文章编号: 1000-0887(2009) 08-0953-10

具有三阶非调和修正项时非线性弹性波动方程的对称解*

M•T• 穆斯塔法[1], K• 玛苏德[2]

(1. 法赫德国王石油矿产大学 数理统计系, 达兰 31261, 沙特阿拉伯;
2. 法赫德国王石油矿产大学 哈菲尔阿尔-巴廷社区学院 数学系, 达兰 31261, 沙特阿拉伯)

(郭兴明推荐)

摘要: 应用 Lie 对称法, 当弹性能具有三阶非调和修正项时, 分析纵向变形的非线性弹性波动方程. 通过不同对称下的恒等条件, 寻找对称代数, 并将它简化为二阶常微分方程. 对该简化的常微分方程作进一步分析后, 获得若干个显式的精确解. 分析 Apostol 的研究成果(Apostol B F. On a non-linear wave equation in elasticity. Phys Lett A, 2003, 318(6) : 545-552) 发现, 非调和修正项通常导致解在有限时间内具有时间相关奇异性. 除了得到时间相关奇异性的解外, 还得到无法显示时间相关奇异性的解.

关 键 词: 群不变解; Lie 对称; 非线性弹性方程; 偏微分方程; 常微分方程
中图分类号: O347.4+ 1 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.008

引 言

大部分的自然现象和物理过程的数学模型归结为非线性的偏微分方程, 找到它们的解析解是很困难的. 因此, 在非线性偏微分方程的研究中, 将非线性偏微分方程简化为常微分方程, 以及构造其精确解是两个主要课题. 经典的 Lie 对称法为分析非线性偏微分方程, 提供了一个功能强大的通用技术, 这种方法可以被有效地应用于研究隐性或显性的对称问题. 因而它提供了寻找微分方程的闭式解的应用最广泛的技术. 有许多求解微分方程的有效方法, 如分离变量法、行波解、自相似解以及指数自相似解等, 参看文献[1]. Ovsiannikov[2] 开创了现代 Lie 对称理论的研究, 微分方程的对称理论得到了广泛的研究并取得了长足的发展. 大量关于经典 Lie 对称理论的文献, 是其应用和扩展的研究, 如文献[2-16].

本文致力于弹性能出现三阶非调和修正项时, 非线性弹性波动方程对称简化及其精确解的研究. 具有非调和修正项时, 波动方程的连续极限模型尚未受到足够的关注. 然而, 在离散模型中, 文献[17-20] 就三次和四次非调和网格中的一维问题进行了研究. 我们的目的是应用经典 Lie 对称法, 以连续极限为模型 ——和离散网格模型完全不同, 当弹性能出现三阶非调和修正项时, 研究其运动方程的精确解. Alfinito 等[21] 运用近似对称和延拓技术, 对这样的非线

* 收稿日期: 2008-08-23; 修订日期: 2009-03-16
作者简介: M. T. Mustafa, 博士(联系人. E-mail: tmustafa@kfupm.edu.sa).
本文原文为英文, 黄锋 译, 张禄坤 校.

性波动方程,完成了一些引人注意的对称分析.文献[22]就具有三阶非调和项时,纵向变形运动方程进行了研究,运用求积和渐进级数推断:弹性能中出现非调和修正项时,很可能导致有限时间内的时间相关奇异性.有意思的是,在我们研究的一些案例的对称解中,有限时间内没有出现时间相关奇异性.

在这里,我们先概述研究中的运动方程,更详细的内容可以查阅文献[22].弹性大变形的弹性模型需要在弹性能中计及高于二阶的项.这样得到的非线性方程称为修正的非调和弹性波动方程.线弹性理论是基于应变张量 u_{ij} 与矢量 u_i 间线性关系的假设:

$$u_{ij}=\frac{1}{2}[u_{i,j}+u_{j,i}].\tag{1}$$

各向同性体的弹性能给出如下:

$$E=\int\left(\frac{\lambda}{2}u_{ii}^2+\mu u_{ij}^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为位置矢量, λ, μ 为 Lam 系数.

通过应变张量和弹性能中的高阶项来呈现弹性的非线性贡献:

$$E=\int\left(\frac{\lambda}{2}u_{ii}^2+\mu u_{ij}^2+\frac{1}{3}Au_{ij}u_{jk}u_{ki}+Bu_{ij}^2u_{kk}+\frac{1}{3}Cu_{ii}^3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r},\tag{3}$$

其中 A, B, C 为常数. 在式(3)中,只保留三阶项,忽略了更高阶项. 对一个纵向位移 $u_1(x_1)=u(x)$ 来说,能量 E 采用以下形式:

$$E=\int\left[\alpha u_x^2+\frac{1}{6}\beta u_x^3\right]\rho\mathrm{d}\boldsymbol{r},\tag{4}$$

其中, $\alpha=(\lambda+2\mu)/\rho$, $\beta=[3(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)]/\rho$, ρ 为密度. 对于公式(4)给出的弹性能来说,运动方程可以写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left[\alpha+\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\tag{5}$$

该非线性波动方程为 Fermi-Pasta-Ulam 方程[21-23]的连续极限.方程(5)一些不同于本研究中考虑情形的对称解,已在文献[24]发表.

通常认为不同材料的 Lam 系数为常数.显然, $A=B=C=0$ 时 $\beta=3\alpha$, 但在该情形中,缺少能量三阶贡献项. $\beta=3\alpha$ 时,通过应变张量中非线性项来显现能量中非线性. 这时候,方程(5)可以写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha\left[1+3\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\tag{6}$$

本文的目的是,研究方程(6)出现群不变精确解的不同情形.经典的 Lie 对称法是将方程(6)简化为二阶常微分方程,并构造其精确解.在第 1 节中,找出方程(6)的对称性.第 2 节中,分析这些对称性,完成对称简化,并得到方程(6)的几个精确解.这里得到的特解,在时域中无奇异性,但解例也存在预期的时间相关奇异性,原因在于非调和的修正项.

1 Lie 对称代数

偏微分方程经典对称的确定有着标准方法,很多著作上都有描述,如文献[9,15-16].为了得到偏微分方程(6)的对称代数,采用对称代数无穷小生成元形式:

$$X=\xi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

使用恒等条件,即对方程(6)应用二次 $X^{[2]}$ 延拓,得到下面 11 个确定方程的方程组:

$$(\xi_1)_u=0,\ (\xi_2)_u=0,\ (\phi_1)_{u,u}=0,\ (\xi_1)_t=0,\ (\xi_2)_x=0,$$

$$-(\xi_1)_{x,x}+2(\phi_1)_{x,u}=0,\ -(\xi_1)_{x,x}+2(\phi_1)_{x,u}+3(\phi_1)_{x,x}=0,$$
$$(\phi_1)_{t,t}-\alpha(\phi_1)_{x,x}=0,\ -3(\xi_1)_x+2(\xi_2)_t+(\phi_1)_u=0,$$
$$-2(\xi_1)_x+2(\xi_2)_t+3(\phi_1)_x=0,\ -(\xi_2)_{t,t}+2(\phi_1)_{t,u}=0.$$

解该确定方程组,得到以下无穷小量:

$$\xi_1=k_3+k_4x,\ \xi_2=k_2+\left(k_4-\frac{3k_6}{2}\right)t,$$
$$\phi_1=k_5+k_1t+k_6x+(k_4+3k_6)u.$$

因此,由下面的矢量场架设起方程(6)的协同对称代数:

$$X_1=t\frac{\partial}{\partial u},\ X_2=\frac{\partial}{\partial t},\ X_3=\frac{\partial}{\partial x},\ X_4=x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_5=\frac{\partial}{\partial u},\ X_6=-\frac{3t}{2}\frac{\partial}{\partial t}+(3u+x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的对易关系见表 1.

表 1 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的计算表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	X_5	0	0	0	$-9X_1/2$
X_2	$-X_5$	0	0	$-X_2$	0	$3X_2/2$
X_3	0	0	0	$-X_3$	0	$-X_5$
X_4	0	X_2	X_3	0	X_5	0
X_5	0	0	0	$-X_5$	0	$-3X_5$
X_6	$9X_1/2$	$-3X_2/2$	X_5	0	$3X_5$	0

2 精确解

在本节中,给出偏微分方程(6)的不同对称性相对应的不变解. 显然,对常微分方程来说,可解群导致降阶,等于群的降维,但对于偏微分方程来说,可解群不得不引进新的因变量和自变量,以致问题不会退化为常数解. 对该问题采用的标准方法是引进相似变量. 它们是新的自变量,作为基本的不变函数不涉及因变量,因变量隐含地定义在包含原变量的恒等式中,详见文献[7]. 因此,通过相似变量变换可以减少变量的数量. 下面的案例,将给出方程(6)的众多精确相似解,以及使用相似变量降阶的例题. 在每个案例中,利用各自的对称性,偏微分方程(6)降阶为二阶常微分方程. 这些常微分方程的进一步求解,得到方程(6)的一类精确解,在所考虑的对称性下保持不变.

2.1 $X=X_4=x\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的不变解

对 $X=x\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的微分不变式,求解特征系统 $X\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$,得到 $I_1=t/x$ 和 $I_2=u/x$. 因此,X 的相似变量为

$$\xi(x,t)=\frac{t}{x}\ 和\ V(\xi)=\frac{u}{x}.$$

相似变量代入方程(6),意味着,方程(6)的解为

$$u=xV(\xi),$$

其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$\frac{d^2V}{d\xi^2}\left\{1-\alpha\xi^2+3\alpha\xi^2\left(-V+\xi\frac{dV}{d\xi}\right)\right\}=0.$$

由方程

$$1-\alpha\xi^2+3\alpha\xi^2\left(-V+\xi\frac{dV}{d\xi}\right)=0$$

得到 $V(\xi)=1/(9\alpha\xi^2)-1/3+C_1\xi$. 因此, 得到偏微分方程(6)的一个精确解, 在对称性 $x\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 下不变, 得到

$$u(x,t)=\frac{x^3}{9\alpha t^2}-\frac{x}{3}+C_1t.$$

2.2 $X=X_1+X_2=\partial/\partial t+t\partial/\partial u$ 的不变解

计算 $X=\partial/\partial t+t\partial/\partial u$ 的微分不变式, 得到 $I_1=x$ 和 $I_2=u-t^2/2$. 因此, X 的相似变量为

$$\xi(x,t)=x \text{ 和 } V(\xi)=u-\frac{t^2}{2},$$

意味着, 方程(6)的解为

$$u=V(\xi)+\frac{t^2}{2},$$

其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$\alpha\left(1+3\frac{dV}{d\xi}\right)\frac{d^2V}{d\xi^2}-1=0.$$

通过 $dV/d\xi=F(\xi)$ 替换, 得到其首次积分:

$$\alpha\left(\frac{dV}{d\xi}+\frac{3}{2}\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2\right)-\xi=C_1.$$

解上面的常微分方程, 得到偏微分方程(6)的精确解, 它是非奇异的. 该解为

$$u(x,t)=\frac{t^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{(\alpha+6x+6C_1)^{3/2}}{27\sqrt{\alpha}}+C_2 \tag{7}$$

和

$$u(x,t)=\frac{t^2}{2}-\frac{x}{3}-\frac{(\alpha+6x+6C_1)^{3/2}}{27\sqrt{\alpha}}+C_2. \tag{8}$$

2.3 $X=X_6=-(3t/2)\partial/\partial t+(3u+x)\partial/\partial u$ 的不变解

$X=-(3t/2)\partial/\partial t+(3u+x)\partial/\partial u$ 的微分不变式, 由 $I_1=x$ 和 $I_2=ut^2+xt^2/3$ 给出. 因此, X 的相似变量为

$$\xi(x,t)=x \text{ 和 } V(\xi)=ut^2+\frac{xt^2}{3},$$

则方程(6)的解为

$$u=\frac{V(\xi)}{t^2}-\frac{x}{3},$$

其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$V-\frac{\alpha}{2}\frac{dV}{d\xi}\frac{d^2V}{d\xi^2}=0.$$

将 $dV/d\xi=F(V)$ 代入上面常微分方程的首次积分, $V(\xi)$ 满足

$$\frac{dV}{d\xi}=\frac{(3V^2+C_1)^{1/3}}{\alpha^{1/3}},$$

因此当 $C_1\neq 0$ 时, 由下式确定

$$\xi-\frac{\alpha^{1/3}V(\xi)\,{}_2F_1(1/2,1/3,3/2;-3V(\xi)^2)/C_1}{C_1^{1/3}}+C_2=0.$$

这里, 我们对 Gauss 超几何函数利用标准的记数法 ${}_2F_1$, ${}_2F_1(a,b,c;x)$ 定义为

$$ {}_2F_1(a,b,c;x)= \\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}. $$

Gauss 超几何函数的基本性质可以在文献[25-26]中找到.

当 $C_1=0$ 时，给出解如下式:

$$ u(x,t)=\frac{(x+C)^3}{9\alpha t^2}-\frac{x}{3}. $$

2.4 $X=X_1+X_2+X_3=\partial/\partial x+\partial/\partial t+t\partial/\partial u$ 的不变解

$X=\partial/\partial x+\partial/\partial t+t\partial/\partial u$ 的微分不变式为 $I_1=t-x$ 和 $I_2=u+x(x-2t)/2$. 因此，相似变量为

$$ \xi(x,t)=t-x \text{ 和 } V(\xi)=u+\frac{x}{2}(x-2t), $$

方程(6)的解为

$$ u=V(\xi)-\frac{x}{2}(x-2t), $$

其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$ \alpha+3\alpha\xi+3\alpha\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\left(-1+\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}\right)-(-1+\alpha+3\alpha\xi)\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}=0. $$

求解该常微分方程，得到偏微分方程(6)的复数解

$$ u(x,t)=\frac{-x}{2}(x-2t)+\frac{(t-x)^2}{2}+\frac{t-x}{3}-\frac{t-x}{3\alpha}\pm \\ \frac{\mathrm{i}}{27\alpha^2}(2\alpha-1+6\alpha(t-x)-\alpha^2(1+9C_1))^{3/2}+C_2. $$

作为应用，函数

$$ v(x,t)=\mathrm{Re}(u(x,t)),\quad w(x,t)=\mathrm{Im}(u(x,t)) $$

为偏微分方程耦合系统提供了实数值解

$$ \frac{\partial^2v}{\partial t^2}=\alpha\left[\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right], $$

$$ \frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\alpha\left[\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right]. $$

2.5 $X=X_1+X_2+X_3+X_5=\partial/\partial x+\partial/\partial t+(t+1)\partial/\partial u$ 的不变解

$X=\partial/\partial x+\partial/\partial t+(t+1)\partial/\partial u$ 的相似变量为

$$ \xi(x,t)=t-x \text{ 和 } V(\xi)=u+\frac{x}{2}(x-2t-2). $$

因此，方程(6)的解为

$$ u=V(\xi)-\frac{x}{2}(x-2t-2), $$

其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$ -\alpha\left[4+3\xi+3\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\left(-1+\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}\right)\right]+[-1+\alpha(4+3\xi)]\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}=0. $$

上述常微分方程的解，给出了偏微分方程(6)的复数解

$$ u(x,t)=-\frac{1}{216\alpha^2}\{3-96\alpha^2+768\alpha^4+72\alpha t-288\alpha^2t-108\alpha^2t^2- \\ 72\alpha x+72\alpha^2x+54\alpha^2C_1+864\alpha^4C_1+243\alpha^4C_1^2\pm \\ 8\mathrm{i}[8\alpha-1+6\alpha(t-x)-\alpha^2(16+9C_1)]^{3/2}-216\alpha^2C_2\}. $$

因此, 函数

$$v(x,t)=\mathrm{Re}(u(x,t)),\ w(x,t)=\mathrm{Im}(u(x,t))$$

为偏微分方程耦合系统提供了实数值解

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\alpha\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\alpha\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right].$$

2.6 $X=3X_4-X_6=3x\partial/\partial x+(9t/2)\partial/\partial t-x\partial/\partial u$ 的不变解

由 $3x\partial/\partial x+(9t/2)\partial/\partial t-x\partial/\partial u$ 的微分不变式, 意味着, X 的相似变量为

$$\xi(x,t)=\frac{t}{x^{3/2}}\ 和\ V(\xi)=u+\frac{x}{3}.$$

因此, 方程(6) 有形式为 $u=V(\xi)-x/3$ 的解, 且 $V(\xi)$ 由下式确定:

$$8\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}+135\alpha\xi^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+81\alpha\xi^3\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}=0.$$

用 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\xi=F(\xi)$ 代入上述方程的首次积分, 意味着 $V(\xi)$ 满足

$$2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)^{4/5}+9\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)^{9/5}\alpha x^3-C=0.$$

因而, 当 $C=0$ 时, 偏微分方程(6) 的 X– 不变精确解为

$$u(x,t)=-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{9\alpha t^2}+C_1.$$

2.7 $X=X_2+X_4=x\partial/\partial x+(t+1)\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的不变解

计算 $X=x\partial/\partial x+(t+1)\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的微分不变式, 得到 $I_1=(1+t)/x$ 和 $I_2=u/x$. 因此, X 的相似变量为

$$\xi(x,t)=\frac{1+t}{x}\ 和\ V(\xi)=\frac{u}{x}.$$

在方程(6) 中利用相似变量, 给出形式为 $u=xV(\xi)$ 的解, 其中 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}\left\{1-\alpha\xi^2+3\alpha\xi^2\left(-V+\xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)\right\}=0.$$

求解该方程, 给出偏微分方程(6) 的一个 X– 不变的精确解

$$u(x,t)=\frac{x^3-3\alpha(1+t)^2(x-3(1+t)C_1)}{9\alpha(1+t)^2} \tag{9}$$

规定了一个不显示时间相关奇异性的解例.

2.8 $X=X_3+X_4=(x+1)\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的不变解

$X=(x+1)\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 的相似变量为

$$\xi(x,t)=\frac{t}{1+x}\ 和\ V(\xi)=\frac{u}{1+x}.$$

$V(\xi)$ 由下式确定:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2}\left\{1-\alpha\xi^2+3\alpha\xi^2\left(-V+\xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)\right\}=0.$$

因此

$$u(x,t)=\frac{(1+x)^3+3\alpha t^2(-1-x+3tC_1)}{9\alpha t^2}$$

是不变式 $(x+1)\partial/\partial x+t\partial/\partial t+u\partial/\partial u$ 下, 偏微分方程(6) 的一个精确解.

2.9 $X = X_2 + X_3 + X_4 = (x+1)\partial/\partial x + (t+1)\partial/\partial t + u\partial/\partial u$ 的不变解

由 $(x+1)\partial/\partial x + (t+1)\partial/\partial t + u\partial/\partial u$ 的微分不变式, 给出 X 的相似变量为

$$\xi(x, t) = \frac{1+t}{1+x} \text{ 和 } V(\xi) = \frac{u}{1+x}.$$

代入方程(6)简化该问题, 解 $V(\xi)$ 满足常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\xi^2}\left\{1 - \alpha\xi^2 + 3\alpha\xi^2\left(-V + \xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)\right\} = 0.$$

因此

$$u(x, t) = \frac{(1+x)^3 + 3\alpha(1+t)^2(-1-x+3(1+t)C_1)}{9\alpha(1+t)^2} \tag{10}$$

是偏微分方程(6)不带时间相关奇异性的一个精确解.

备注 尽管寻找偏微分方程(6)的精确解有困难, 但多数情形下, 能够成功地将它简化为一阶常微分方程. 这样简化的系统程序将在下面的例题中阐述.

例题 我们利用对称式 $X = X_3 + X_6 = \partial/\partial x - (3t/2)\partial/\partial t + (3u + x)\partial/\partial u$ 简化偏微分方程(6). 相似变量为

$$\xi(x, t) = \mathrm{e}^{3x/2}t \text{ 和 } V(\xi) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}(1 + 9u + 3x).$$

将偏微分方程(6)简化为常微分方程

$$\begin{aligned}&\xi\left[-8 + 81\alpha\xi^2\left(2V + \xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\xi^2} + \\ &\quad 81\alpha\xi\left(2V + \xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)\left(4V + 5\xi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

该方程难以求解, 因此我们利用其对称性作进一步简化. 发现方程(11)的对称代数是一维的, 且由 $X = \xi\partial/\partial\xi - 2V\partial/\partial V$ 得到. 因此 X 的微分不变式无法带来更多的简化, 探索方程(11)在典范坐标系中的表示, 典范坐标和对称 X 相对应. 典范坐标为 $w = \xi^2 V$ 和 $t = \ln\xi$, 所以方程(11)在典范坐标系中表示为

$$-8\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\left(40 + 81\alpha\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right) - 48w = 0. \tag{12}$$

显然, 方程(12)呈现 $X = \partial/\partial t$ 对称, 其相似变量

$$r = w \text{ 和 } y(r) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

将它简化为一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \frac{48r - 40y}{81\alpha y^2 - 8y}.$$

3 初边值问题(IBVPs)及其解的讨论

正如文献[22]强调指出的, 以上得出的大多数解都具有时间相关奇异性. 但是, 方程(7)~(10)所提供的解, 在有限时间内不含时间相关奇异性.

鉴于弹性运动和弹性变形是由初始位移 $u_0(x)$ 和初始速度 $v_0(x)$ 下的偏微分方程(6)所控制. 上一节显示了, 根据物理状况, 将解应用于不同类型的初始条件和边界条件. 下面, 我们提供 IBVPs 的实例, 函数源自方程(8)~(10)中的解, 用于带有 Dirichlet 类型边界条件的 IBVPs 的求解. 我们应用以下形式的初始条件和边界条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = g(t), \tag{15}$$

$$u(L, t) = f(t). \tag{16}$$

有限区域

在有限区域 $0< x < L(t > 0)$ 中考虑偏微分方程 (6), 并结合条件(16). 现在能够得到的解由方程(9)给出, 对 IBVPs 包含条件(16), IBVPs 的解为

$$u(x, t) = \frac{x^3 - L^3 + 3\alpha(3f(t) + L - x)(1 + t)^2}{9\alpha(1 + t)^2}. \tag{17}$$

例如, 当 $f(t) = L^3/(9\alpha(1 + t)^2) - L/3$ 时, 给出 IBVP 的解

$$u(x, t) = \frac{x^3}{9\alpha(1 + t)^2} - \frac{x}{3}.$$

IBVP-1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\left[1 + 3\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ \ t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x),\ u(0, t) = 0,$$

$$u(L, t) = \frac{L^3}{9\alpha(1 + t)^2} - \frac{L}{3},$$

其中 $u_0(x) = x^3/(9\alpha) - x/3,\ v_0(x) = -2x^3/(9\alpha)$.

同样地, 应用条件(13)~(15), 可以得到其相应的解.

半无限区域和无限区域

1) 在半无限区域 $0 < x < \infty(t > 0)$ 中考虑偏微分方程(6), 并结合条件(14). 对条件(14)下的 IBVPs 来说, 解(10)能够如下给出

$$u(x, t) = \frac{(1 + x)^3 + (1 + t)^2(-3\alpha - 3\alpha x + (1 + t)(2 + 6x + 6x^2 + 2x^3 + 9\alpha v_0(x)))}{9\alpha(1 + t)^2}.$$

例如, 当 $v_0(x) = -2(1 + x)^3/(9\alpha)$ 时, 给出 IBVP 的解

$$u(x, t) = \frac{(1 + x)^3}{9\alpha(1 + t)^2} - \frac{1 + x}{3}.$$

IBVP-2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\left[1 + 3\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{2(1 + x)^3}{9\alpha},\ u(0, t) = f(t),$$

其中 $u_0(x) = (1 + x)^3/(9\alpha) - (1 + x)/3,\ f(t) = 1/(9\alpha(1 + t)^2) - 1/3$.

2) 在无限区域 $-\infty < x < \infty(t > 0)$ 中考虑偏微分方程(6), 并结合条件(13). 对条件(13)下的 IBVPs 来说, 解(9)能够如下给出

$$u(x, t) = \frac{3\alpha tx(1 + t)^2 - tx^3(3 + 3t + t^2) + 9\alpha(1 + t)^3 u_0(x)}{9\alpha(1 + t)^2}.$$

例如, 当 $u_0(x) = x^3/(9\alpha) - x/3$ 时, 给出 IBVP 的解

$$u(x, t) = \frac{x^3}{9\alpha(1 + t)^2} - \frac{x}{3}.$$

IBVP-3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\left[1 + 3\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \ t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{x^3}{9\alpha} - \frac{x}{3}, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x),$$

其中 $v_0(x) = -2x^3/(9\alpha)$.

上面给出的 IBVPs 解例, 在有限的时间上, 表明了解(7)~(10) 在不包含时间相关奇异性意义上的物理本质. 然而, 当空间边界设置为无限时, 如象 IBVP-2, IBVP-3, 在空间边界无限远处, 在解为无界的意义上, 显示了解的非物理的特性. 但是, 在某些情形下, 从第 2 节的解, 在无限空间边界上可以得到完整的物理解, 既无时间上的异常, 也不包括无限的运动. 例如, x 沿着直线 $x = \sqrt{3\alpha}(1 + t)$ 变化时, 方程(9) 给出的解 $u(x, t)$, 对于大的 x 值, 也仅在空间边界无限时有界. 事实上, 当 $x \to \pm\infty$ 时, $u(x, t) \to 0$.

致谢 作者感谢沙特阿拉伯 达兰 法赫德国王石油矿产大学的支持, 同时感谢 Hassan Azad 教授许多关于 Lie 对称方法的有益讨论.

[参 考 文 献]

[1] Polyanin A D, Zaitsev V F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations [M]. Boca Raton-London: CRC Press, 2004.

[2] Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1982.

[3] Ames W F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering [M]. Vol 1-2. New York: Academic Press, 1965-1972.

[4] Baumann G. Symmetry Analysis of Differential Equations With Mathematica [M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

[5] Bluman G W, Cole J D. Similarity Methods for Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1974.

[6] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[7] Euler N, Steeb W H. Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations [M]. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1992.

[8] Hansen A G. Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964.

[9] Hydon P E. Symmetry Methods for Differential Equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[10] Ibragimov N H. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol **1**: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws [M]. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[11] Ibragimov N H. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol **2**: Applications in Engineering and Physical Sciences [M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.

[12] Ibragimov N H. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol **3**: New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[13] Ibragimov N H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1999.

[14] Miller W. Symmetry and Separation of Variables [M]. Massachusetts: Addison Wesley, Reading, 1977.

[15] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

[16] Stephani H. Differential Equations. Their Solution Using Symmetries [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[17] Kosevich Y A. Nonlinear sinusoidal waves and their superposition in anharmonic lattices[J]. Phys Rev Lett, 1993, **71**(13): 2058-2061.

[18] Kosevich Y A. A reply to the comment by manuel rogriguez-achach and gabriel perez[J]. Phys Rev Lett, 1997, **79**(23): 4716-4716.

[19] Rodriguez-Achach M, Perez G. Comment on: nonlinear sinusoidal waves and their superposition in anharmonic lattices[J]. Phys Rev Lett, 1997, **79**(23): 4715-4716.

[20] Pouget J. Lattice-dynamics and stability of modulated-strain structures for elastic phase-transitions in alloys[J]. Phys Rev B, 1993, **48**(2): 864-875.

[21] Alfinito E, Causo M S, Profilo G, et al. A class of nonlinear wave equations containing the continuous Toda case[J]. J Phys A, 1998, **31**(9): 2173-2189.

[22] Apostol B F. On a non-linear wave equation in elasticity[J]. Phys Lett A, 2003, **318**(6): 545-552.

[23] Fermi E, Pasta J, Ulam S. Los alamos report LA-1940[A]. In: Segra E, Ed. Collected Papers by Entico Fermi [C]. Vol **2**. Chicago: Unveristy of Chicago Press, 1965, 987.

[24] Bokhari A H, Kara A H, Zaman F D. Exact solutions of some general nonlinear wave equations in elasticity[J]. Nonlinear Dyn, 2007, **48**: 49-54.

[25] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products [M]. New York: Academic Press 1980.

[26] Slater L J. Generalized Hypergeometric Functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

Symmetry Solutions of a Non-Linear Elastic Wave Equation With Third Order Anharmonic Corrections

M. T. Mustafa[1], Khalid Masood[2]

(1. Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran 31261, Saudi Arabia;

2. Department of Mathematics, Hafr Al-Batin Community College, King Fahd University of Petroleum and Minerals, P. O. Box 5087, Dhahran 31261, Saudi Arabia)

Abstract: Lie symmetry method was applied to analyze a non-linear elastic wave equation for longitudinal deformations with third order anharmonic corrections to the elastic energy. Symmetry algebra was found and reductions to second order ODEs were obtained through invariance under different symmetries. The reduced ODEs were further analyzed to obtain several exact solutions in explicit form. Apostol (Apostol B F. On a non-linear wave equation in elasticity. Phys Lett A, 2003, 318(6): 545-552) had observed that anharmonic corrections generally lead to solutions with time-dependent singularities in finite time. Along with solutions with time-dependent singularities are obtained, also solutions which do not exhibit time-dependent singularities were obtained.

Key words: group invariant solution; Lie symmetries; nonlinear elasticity equations; partial differential equations; ordinary differential equations