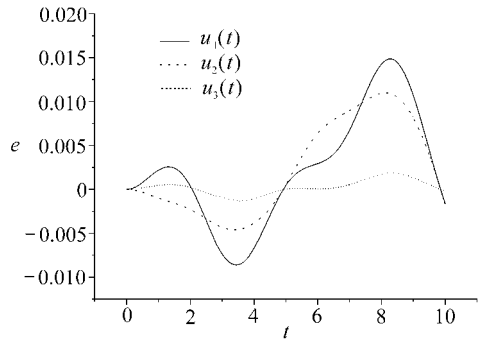


图 4(b) A = 1.0 时, 前 3 阶近似解的误差

表 1 不同振幅下, 频率 ω 近似周期解与精确解的比较

A	ω_e	ω_1/ω_e	$(\omega_1 + \omega_2)/\omega_e$	$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/\omega_e$	$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)/\omega_e$
0.01	0.008 472	1.000 908	1.000 685	1.000 054	1.000 040
0.04	0.033 867	1.000 901	1.000 690	1.000 253	1.000 043
0.07	0.059 190	1.000 877	1.000 698	1.000 047	1.000 038
0.10	0.084 389	1.000 843	1.000 708	1.000 048	1.000 043
0.40	0.319 402	1.001 410	1.001 053	0.999 888	1.000 112
0.70	0.504 584	1.002 585	1.001 681	1.000 860	1.000 201
1.00	0.636 780	1.002 367	1.002 403	1.000 251	1.000 553
4.00	0.950 857	1.005 080	1.003 510	1.010 408	1.010 422
7.00	0.982 200	1.002 352	1.001 992	1.001 144	1.001 307

选取有效区域内的 h 值, 表 1 显示了频率 ω 前 4 阶近似解在不同大小振幅下与方程 (24) 给出的精确解的比较. 结果表明, 即使对于大的振幅, 同伦分析法也能够给出与由直接积分式 (24) 得到的精确解符合得很好的近似解析解.

3 结束语

本文利用同伦分析法研究了 Duffing 简谐振子, 确定了辅助参数 h 的有效区域, 得到了一族响应和频率的近似周期解, 该解与精确解符合很好. 结果表明, 同伦分析法在求解大振幅、强非线性振动问题时仍然能给出满意的周期解, 只要辅助线性算子、初始猜测解、辅助参数、辅助函数选取合适, 该方法对类似的具有奇恢复力的保守振动系统仍然有效.

[参 考 文 献]

[1] Mickens R E. Mathematical and numerical study of the Duffing-harmonic oscillator[J]. J Sound Vibration, 2001, **244**(3): 563-567.
 [2] Lim C W, Wu B S. A new analytical approach to the Duffing-harmonic oscillator[J]. Phys Lett A, 2003, **311**(5): 365-377.
 [3] Tiwari S B, Rao B N, Swamy N S, et al. Analytical study on a Duffing-harmonic oscillator[J]. J Sound Vibration, 2005, **285**(4): 1217-1222.
 [4] Hu H, Tang J H. Solution of a Duffing-harmonic oscillator by the method of harmonic balance[J]. J

- Sound Vibration , 2006, **294**(3): 637-639.
- [5] Lim C W, Wu B S, Sun W P. Higher accuracy analytical approximations to the Duffing-harmonic oscillator[J]. J Sound Vibration , 2006, **296**(4): 1039-1045.
- [6] Hu H. Solutions of the Duffing harmonic oscillator by an iteration procedure[J]. J Sound Vibration , 2006, **298**(1): 446-452.
- [7] Murdock J A. Perturbations: Theory and Methods [M]. New York: Wiley, 1991.
- [8] Nayfeh A H. Perturbation Methods [M]. New York: Wiley, 2000.
- [9] Liao S J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems[D]. PhD thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [10] Liao S J. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC Press, 2003.
- [11] Liao S J, Tan Y. A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations[J]. Studies Appl Math , 2007, **119**(4): 297-354.
- [12] 廖世俊. 超越摄动: 同伦分析方法基本思想及其应用[J]. 力学进展, 2008, **38**(1): 1-34.
- [13] Liao S J. An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example [J]. Int J Non-Linear Mech , 1995, **30**(3): 371-380.
- [14] Liao S J, Chwang A T. Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations[J]. ASME , J Appl Mech , 1998, **65**(4): 914-922.
- [15] Pirbodaghi T, Hoseini S H, Ahmadian M T, et al. Duffing equations with cubic and quintic nonlinearities[J]. Comput Math Appl , 2009, **57**(3): 500-506.

Homotopy Analysis Approach to the Duffing-Harmonic Oscillator

FENG Shao-dong¹, CHEN Li-qun^{1,2}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: The homotopy analysis is performed for the Duffing-harmonic oscillator. The auxiliary parameter in the deformation equation was numerically determined. The response and the frequency of the Duffing-harmonic oscillator were calculated. The analytical results are validated by the direct numerical simulations.

Key words: Duffing-harmonic oscillator; homotopy analysis method; approximate solution