文章编号: 1000-0887(2009) 07-0865-08

Banach 空间中关于相对非扩张映射和逆强单调映射的强收敛定理*

刘　英

(河北大学 数学与计算机学院, 河北 保定 071002)

(张石生推荐)

摘要:　在 Banach 空间引进一迭代序列来逼近两个集合的公共点, 这两个集合分别是相对非扩张映射的不动点集和关于逆强单调映射的变分不等式的解集. 表明这一迭代序列强收敛到这两个集合的公共点.

关　键　词:　相对非扩张映射;　广义投影;　逆强单调;　变分不等式;　p- 一致凸
中图分类号:　O177.91　　　文献标识码:　A
DOI:　10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.011

引　　言

设 E 是一实 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 表示其范数, E^* 表示 E 的对偶空间, $\langle x, f\rangle$ 表示 $f\in E^*$ 在 $x\in E$ 的值. 假定 C 是 E 的非空闭凸子集, $A: C\to E^*$ 是一单调算子, 我们研究下面的变分不等式问题[1]: 求一点 $u\in C$ 使得

$$\langle v-u, Au\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in C.$$

我们用 $\mathrm{VI}(C,A)$ 表示上述变分不等式的解集. 称算子 $A: C\to E^*$ 为 α-逆强单调[2-3] 的, 如果存在一正数 α 使得

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle\geqslant\alpha\|Ax-Ay\|^2,\qquad \forall x,y\in C.$$

显然, 如果 A 是 α-逆强单调的, 那么它是 $(1/\alpha)$-Lipschitz 连续的.

称映射 $S: C\to E$ 为非扩张的, 如果

$$\|Sx-Sy\|\leqslant\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in C.$$

在 2005 年, Iiduka 和 Takahashi[4] 在 Hilbert 空间为得到非扩张映射的不动点集与关于逆强单调映射的变分不等式的解集的公共点, 建立了一迭代序列, 并得到了强收敛定理. 同一年, Matsushita 和 Takahashi[5] 用杂交方法在 Banach 空间得到一关于相对非扩张映射的强收敛定理. 近来, Iiduka 和 Takahashi[3] 在 2-一致凸的 Banach 空间, 为得到关于算子 A 的变分不等式的解, 证明了一弱收敛定理, 其中 A 满足:

(A1) A 是 α-逆强单调的;

(A2) $\mathrm{VI}(C,A)\neq\varnothing$;

* 收稿日期:　2009-01-21;　修订日期:　2009-05-22
作者简介:　刘英(1977—) , 女, 河北人, 讲师, 硕士(E-mail: ly_cyh2007@yahoo.com.cn).

(A3) $\|Ay\| \leqslant \|Ay - Au\|$ 对所有的 $y \in C$ 和 $u \in VI(C, A)$.

最近, Iiduka 和 Takahashi[2] 在 2- 一致凸的 Banach 空间又用杂交方法证明了一个关于算子 A 的变分不等式的解的强收敛定理, 其中 A 满足(A1) ~ (A3).

受以上事实的启发, 这篇论文的主要目的是在 Banach 空间, 为得到相对非扩张映射的不动点集和关于逆强单调映射的变分不等式的解集的公共点, 用杂交方法建立一迭代序列, 并证明这一序列强收敛到这两个集合的公共点. 我们的结果包括 Matsushita 和 Takahashi[5] 和 Iiduka 和 Takahashi[2] 作为特殊的例子.

1 预 备 知 识

在这篇文章中, 我们总是用 **N** 和 **R** 分别表示正整数集和实数集. 用 $x_n \to x$ 和 $x_n \rightharpoonup x$ 分别表示 $\{x_n\}$ 强收敛和弱收敛到 x.

称具有定义域 $D(T) = \{z \in E: Tz \neq \emptyset\}$ 和值域 $R(T) = \bigcup\{Tz \in E^*: z \in D(T)\}$ 的多值算子 $T: E \to 2^{E^*}$ 为单调的, 如果 $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \geqslant 0$ 对每一个 $x_i \in D(T)$ 和 $y_i \in Tx_i$ 成立, $i = 1, 2$. 称一单调算子 T 是极大单调的, 如果它的图 $G(T) = \{(x, y): y \in Tx\}$ 不是其他任何单调算子的图的真子集.

定义如下函数 $\delta: [0, 2] \to [0, 1]$:

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\|: x, y \in U, \|x - y\| \geqslant \epsilon\right\},$$

称其为 E 的凸性模, 其中 $U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$. 那么 E 是一致凸的充要条件为 $\delta(\epsilon) > 0$ 对所有的 $\epsilon \in (0, 2]$ 成立. 设 $p \geqslant 2$ 为一固定实数, 那么称 Banach 空间 E 是 p- 一致凸的, 如果存在一常数 $c > 0$ 使得 $\delta(\epsilon) \geqslant c\epsilon^p$ 对所有的 $\epsilon \in [0, 2]$ 成立.

引理 1.1[6] 设 $p \geqslant 2$ 为一固定实数, E 是一 Banach 空间, 那么 E 是 p- 一致凸的充要条件为: 存在一常数 $0 < c \leqslant 1$ 使得

$$\frac{1}{2}(\|x + y\|^p + \|x - y\|^p) \geqslant \|x\|^p + c^p\|y\|^p, \qquad \forall x, y \in E. \tag{1}$$

称引理 1.1 中的最佳常数 $1/c$ 为 E 的 p- 一致凸常数. 在式(1) 中, 令 $x = (u + v)/2$ 和 $y = (u - v)/2$, 容易断定, 对所有的 $u, v \in E$,

$$\frac{1}{2}(\|u\|^p + \|v\|^p) \geqslant \left\|\frac{u + v}{2}\right\|^p + c^p\left\|\frac{u - v}{2}\right\|^p. \tag{2}$$

设 $p > 1$, 定义广义对偶映射 $J_p: E \to 2^{E^*}$ 为

$$J_p(x) := \{v \in E^*: \langle x, v\rangle = \|x\|^p, \|v\| = \|x\|^{p-1}\}, \qquad \forall x \in E.$$

特别地, 称 $J = J_2$ 为正规对偶映射. 正规对偶映射 J 有如下性质:

(i) 如果 E 是光滑的, 那么 J 是单值的;

(ii) 如果 E 是严格凸的, 那么 J 是单射;

(iii) 如果 E 是自反的, 那么 J 是满射;

(iv) 如果 E 是一致光滑的, 那么 J 在 E 的每个有界上是依范数一致连续的.

引理 1.2[3] 设 $p \geqslant 2$ 是一给定实数, E 是 p- 一致凸 Banach 空间, 那么, 对所有的 $x, y \in E$, $j_x \in J_p x$ 和 $j_y \in J_p y$,

$$\langle x - y, j_x - j_y\rangle \geqslant \frac{c^p}{2^{p-2}p}\|x - y\|^p,$$

其中 $1/c$ 是 E 的 p- 一致凸常数.

称Banach 空间 E 有K-K 性质,如果 E 中一序列$\{x_n\}$满足:$x_n \rightharpoonup x \in E$ 和 $\|x_n\| \to \|x\|$,有 $x_n \to x$. 众所周知,如果 E 是一致凸的,那么 E 有K-K 性质. 设 E 是一光滑Banach 空间. 定义泛函 $\phi: E \times E \to \mathbf{R}$ 为

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx\rangle + \|x\|^2, \qquad \forall x, y \in E.$$

根据 ϕ 的定义,容易知道

$$(\|y\| - \|x\|)^2 \leqslant \phi(y, x) \leqslant (\|y\| + \|x\|)^2, \qquad \forall x, y \in E. \tag{3}$$

注 1.1 我们很容易知道如果 E 是严格凸和光滑的Banach 空间,那么对 $x, y \in E$, $\phi(y, x) = 0$ 的充要条件是 $x = y$.

引理 1.3[5] 设 E 是一致凸和光滑的Banach 空间,设$\{y_n\}$,$\{z_n\}$是E 中的两个序列. 如果 $\phi(y_n, z_n) \to 0$,$\{y_n\}$或$\{z_n\}$有界,那么 $y_n - z_n \to 0$.

设 C 是E 的非空闭凸子集. 假定 E 是自反、严格凸和光滑的Banach 空间,那么,对任意的 $x \in E$,存在唯一的 $x_0 \in C$ 使得

$$\phi(x_0, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x).$$

定义映射 $\Pi_C: E \to C$ 为 $\Pi_C x = x_0$,称它为广义投影[3,5,7].

引理 1.4[3,5,7] 设 C 是光滑Banach 空间E 的非空闭凸子集,$x \in E$,那么 $x_0 = \Pi_C x$ 的充要条件是

$$\langle x_0 - y, Jx - Jx_0\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C.$$

引理 1.5[3,5,7] 设 E 是自反、严格凸、光滑的Banach 空间,设 C 是E 的非空闭凸子集和 $x \in E$,那么

$$\phi(y, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leqslant \phi(y, x), \qquad \forall y \in C.$$

设 $T: C \to C$ 是一映射,我们用 $F(T)$ 表示 T 的不动点集. 称点 $p \in C$ 是T 的渐近不动点,如果存在$\{x_n\} \subset C$ 弱收敛到p 和 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$. 我们用$\overline{F(T)}$ 表示 T 的渐近不动点集. 根据Matsushita 和Takahashi[5],称映射 $T: C \to C$ 为相对非扩张的,如果满足下面的条件:

(i) $F(T) \neq \emptyset$;

(ii) $\phi(u, Tx) \leqslant \phi(u, x)$, $\forall u \in F(T), x \in C$;

(ii) $\overline{F(T)} = F(T)$.

引理 1.6[5] 设 E 是严格凸和光滑的Banach 空间,设 C 是E 的闭凸子集,设 $T: C \to C$ 是一相对非扩张映射,那么 $F(T)$ 是闭凸集.

设 E 是自反、严格凸、光滑的Banach 空间,设 $J: E \to E^*$ 是对偶映射,那么 J^{-1} 也是单值、单射和满射,它是从 E^* 到 E 的对偶映射. 我们需要下面的映射 V:

$$V(x, x^*) = \|x\|^2 - 2\langle x, x^*\rangle + \|x^*\|^2, \qquad \forall x \in E,\ x^* \in E^*. \tag{4}$$

引理 1.7[3] 设 E 是自反、严格凸、光滑的Banach 空间,那么

$$V(x, x^*) + 2\langle J^{-1}(x^*) - x, y^*\rangle \leqslant$$
$$V(x, x^* + y^*), \qquad \forall x \in E, x^*, y^* \in E^*.$$

我们用 $N_C(v)$ 表示 C 在点 $v \in C$ 的正规锥,即

$$N_C(v) = \{x^* \in E^*: \langle v - y, x^*\rangle \geqslant 0 \text{ 对所有的 } y \in C\}.$$

引理 1.8[8] 设 C 是E 的非空、闭凸子集,$A: C \to E^*$ 是单调、hemi- 连续算子,$T \subset E \times$

E^* 是一如下定义的算子:

$$Tv = \begin{cases} Av + N_C(v), & v \in C, \\ \emptyset, & v \notin C. \end{cases}$$

那么 T 是极大单调的, 而且 $T^{-1}0 = VI(C, A)$.

引理 1.9[3] 设 C 是 E 的非空、闭凸子集, $A: C \to E^*$ 是单调、hemi-连续算子, 那么

$$VI(C, A) = \{u \in C: \langle v - u, Av\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in C\}.$$

很明显, $VI(C, A)$ 是 C 的闭凸子集.

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是一致光滑、2-一致凸的 Banach 空间, C 是 E 的非空、闭凸子集. 假定 $A: C \to E^*$ 满足条件(A1)~(A3). 设 $T: C \to C$ 是一相对非扩张映射, 使得 $F = F(T) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$. 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} x_0 \in C, \quad \text{任意}, \\ w_n = J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)J\Pi_C(J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n))), \\ z_n = \Pi_C w_n, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTz_n), \\ C_n = \{v \in C: \phi(v, y_n) \leqslant \phi(v, x_n)\}, \\ Q_n = \{v \in C: \langle x_n - v, Jx_0 - Jx_n\rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 满足: $0 \leqslant \alpha_n < 1$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$; $0 \leqslant \beta_n < 1$ 和 $\limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$. 如果选择 $\{\lambda_n\}$ 使得 $\lambda_n \in [a, b]$ 对某两个数 a, b 满足 $0 < a < b < c^2\alpha/2$, 那么 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\Pi_F x_0$, 其中 $1/c$ 是 E 的 2-一致凸常数.

证明 首先表明 C_n 和 Q_n 是闭凸集($n = 0, 1, 2, \cdots$). 根据 C_n 和 Q_n 的定义, 很明显, C_n 是闭的, Q_n 是闭、凸的. 下面表明 C_n 是凸的. 既然 $\phi(v, y_n) \leqslant \phi(v, x_n)$ 等价于

$$2\langle v, Jx_n - Jy_n\rangle + \|y_n\|^2 - \|x_n\|^2 \leqslant 0,$$

这意味着 C_n 是凸的. 下一步, 我们表明 $F \subset C_n \cap Q_n$ 对所有的 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 成立. 令 $u_n = J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)$. 设 $p \in F$, 由引理 1.5 和引理 1.7, 我们有

$$\begin{aligned} &\phi(p, \Pi_C u_n) \leqslant \phi(p, u_n) = V(p, Jx_n - \lambda_n Ax_n) \leqslant \\ &\quad V(p, (Jx_n - \lambda_n Ax_n) + \lambda_n Ax_n) - 2\langle J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n) - p, \lambda_n Ax_n\rangle = \\ &\quad V(p, Jx_n) - 2\lambda_n\langle u_n - p, Ax_n\rangle = \\ &\quad \phi(p, x_n) - 2\lambda_n\langle x_n - p, Ax_n\rangle + 2\langle u_n - x_n, -\lambda_n Ax_n\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

对每一个 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 成立. 根据条件(A1) 和 $p \in VI(C, A)$, 我们有

$$\begin{aligned} &-2\lambda_n\langle x_n - p, Ax_n\rangle = -2\lambda_n\langle x_n - p, Ax_n - Ap\rangle - 2\lambda_n\langle x_n - p, Ap\rangle \leqslant \\ &\quad -2\lambda_n\alpha\|Ax_n - Ap\|^2, \end{aligned} \tag{7}$$

对每一个 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 成立. 根据引理 1.2 和条件(A3), 我们有

$$\begin{aligned} &2\langle u_n - x_n, -\lambda_n Ax_n\rangle = 2\langle J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n) - J^{-1}Jx_n, -\lambda_n Ax_n\rangle \leqslant \\ &\quad 2\|J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n) - J^{-1}(Jx_n)\| \|\lambda_n Ax_n\| \leqslant \\ &\quad \frac{4}{c^2}\|Jx_n - \lambda_n Ax_n - Jx_n\| \|\lambda_n Ax_n\| = \end{aligned}$$

$$\frac{4}{c^2}\lambda_n^2\|Ax_n\|^2\leqslant\frac{4}{c^2}\lambda_n^2\|Ax_n-Ap\|^2. \tag{8}$$

因此,由式(7)、(8)和式(6),我们有

$$\phi(p,\Pi_C u_n)\leqslant\phi(p,x_n)+2a\left(\frac{2}{c^2}b-\alpha\right)\|Ax_n-Ap\|^2. \tag{9}$$

那么,根据 $\|\cdot\|^2$ 的凸性和引理 1.5,我们有

$$\begin{aligned}
&\phi(p,z_n)\leqslant\phi(p,w_n)=\\
&\quad\|p\|^2-2\langle p,\beta_n Jx_n+(1-\beta_n)J\Pi_C(J^{-1}(Jx_n-\lambda_n Ax_n))\rangle+\\
&\quad\|\beta_n Jx_n+(1-\beta_n)J\Pi_C u_n\|^2\leqslant\\
&\quad\|p\|^2-2\beta_n\langle p,Jx_n\rangle-2(1-\beta_n)\langle p,J\Pi_C u_n\rangle+\beta_n\|x_n\|^2+\\
&\quad(1-\beta_n)\|\Pi_C u_n\|^2=\\
&\quad\beta_n\phi(p,x_n)+(1-\beta_n)\phi(p,\Pi_C u_n)\leqslant\\
&\quad\phi(p,x_n)+(1-\beta_n)2a\left(\frac{2}{c^2}b-\alpha\right)\|Ax_n-Ap\|^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\phi(p,y_n)=\|p\|^2-2\langle p,\alpha_n Jx_n+(1-\alpha_n)JTz_n\rangle+\\
&\quad\|\alpha_n Jx_n+(1-\alpha_n)JTz_n\|^2\leqslant\\
&\quad\|p\|^2-2\alpha_n\langle p,Jx_n\rangle-2(1-\alpha_n)\langle p,JTz_n\rangle+\\
&\quad\alpha_n\|x_n\|^2+(1-\alpha_n)\|Tz_n\|^2=\\
&\quad\alpha_n\phi(p,x_n)+(1-\alpha_n)\phi(p,Tz_n)\leqslant\\
&\quad\alpha_n\phi(p,x_n)+(1-\alpha_n)\phi(p,z_n)\leqslant\\
&\quad\phi(p,x_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)2a\left(\frac{2}{c^2}b-\alpha\right)\|Ax_n-Ap\|^2\leqslant\\
&\quad\phi(p,x_n).
\end{aligned} \tag{11}$$

这样,我们有 $p\in C_n$. 用与文献[6]的定理 3.1 相同的证明,我们有 $F\subset C_n\cap Q_n$ 对每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立. 这意味着 $\{x_n\}$ 是有意义的. 根据 Q_n 的定义和引理 1.4,有 $x_n=\Pi_{Q_n}x_0$. 用 $x_n=\Pi_{Q_n}x_0$ 和引理 1.5,我们有

$$\phi(x_n,x_0)\leqslant\phi(p,x_0)-\phi(p,x_n)\leqslant\phi(p,x_0),$$

对每一个 $p\in F\subset Q_n$ 和每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立. 因此,$\phi(x_n,x_0)$ 有界. 而且,从式(3),我们有 $\{x_n\}$ 有界.

既然 $x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0\in Q_n$ 和 $x_n=\Pi_{Q_n}x_0$,我们有 $\phi(x_n,x_0)\leqslant\phi(x_{n+1},x_0)$ 对每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立. 因此,$\{\phi(x_n,x_0)\}$ 的极限存在. 从引理 1.5,我们有

$$\phi(x_{n+1},x_n)\leqslant\phi(x_{n+1},x_0)-\phi(x_n,x_0),$$

对每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立. 这意味着 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1},x_n)=0$. 既然 $x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0\in C_n$,从 C_n 的定义,我们有

$$\phi(x_{n+1},y_n)\leqslant\phi(x_{n+1},x_n),$$

对每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立. 令 $n\to\infty$,我们有 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1},y_n)=0$. 用引理 1.3,我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0. \tag{12}$$

从 $\|x_n-y_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-y_n\|$,我们有

$$\|x_n - y_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{13}$$

既然 J 在有界集上依范数一致连续,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|Jx_{n+1} - Jy_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Jx_{n+1} - Jx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Jx_n - Jy_n\| = 0. \tag{14}$$

因此,对每一个 $p \in F$,我们有

$$\begin{aligned}\phi(p, x_n) - \phi(p, y_n) = 2\langle p, Jy_n - Jx_n\rangle + \|x_n\|^2 - \|y_n\|^2 \leqslant \\ 2\|p\| \|Jy_n - Jx_n\| + (\|x_n\| - \|y_n\|)(\|x_n\| + \|y_n\|) \to 0.\end{aligned} \tag{15}$$

另一方面,对每一个 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,我们有

$$\begin{aligned}\|Jx_{n+1} - Jy_n\| = \|\alpha_n(Jx_{n+1} - Jx_n) + (1-\alpha_n)(Jx_{n+1} - JTz_n)\| \geqslant \\ (1-\alpha_n)\|Jx_{n+1} - JTz_n\| - \alpha_n \|Jx_n - Jx_{n+1}\|,\end{aligned}$$

因此

$$\|Jx_{n+1} - JTz_n\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha_n}(\|Jx_{n+1} - Jy_n\| + \|Jx_n - Jx_{n+1}\|).$$

从式(14)和 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$,我们得到

$$\|Jx_{n+1} - JTz_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

既然 J^{-1} 在有界集上也是依范数一致连续,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - Tz_n\| = 0.$$

从

$$\|x_n - Tz_n\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - Tz_n\|,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tz_n\| = 0. \tag{16}$$

从式(11),我们有

$$-(1-\alpha_n)(1-\beta_n)2a\left(\frac{2}{c^2}b - \alpha\right)\|Ax_n - Ap\|^2 \leqslant \phi(p, x_n) - \phi(p, y_n).$$

根据式(15)和 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$, $\limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,我们有

$$\|Ax_n - Ap\| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty. \tag{17}$$

从引理1.5、引理1.7和式(8),对每一个 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,我们有

$$\begin{aligned}\phi(x_n, \Pi_C u_n) \leqslant \phi(x_n, u_n) = \\ \phi(x_n, J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)) = V(x_n, Jx_n - \lambda_n Ax_n) \leqslant \\ V(x_n, Jx_n - \lambda_n Ax_n + \lambda_n Ax_n) - 2\langle J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n) - x_n, \lambda_n Ax_n\rangle = \\ \phi(x_n, x_n) + 2\langle u_n - x_n, -\lambda_n Ax_n\rangle = \\ 2\langle u_n - x_n, -\lambda_n Ax_n\rangle \leqslant \frac{4}{c^2}\lambda_n^2 \|Ax_n - Ap\|^2.\end{aligned}$$

根据式(17),我们得到

$$\phi(x_n, \Pi_C u_n) \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty. \tag{18}$$

应用引理1.3,从式(18)得到

$$\|x_n - \Pi_C u_n\| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty. \tag{19}$$

既然 J 在有界集上依范数一致连续,我们有

$$\|J\Pi_C u_n - Jx_n\| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty. \tag{20}$$

从式(5)和式(20),我们有

$$\|Jw_n - Jx_n\| = (1-\beta_n)\|J\Pi_C u_n - Jx_n\| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty.$$

既然 J^{-1} 在有界集上也是依范数一致连续, 我们有 $\lim_{n\to\infty}\|w_n-x_n\|=0$. 既然

$$\phi(x_n,z_n)\leqslant\phi(x_n,w_n)=\langle x_n,Jx_n-Jw_n\rangle+\langle w_n-x_n,Jw_n\rangle\leqslant$$
$$\|x_n\|\,\|Jx_n-Jw_n\|+\|w_n-x_n\|\,\|w_n\|\to 0,\qquad 当\ n\to\infty,$$

从引理 1.3, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0.\tag{21}$$

从式(21) 和式(16), 我们有

$$\|z_n-Tz_n\|\leqslant\|z_n-x_n\|+\|x_n-Tz_n\|\to 0,\qquad 当\ n\to\infty.\tag{22}$$

因为$\{x_n\}$有界, 那么存在子列$\{x_{n_i}\}$以至于$x_{n_i}\rightharpoonup\hat{x}\in C$. 从式(21), 有 $z_{n_i}\rightharpoonup\hat{x}$. 从式(22)和 T 的定义, 我们有$\hat{x}\in F(T)$. 下一步证明$\hat{x}\in VI(C,A)$. 从式(19), 我们有 $\Pi_C u_{n_i}\rightharpoonup\hat{x}$. 设 $S\subset E\times E^*$ 如下定义:

$$Sv=\begin{cases}Av+N_C(v), & v\in C,\\ \varnothing, & v\notin C.\end{cases}$$

根据引理 1.8, S 是极大单调的, 而且 $S^{-1}0=VI(C,A)$. 设$(v,w)\in G(S)$. 既然$w\in Sv=Av+N_C(v)$, 我们有 $w-Av\in N_C(v)$. 从 $\Pi_C u_n\in C$, 我们得到

$$\langle v-\Pi_C u_n,w-Av\rangle\geqslant 0.\tag{23}$$

另一方面, 从引理 1.4, 我们有 $\langle v-\Pi_C u_n,J\Pi_C u_n-Ju_n\rangle\geqslant 0$, 因此

$$\left\langle v-\Pi_C u_n,\frac{Jx_n-J\Pi_C u_n}{\lambda_n}-Ax_n\right\rangle\leqslant 0.\tag{24}$$

那么从式(23) 和(24), 我们有

$$\langle v-\Pi_C u_n,w\rangle\geqslant\langle v-\Pi_C u_n,Av\rangle\geqslant$$
$$\langle v-\Pi_C u_n,Av\rangle+\left\langle v-\Pi_C u_n,\frac{Jx_n-J\Pi_C u_n}{\lambda_n}-Ax_n\right\rangle=$$
$$\langle v-\Pi_C u_n,Av-Ax_n\rangle+\left\langle v-\Pi_C u_n,\frac{Jx_n-J\Pi_C u_n}{\lambda_n}\right\rangle=$$
$$\langle v-\Pi_C u_n,Av-A\Pi_C u_n\rangle+\langle v-\Pi_C u_n,A\Pi_C u_n-Ax_n\rangle+$$
$$\left\langle v-\Pi_C u_n,\frac{Jx_n-J\Pi_C u_n}{\lambda_n}\right\rangle\geqslant$$
$$-\|v-\Pi_C u_n\|\frac{\|\Pi_C u_n-x_n\|}{\alpha}-\|v-\Pi_C u_n\|\frac{\|J\Pi_C u_n-Jx_n\|}{a}\geqslant$$
$$-M\left(\frac{\|\Pi_C u_n-x_n\|}{\alpha}+\frac{\|J\Pi_C u_n-Jx_n\|}{a}\right),$$

对每一个 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 成立, 其中$M=\sup\{\|v-\Pi_C u_n\|:n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$. 令 $n=n_i$, 从式(19) 和(20), 我们有$\langle v-\hat{x},w\rangle\geqslant 0$ 当 $i\to\infty$. 根据 S 的极大单调性, 我们得到$\hat{x}\in S^{-1}0$, 即$\hat{x}\in VI(C,A)$. 因此, $\hat{x}\in F$.

最后, 表明 $x_n\to\Pi_F x_0$. 设$x=\Pi_F x_0$. 对任意的 $n\in\mathbf{N}$, 从 $x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0$ 和 $x\in F\subset C_n\cap Q_n$, 我们有

$$\phi(x_{n+1},x_0)\leqslant\phi(x,x_0).$$

另一方面, 根据范数的弱下半连续性, 我们有

$$\phi(\hat{x},x_0)=\|\hat{x}\|^2-2\langle\hat{x},Jx_0\rangle+\|x_0\|^2\leqslant$$
$$\liminf_{i\to\infty}(\|x_{n_i}\|^2-2\langle x_{n_i},Jx_0\rangle+\|x_0\|^2)=\liminf_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_0)\leqslant$$
$$\limsup_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_0)\leqslant\phi(x,x_0).$$

根据 $\Pi_F x_0$ 的定义, 我们得到 $\hat{x} = x$, 因此,

$$\lim_{i\to\infty}\phi(x_{n_i}, x_0) = \phi(\hat{x}, x_0).$$

因此, 我们有

$$\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}\| = \|\hat{x}\|.$$

用 E 的 K-K 性质, 我们得到 $x_{n_i} \to \Pi_F x_0$. 因此, $\{x_n\}$ 强收敛到 $\Pi_F x_0$.

注 2.1　在定理 2.1 中, 令 $A = 0$, 我们可以得到文献[5] 中的定理 3.1.

注 2.2　在定理 2.1 中, 令 $\{\alpha_n\} = \{0\}$, $\{\beta_n\} = \{0\}$ 和 $T = I$, $\{\lambda_n\} \subset [a, c^2\alpha/2]$, 其中 a 满足 $0 < a \leqslant c^2\alpha/2$, 那么我们可以得到文献[2] 中的注 3.4.

注 2.3　在定理 2.1 中, 取 $C = E$, $\{\alpha_n\} = \{0\}$, $\{\beta_n\} = \{0\}$ 和 $T = I$, $\{\lambda_n\} \subset [a, c^2\alpha/2]$, 其中 a 满足 $0 < a \leqslant c^2\alpha/2$, 那么我们可以得到文献[2] 中的定理 3.3.

[参　考　文　献]

[1] Lions J L, Stampacchia G. Variational inequalities[J]. Comm Pure Appl Math, 1967, **20**(3): 493-517.

[2] Iiduka H, Takahashi W. Strong convergence studied by a hybrid type method for monotone operators in a Banach space[J]. Nonlinear Analysis, 2008, **68**(12): 3679-3688.

[3] Iiduka H, Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space[J]. J Math Anal Appl, 2008, **339**(1): 668-679.

[4] Iiduka H, Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings[J]. Nonlinear Analysis, 2005, **61**(4): 341-350.

[5] Matsushita S Y, Takahashi W. A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space[J]. Journal of Approximation Theory, 2005, **134**(2): 257-266.

[6] Ball K, Carlen E A, Lieb E H. Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms [J]. Invent Math, 1994, **115**(1): 463-482.

[7] Alber Y I, Reich S. An iterative method for solving a class of nonlinear operator equations in Banach spaces[J]. Panamer Math J, 1994, **4**(2): 39-54.

[8] Rockafellar R T. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators[J]. Trans Amer Math Soc, 1970, **149**(1): 75-88.

Strong Convergence Theorems for Relatively Nonexpansive Mappings and Inverse-Strongly-Monotone Mappings in a Banach Space

LIU Ying

(College of Mathematics and Computer, Hebei University, Baoding, Hebei 071002, P.R.China)

Abstract: An iterative sequence is introduced for finding a common element of the set of fixed points of a relatively nonexpansive mapping and the set of solutions of the variational inequality for an inverse-strongly-monotone mapping in a Banach space. Then it is shown that the sequence converges strongly to a common element of two sets. Results improve and extend the corresponding results announced by many others.

Key words: relatively nonexpansive mapping; generalized projection; inverse-strongly-monotone; variational inequality; p-uniformly convex