文章编号: 1000-0887(2009) 07-0847-09

© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

拓扑空间中的非空交定理及其应用*

方 敏[1], 黄南京[2]

(1. 西南财经大学 经济数学系, 成都 610074;
2. 四川大学 数学系, 成都 610064)

(协平推荐)

摘要: 在拓扑空间中, 建立了广义 L-KKM 映射新的非空交定理, 同时证明了集值映射的不动点定理. 作为应用, 得到了上下界(拟) 平衡问题的存在定理. 其结果推广了最近文献中的结论.

关 键 词: 广义 L-KKM 映射; α-β- 广义 L- 对角拟子空间; 转移紧闭值; 不动点; 上下界(拟) 平衡问题

中图分类号: O177.91; O177.99 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.009

引 言

1929 年, Knaster, Kuratowski 和 Mazurkiewiez[1] 首次在有限维空间中建立了 KKM 定理. 1961 年, Fan[2] 将 KKM 定理推广到了无限维拓扑向量空间并给出了应用. 自此以后, 对 KKM 理论的研究快速发展成为非线性分析中的重要学科. 在很多著名的 KKM 定理和应用中, 凸性的假设扮演了很重要的角色, 这也严格地限制了 KKM 性质的应用范围. 1987 年, Horvath[3] 用可缩集代替了凸包, 给出了纯拓扑意义下的 KKM 定理. 在 Horvath 工作的激励下, Park 和 Kim[4-5] 引入了广义凸(G-凸) 空间并证明了在此空间中的 KKM 定理. 接着, Deng 和 Xia[6] 证明了在拓扑空间中没有任何凸性的广义 R-KKM 型定理. 最近, Fang 和 Huang[7] 定义了一种新的广义 L-KKM 型映射, 同时证明了在没有任何凸结构的拓扑空间中新的广义 L-KKM 型定理. 近年来, 有关 KKM 性质和应用的结论已被很多学者研究(例如文献[8-18] 及其参考文献).

另一方面, 1999 年 Isac, Sechgal 和 Singh[19] 提出以下公开问题: 在局部凸自反拓扑向量空间中, 给定一个非空闭子集 K, 泛函 $f: K\times K\to \mathbf{R}$ 和两个实数 $\alpha<\beta$, 在什么样的条件下存在 $\hat{x}\in K$ 使得

$$\alpha\leqslant f(\hat{x}, y)\leqslant\beta,\qquad \forall y\in K,$$

这称为上下界平衡问题. Chadli, Chiang 和 Yao[20], Li[21] 已经在拓扑向量空间中用不同的方法解决了该问题.

---

* 收稿日期: 2008-09-12; 修订日期: 2009-05-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671135); 国家自然科学基金(重点) 资助项目(70831005); 高校博士基金资助项目(20060610005); 教育部重点资助项目(109140)

作者简介: 方敏(1980—), 女, 重庆人, 讲师(Tel: + 86-28-81903018; E-mail: fangmingracie@163.com);
黄南京(1962—), 男, 江西石城人, 教授(联系人. E-mail: nanjinghuang@hotmail.com).

设 α, β 是两个实数且 $\alpha < \beta$, 上下界的拟平衡问题就是找到一点 $\hat{x} \in X$, 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和

$$\alpha \leqslant f(\hat{x}, y) \leqslant \beta, \qquad \forall y \in A(\hat{x}).$$

本文主要在文献[7]的基础上建立了两个非空交定理, 并在拓扑空间的适当条件下证明了两个集值映射的不动点定理. 作为应用, 得到了上下界(拟)平衡问题的存在定理. 我们的结论推广了已有文献的重要定理.

1 预备知识

令 X 和 Y 是非空集. 我们将分别用 2^Y 和 $\langle X\rangle$ 表 Y 的一切子集的簇和 $\langle X\rangle$ 的一切非空有限子集的簇. 对任何 $A \in \langle X\rangle$, $|A|$ 表 A 的基数. 令 Δ_n 是具有顶点 $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ 的 n-维标准单形. 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, 我们用 Δ_J 表顶点集 $\{e_j : j \in J\}$ 的凸包.

以下定义由 Ding[8] 引入. X 是拓扑空间和 A 是 X 的非空子集, 称 A 在 X 内是紧开(紧闭)的, 如果对 X 的每一非空紧子集 K, $A \cap K$ 在 K 内是开(闭)的. 给定 X 的子集 A, 分别用 $\mathrm{ccl}(A)$ 和 $\mathrm{cint}(A)$ 表示 A 的紧闭包和紧内部

$$\mathrm{ccl}(A) = \bigcap\{B \subset X: A \subset B \text{ 且 } B \text{ 在 } X \text{ 中是紧闭的}\},$$

$$\mathrm{cint}(A) = \bigcup\{B \subset X: B \subset A \text{ 且 } B \text{ 在 } X \text{ 中是紧开的}\},$$

很容易验证 $\mathrm{cint}(A)$(或 $\mathrm{ccl}(A)$) 在 X 中是紧开的(紧闭的). 对任意 X 的非空紧子集 K 且 $A \cap K \neq \varnothing$, 有

$$\mathrm{ccl}(A) \cap K = \mathrm{cl}_K(A \cap K), \quad \mathrm{cint}(A) \cap K = \mathrm{int}_K(A \cap K),$$

其中 $\mathrm{cl}_K(A \cap K)$ 和 $\mathrm{int}_K(A \cap K)$ 分别表示在 K 中 $A \cap K$ 的闭包和内部. 易知 X 的子集 A 是紧开的(紧闭的) 当且仅当 $\mathrm{cint}(A) = A(\mathrm{ccl}(A) = A)$. 设 X 是集合和 Y 是拓扑空间. 称映射 $G: X \to 2^Y$ 在 X 上是转移紧开值(转移紧闭值), 如果 $x \in X$ 和对每一 Y 的非空紧子集 K 且 $G(x) \cap K \neq \varnothing$, $y \in G(x) \cap K(y \notin G(x) \cap K)$ 可以推出存在一点 $x' \in X$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(G(x') \cap K)(y \notin \mathrm{cl}_K(G(x') \cap K))$. 很明显, 每一个开映射(闭映射) $G: X \to 2^Y$ 是转移开值(转移闭值), (参见文献[22] 定义 6 和 7) (其中 X 假设为拓扑空间) 同时也是紧开值(紧闭值). 每一个转移开(转移闭) 映射 $G: X \to 2^Y$ 也是转移紧开值(转移紧闭值), 但逆命题不成立.

称映射 $G: X \to 2^Y$ 在 X 中有紧局部交性质, 如果对 X 的每一非空紧子集 K 和对每一 $x \in K$ 且 $G(x) \neq \varnothing$, 存在一个 X 的开邻域 $N(x)$, 使得 $\bigcap_{z \in N(x) \cap K} G(z) \neq \varnothing$ (见文献[23]).

设 X 和 Y 是拓扑空间, 称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 在 X 上是上半连续的(u.s.c), 如果对 Y 的每一开子集 U, 集 $\{x \in X: T(x) \subseteq U\}$ 在 X 中是开的. 称 T 在 X 上是下半连续的(l.s.c), 如果对 Y 的每一开子集 U, 集 $\{x \in X: T(x) \cap U \neq \varnothing\}$ 在 X 中是开的.

定义 1.1[7] 设 X 是非空集和 Y 是拓扑空间. 称集值映射 $G: X \to 2^Y$ 是广义 L-KKM 映射, 如果对每一个 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$(在 N 中有些元素可能是相同的), 存在一个下半连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 使得对每一 $\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\} \subset \{e_0, \cdots, e_n\}$,

$$\varphi_N(\Delta_k) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j}),$$

其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\})$.

如果 $X = Y$, 则广义 L-KKM 映射称为 L-KKM 映射.

注 1.1 广义 L-KKM 映射将 Deng 和 Xia 在文献[6] 中的广义 R-KKM 映射从单值映射推广到了下半连续集值映射. 同时广义 L-KKM 映射统一和推广了 Verma 在文献[16] 中的广义 R-KKM 映射、Ding 在文献[8] 中的

广义 G-KKM 映射、Ding 在文献[10] 中的广义 L-KKM 映射以及 Ding 在文献[9] 中的广义 H-KKM 映射.

定义 1.2[7] 设 Y 是拓扑空间和 X 是非空集. 称 Y 的子集 D 是 L- 子空间, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$(在 N 中有些元素可能是相同的), 存在一个下半连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 使得 $\varphi_N(\Delta_n) \subseteq D$.

定义 1.3 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, $g: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. 对某些 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 且 $\alpha \leqslant \beta$, 称 $g(x, y)$ 是 X 中的 α-β- 广义 L- 对角拟子空间, 如果对任意 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$, 存在下半连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 使得对任意 $\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\}$ 和每一 $y_0 \in \varphi_N(\Delta_k)$, 存在 $r \in \{0, \cdots, k\}$ 满足 $\alpha \leqslant g(x_{i_r}, y_0) \leqslant \beta$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\})$.

注 1.2 定义 1.3 是文献[6] 中定义 2.4 的推广.

引理 1.1[23] 设 Y 和 X 是两个拓扑空间, $G: Y \to 2^X$ 是集值映射且在 Y 的每一紧子集上是非空的, 则下列条件是等价的:

(Ⅰ) G 有紧局部交性质;

(Ⅱ) 对每一 Y 的紧子集 K 和对每一 $x \in X$, 存在 Y 的开子集 O_x(对某些 $x \in X$, 此开子集可能是空的) 使得 $O_x \cap K \subseteq G^{-1}(x)$ 和 $K = \bigcup_{x \in X}(O_x \cap K)$;

(Ⅲ) 对每一 Y 的紧子集 K, 存在集值映射 $F: Y \to 2^X$ 使得对每一 $x \in X$, $F^{-1}(x)$ 在 Y 中是开的或是空的, $F^{-1}(x) \cap K \subset G^{-1}(x)$ 和 $K = \bigcup_{x \in X}(F^{-1}(x) \cap K)$;

(Ⅳ) 对每一 Y 的紧子集 K 和对每一 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $y \in \mathrm{cint}\, G^{-1}(x) \cap K$ 和 $K = \bigcup_{x \in X}(\mathrm{cint}\, G^{-1}(x) \cap K)$;

(Ⅴ) $G^{-1}: X \to 2^Y$ 在 X 中是转移紧开值的.

引理 1.2[7] 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, $G: X \to 2^Y$ 是广义 L-KKM 映射且是非空紧闭的, K 是 Y 的紧 L- 子空间, 使得对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$(在 N 中有些元素可能是相同的), 有 $\varphi_N(\Delta_n) \subseteq \varphi_N(\Delta_n)$, 其中 $\Delta_n = \mathrm{co}(\{e_0, \cdots, e_n\})$ 和 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射. 则

$$K \cap (\cap_{x \in X} G(x)) \neq \varnothing.$$

引理 1.3[7] 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, K 是 Y 的紧子集, $G: X \to 2^Y$ 是广义 L-KKM 映射且具有非空紧闭值, $S: X \to 2^Y$ 是集值映射且满足:

(ⅰ) 存在 Y 的紧 L- 子空间 L_M 使得对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$(在 N 中有些元素可能是相同的) 和 $N \subset S^{-1}(L_M)$, 有

$$L_M \cap \Big(\bigcap_{x \in S^{-1}(L_M)} G(x) \Big) \subset K,$$

且 $\varphi_N(\Delta_n) \subseteq \varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n = \mathrm{co}(\{e_0, \cdots, e_n\})$ 都成立, 其中 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则 $K \cap (\cap_{x \in X} G(x)) \neq \varnothing$.

引理 1.4[24] 设 X, Y 是拓扑空间, $\Psi, \Phi: X \to 2^Y$ 是两个集值映射且 D 是 X 的闭子集. 假设 $\Psi^{-1}, \Phi^{-1}: Y \to 2^X$ 具有紧开下截口以及 $\Phi(x) \subset \Psi(x)$ 对每一 $x \in X$ 成立, 则映射 $G: X \to 2^Y$ 定义如下:

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in D, \\ \Psi(x), & x \notin D, \end{cases}$$

使得 $G^{-1}: Y \to 2^X$ 且 $G^{-1}(y)=\{x\in X: y\in G(x)\}$ 也是转移紧开值.

2 非空交定理

定理 2.1 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, $G: X\to 2^Y$ 是广义 L-KKM 映射且具有非空转移紧闭值, K 是 Y 的紧 L- 子空间, 使得对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ (在 N 中有些元素可能是相同的), $\varphi_N(\Delta_n)\subseteq\varphi_N(\Delta_n)$, 其中 $\Delta_n=\mathrm{co}(\{e_0,\cdots,e_n\})$ 和 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n\to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射. 则

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

证明 因为 G 是广义 L-KKM 映射和 $G(x)\subset \mathrm{ccl}G(x)$, 则如下定义映射 $\mathrm{ccl}G: X\to 2^Y$ 且 $(\mathrm{ccl}G)(x)=\mathrm{ccl}G(x)$ 是广义 L-KKM 映射且具有非空紧闭值. 由引理 1.2 可以推出

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

现在我们证明

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)=K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right).$$

显然

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right)\subset K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right).$$

如果

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)\supsetneq K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right),$$

则存在 $y\in K\cap(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x))=\bigcap_{x\in X}\mathrm{cl}_K(G(x)\cap K)$, 但对任意 $x\in X$, $y\notin G(x)\cap K$. 因为 G 是转移紧闭的, 存在 $x'\in X$ 使得 $y\notin\mathrm{cl}_K(G(x')\cap K)$, 这与定义相矛盾. 因此可以推得

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)=K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

定理 2.2 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, K 是 Y 的紧子集, $G: X\to 2^Y$ 是广义 L-KKM 映射且具有非空转移紧闭值, $S: X\to 2^Y$ 是集值映射满足下面条件:

(i) 存在 Y 的紧 L- 子空间 L_M 使得对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ (在 N 中有些元素可能是相同的) 和 $N\subset S^{-1}(L_M)$, 有

$$L_M\cap\left(\bigcap_{x\in S^{-1}(L_M)}\mathrm{ccl}G(x)\right)\subset K,$$

且 $\varphi_N(\Delta_n)\subseteq\varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n=\mathrm{co}(\{e_0,\cdots,e_n\})$ 都成立, 其中 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n\to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

证明 因为 G 是广义 L-KKM 映射和 $G(x)\subset\mathrm{ccl}G(x)$. 如下定义映射 $\mathrm{ccl}G: X\to 2^Y$ 且 $(\mathrm{ccl}G)(x)=\mathrm{ccl}G(x)$ 也是广义 L-KKM 且具有非空紧闭值. 由引理 1.3, 可以推得

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

根据定理 2.1 的证明过程, 我们可以知道

$$K\cap\left(\bigcap_{x\in X}\mathrm{ccl}G(x)\right)=K\cap\left(\bigcap_{x\in X}G(x)\right)\neq\emptyset.$$

注 2.1 定理 2.2 在以下方面推广了 Deng 和 Xia 在文献[6]中的定理 3.5: 1) 从广义 R-KKM 映射推广到广义 L-KKM 映射; 2) Y 的紧性条件被去掉; 3) 定理 2.2 中的条件比文献[6]定理 3.3 的条件要弱一些.

定理 2.3 设 X 是拓扑空间, K 是 X 的紧子集, $G: X \to 2^X$ 是集值映射使得

(i) 对每一 $x \in X$, $G(x)$ 是 X 的非空 L- 子空间;

(ii) 对每一 $y \in X$, $G^{-1}(y)$ 是转移紧开值的;

(iii) 存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N \subset L_M$ 使得对每一 $x \in L_M \setminus K$, 存在 $y \in L_M$ 满足 $x \in \operatorname{cint} G^{-1}(y)$ 且 $\varphi_N(\Delta_n) \subseteq \varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n = \operatorname{co}(\{e_0, \cdots, e_n\})$ 都成立, 其中 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则存在一点 $\hat{x} \in K$ 使得 $\hat{x} \in G(\hat{x})$.

证明 令 $T(y) = X \setminus G^{-1}(y)$, 假设 T 是 L-KKM 映射. 则条件(ii) 意味着 $T(y)$ 是转移紧闭的, 由(iii), 存在紧 L- 子空间 L_M 且 $N \subset L_M$, 则

$$L_M \cap \left(\bigcap_{y \in L_M} \operatorname{ccl} T(y) \right) \subset K.$$

由定理 2.2 可以知道

$$K \cap \left(\bigcap_{y \in X} T(y) \right) \neq \emptyset.$$

任取 $\hat{x} \in K \cap (\bigcap_{y \in X} T(y))$, 则有 $\hat{x} \in K$ 和 $\hat{x} \in T(y)$, 对任意 $y \in X$ 都成立. 因此, $\hat{x} \in X \setminus G^{-1}(y)$, 即 $y \notin G^{-1}(\hat{x})$ 对每一 $y \in X$ 成立, 这与 $G(x) \neq \emptyset$ 相矛盾. 故 T 不是 L-KKM 映射, 则存在 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle X \rangle$ 使得对任意下半连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to 2^X$, 存在 $\{e_{i0}, \cdots, e_{in}\} \subset \{e_0, \cdots, e_n\}$ 使得 $\hat{x} \in \varphi_N(\Delta_k)$ 和 $\hat{x} \notin \bigcup_{i=0}^{k} T(y_i)$. 可以推出

$$\hat{x} \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{k} T(y_i) = \bigcap_{i=0}^{k} (X \setminus T(y_i)) = \bigcap_{i=0}^{k} G^{-1}(y_i).$$

那么 $\hat{x} \in G^{-1}(y_i)$, 对每一 $i = \{0, \cdots, k\}$ 成立, 也就是 $y_i \in G(\hat{x})$. 因此 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \subset G(\hat{x})$. 由(i) 可以推出 $\hat{x} \in \varphi_N(\Delta_k) \subseteq \varphi_N(\Delta_k) \subset G(\hat{x})$.

注 2.2 定理 2.3 在以下方面推广了丁协平在文献[24] 中的定理 1.1: 1) 从 G- 凸空间推广到一般拓扑空间; 2) 从 G- 凸空间推广到 L- 子空间. 定理 2.3 同时也推广了 Lin 和 Park 在文献[25] 中的定理 2.

定理 2.4 设 X 是拓扑空间, K 是 X 的紧子集, $G, F: X \to 2^X$ 是集值映射, 使得

(i) 对每一 $x \in X$, $F(x) \subset G(x)$;

(ii) 对每一 $x \in X$, $F(x)$ 是 X 的非空 L- 子空间和 $F^{-1}(y)$ 具有转移紧开值;

(iii) 存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N \subset L_M$, 使得对每一 $x \in L_M \setminus K$, 存在 $y \in L_M$ 满足 $x \in \operatorname{cint} F^{-1}(y)$ 且 $\varphi_N(\Delta_n) \subseteq \varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n = \operatorname{co}(\{e_0, \cdots, e_n\})$ 都成立, 其中 φ_N, $\varphi_N: \Delta_n \to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则存在一点 $\hat{x} \in K$ 使得 $\hat{x} \in G(\hat{x})$.

证明 由(i)和(ii), 可以推得 $G(x)$ 是 X 的 L- 子空间和 $G^{-1}(y)$ 是转移紧开的. 由(iii) 可以推出存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N \subset L_M$, 使得对每一 $x \in L_M \setminus K$, 存在 $y \in L_M$ 满足 $x \in \operatorname{cint} F^{-1}(y) \subset \operatorname{cint} G^{-1}(y)$. 由定理 2.3, 存在一点 $\hat{x} \in K$ 使得 $\hat{x} \in G(\hat{x})$.

注 2.3 如果 $F \equiv G$, 则定理 2.4 退化成定理 2.3. 事实上, 定理 2.4 和定理 2.3 是等价的. 很容易看出定理 2.4 在应用上比定理 2.3 更方便.

3 应　　用

作为第 2 节的应用, 我们证明了上下界(拟) 平衡问题解的存在定理.

定理 3.1 设 X 是非空集, Y 是拓扑空间, K 是 Y 的 L- 子空间, 使得对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ (在 N 中有些元素可能是相同的), $\varphi_N(\Delta_n)\subseteq\varphi_N(\Delta_n)$, 其中 $\Delta_n=\mathrm{co}(\{e_0,\cdots,e_n\})$ 和 φ_N, $\varphi_N:\Delta_n\to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射. α 和 β 是两个实数且 $\alpha\leqslant\beta$. 设 $f,g:X\times Y\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是两个泛函使得

(i) 对每一 $(x,y)\in X\times Y$, $\alpha\leqslant g(x,y)\leqslant\beta$ 可以推出 $\alpha\leqslant f(x,y)\leqslant\beta$;

(ii) 如下定义映射 $G:X\to 2^Y$ 且 $G(x)=\{y\in Y:\alpha\leqslant f(x,y)\leqslant\beta\}$, $\forall x\in X$ 有转移紧闭值;

(iii) $g(x,y)$ 是 y 中的 α-β 广义 L- 对角拟子空间.

则存在 $\hat{y}\in K$ 使得

$$\alpha\leqslant f(x,\hat{y})\leqslant\beta,\qquad\forall x\in X.$$

证明 如下定义集值映射 $F:X\to 2^Y$

$$F(x)=\{y\in Y:\alpha\leqslant g(x,y)\leqslant\beta\},\qquad\forall x\in X.$$

由(i)可以得到 $F(x)\subseteq G(x)$, $\forall x\in X$. 由(iii), 对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$, 存在下半连续映射 $\varphi_N:\Delta_n\to 2^Y$, 使得对每一 $\{e_{i_0},\cdots,e_{i_k}\}\subset\{e_0,\cdots,e_n\}$ 和任意 $y_0\in\varphi_N(\Delta_k)$, 存在 $r\in\{0,\cdots,k\}$ 满足 $\alpha\leqslant g(x_{i_r},y_0)\leqslant\beta$. 可以推出

$$y_0\in\{y\in Y:\alpha\leqslant g(x_{i_r},y)\leqslant\beta\}=F(x_{i_r})\subset\bigcup_{j=0}^{k}G(x_{i_j}),$$

则

$$\varphi_N(\Delta_k)\subset\bigcup_{j=0}^{k}G(x_{i_j}).$$

这意味着 G 是广义 L-KKM 映射. 由(ii)知 G 有转移紧闭值. 由定理 2.1 易知

$$K\cap\Big(\bigcap_{x\in X}G(x)\Big)\neq\varnothing.$$

任取 $\hat{y}\in K\cap(\bigcap_{x\in X}G(x))$, 则存在 $\hat{y}\in K$ 使得

$$\alpha\leqslant f(x,\hat{y})\leqslant\beta,\qquad\forall x\in X.$$

注 3.1 定理 3.1 将 Li 在文献[21]中的定理 3.1 从拓扑向量空间推广到了没有任何凸结构的拓扑空间.

定理 3.2 设 X 是拓扑空间, K 是 X 的紧子集, $A:X\to 2^X$ 是集值映射. 设 α, β 是实数且 $\alpha\leqslant\beta$ 和 $f,g_1,g_2:X\times X\to\mathbf{R}$. 假设下面条件满足:

(i) 对每一 $x\in X$, $A(x)$ 是非空 L- 子空间且具有紧局部交性质;

(ii) $E=\{x\in X:x\in A(x)\}$ 在 X 中是闭的;

(iii) 定义 $B:X\to 2^X$ 且 $B(x)=\{y\in A(x):f(x,y)<\alpha$ 或 $f(x,y)>\beta\}$ 是 L- 子空间及具有紧局部交性质;

(iv) 对每一 $x\in A(x)$, $g_1(x,x)\geqslant\alpha$ 和 $g_2(x,x)\leqslant\beta$;

(v) 对每一 $x\in A(x)$, $\{y\in X:f(x,y)<\alpha$ 或 $f(x,y)>\beta\}\subset\{y\in X:g_1(x,y)<\alpha$ 或 $g_2(x,y)>\beta\}$;

(vi) 存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N\subset L_M$, 使得对每一 $x\in L_M\setminus K$, 如果 $x\notin E$, 则存在 $y\in L_M$ 满足 $x\in\mathrm{cint}A^{-1}(y)$; 如果 $x\in E$, 则存在 $y\in L_M$ 使得 $x\in\mathrm{cint}\{x\in A^{-1}(y):f(x,y)<\alpha$ 或 $f(x,y)>\beta\}$ 且 $\varphi_N(\Delta_n)\subseteq\varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n=\mathrm{co}(\{e_0,\cdots,e_n\})$ 都成立, 其中 φ_N, $\varphi_N:\Delta_n\to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则存在一点 $\hat{x}\in A(\hat{x})$ 使得 $\alpha\leqslant f(\hat{x},y)\leqslant\beta$, $\forall y\in A(\hat{x})$.

证明　如下定义两个集值映射 $G, F: X \to 2^X$,

$$F(x)=\begin{cases}B(x), & x\in E,\\ A(x), & x\notin E;\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}A(x)\cap P(x), & x\in E,\\ A(x), & x\notin E,\end{cases}$$

其中

$$P(x)=\left\{y\in Y: g_1(x,y)<\alpha\text{ 或 }g_2(x,y)>\beta\right\}.$$

由(ⅴ), $B(x)\subset A(x)\cap P(x)$. 则 $F(x)\subset G(x)$, 对每一 $x\in X$ 成立. 假设对每一 $x\in E, B(x)\neq \emptyset$. 则对任意 $x\in X$, $F(x)\neq\emptyset$. 由(ⅰ)、(ⅲ) 和引理 1.1, 可以推出映射 B^{-1}, $A^{-1}: X\to 2^X$ 在 X 上都是转移紧开的. 由引理 1.4, $F^{-1}: X\to 2^X$ 也是转移紧开的和 $F(x)$ 是 L- 子空间. 从(ⅵ) 可以推得存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N\subset L_M$, 使得对每一 $x\in L_M\setminus K$, 如果 $x\notin E$, 则存在 $y\in L_M$ 满足 $x\in \operatorname{cint}A^{-1}(y)=\operatorname{cint}F^{-1}(y)$; 如果 $x\in E$, 则存在 $y\in L_M$ 使得 $x\in\operatorname{cint}B^{-1}(y)=\operatorname{cint}F^{-1}(y)$. 由定理 2.4, 存在一点 $\hat{x}\in K$ 使得 $\hat{x}\in G(\hat{x})$. 由 E 和 G 的定义可知 $\hat{x}\in E$ 和

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\cap P(\hat{x})\subset\left\{y\in Y: g_1(\hat{x},y)<\alpha\text{ 或 }g_2(\hat{x},y)>\beta\right\}.$$

由此推得 $g_1(\hat{x},\hat{x})<\alpha$ 或 $g_2(\hat{x},\hat{x})>\beta$ 与条件(ⅳ) 相矛盾. 因此, 存在一点 $\hat{x}\in E$ 使得

$$B(\hat{x})=A(\hat{x})\cap\left\{y\in X: f(\hat{x},y)<\alpha\text{ 或 }f(\hat{x},y)>\beta\right\}=\emptyset.$$

因此

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\text{ 和 }\alpha\leqslant f(\hat{x},y)\leqslant\beta,\qquad \forall y\in A(\hat{x}).$$

如 $g_1\equiv g_2\equiv f$, 则由定理 3.2, 我们可以得到以下结论.

定理 3.3　设 X 是拓扑空间, K 是 X 的紧子集, $A: X\to 2^X$ 是集值映射. 设 α, β 是实数且 $\alpha\leqslant\beta$ 和 $f: X\times X\to \mathbf{R}$ 使得

(ⅰ) 对每一 $x\in X, A(x)$ 是非空 L- 子空间且具有紧局部交性质;

(ⅱ) $E=\left\{x\in X: x\in A(x)\right\}$ 是闭的;

(ⅲ) 定义映射 $B: X\to 2^X$ 且 $B(x)=\left\{y\in A(x): f(x,y)<\alpha\text{ 或 }f(x,y)>\beta\right\}$ 是 L- 子空间及具有紧局部交性质;

(ⅳ) 对每一 $x\in A(x), \alpha\leqslant f(x,x)\leqslant\beta$;

(ⅴ) 存在 X 的紧 L- 子空间 L_M 且 $N\subset L_M$, 使得对任意 $x\in L_M\setminus K$, 如果 $x\notin E$, 则存在 $y\in L_M$ 满足 $x\in\operatorname{cint}A^{-1}(y)$, 如果 $x\in E$, 则存在 $y\in L_M$ 使得 $x\in\operatorname{cint}\left\{x\in A^{-1}(y): f(x,y)<\alpha\text{ 或 }f(x,y)>\beta\right\}$ 和 $\varphi_N(\Delta_n)\subseteq\varphi_N(\Delta_n)$ 对 $\Delta_n=\operatorname{co}(\left\{e_0,\cdots,e_n\right\})$ 都成立, 其中 $\varphi_N, \varphi_N: \Delta_n\to 2^Y$ 分别是定义 1.1 和定义 1.2 中与 N 相关的下半连续映射.

则存在一点 $\hat{x}\in A(\hat{x})$ 使得 $\alpha\leqslant f(\hat{x},y)\leqslant\beta$, $\forall y\in A(\hat{x})$.

注 3.2　定理 3.2 和 3.3 推广了丁协平的文献[24] 的定理 4.1、Lin 和 Park 的文献[25] 的定理 4. 定理 3.2 同时将 Chadli, Chiang 和 Yao 的文献[20] 中的定理 2.2 推广到了没有任何凸结构的拓扑空间.

致谢　作者感谢编辑和审稿人提出的宝贵意见.

[参　考　文　献]

[1] Knaster B, Kuratowski K, Mazurkiewiez S. Ein beweis des fixpunksates fur n-dimensional simplexe [J]. Fund Math, 1929, **14**: 132-137.

[2] Fan K. A generalized of Tychonoff' s fixed point theorem[J]. Math Ann, 1961, **142**(3): 303-310.

[3] Horvath C. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[A]. In: Lin B L, Simons S, Eds. Nonlinear and Convex Analysis[C]. Lecture Notes in Pure and Appl Math. Vol **106**. New York: Dekker, 1987, 99-106.

[4] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173-187.

[5] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 551-571.

[6] Deng L, Xia X. Generalized R-KKM theorem in topological space and their application[J]. J Math Anal Appl, 2003, **285**(2): 679-690.

[7] Fang M, Huang N J. Generalized L-KKM type theorems in topological spaces with an application[J]. Comput Math Appl, 2007, **53**(12): 1896-1903.

[8] Ding X P. Generalized G-KKM theorems in generalized convex spaces and their applications[J]. J Math Anal Appl, 2002, **266**(1): 21-37.

[9] Ding X P. New H-KKM theorems and their applications to geometric property coincidence theorems minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(1): 1-19.

[10] Ding X P. Generalized L-KKM type theorems in L-convex spaces with applications[J]. Comput Math Appl, 2002, **43**(10/11): 1249-1256.

[11] Ding X P. Generalized KKM type theorems in FC-spaces with applications II[J]. J Global Optim, 2007, **38**(3): 367-385.

[12] Ding X P. The generalized game and the system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-uniform spaces[J]. Nonlinear Anal TMA, 2008, **68**(4): 1028-1036.

[13] 丁协平, 黎进三, 姚任之. 局部FC-一致空间内的广义约束多目标对策[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(3): 272-280.

[14] Fang M, Huang N J. KKM type theorems with applications to generalized vector equilibrium problems in FC-spaces[J]. Nonlinear Anal TMA, 2007, **67**(3): 809-817.

[15] Park S. Comments on recent studies on abstract convex spaces[J]. Nonlinear Anal Forum, 2008, **13**(1): 1-17.

[16] Verma R U. Some results on R-KKM mappings and R-KKM selections and their applications[J]. J Math Anal Appl, 1999, **232**(2): 428-433.

[17] Verma R U. G-H-KKM type theorems and their applications to a new class of minimax inequalities [J]. Comput Math Appl, 1999, **37**(8): 45-48.

[18] George X Z, Yuan. KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis[M]. New York: Marcel Dekker, 1999.

[19] Isac G, Sehgal V M, Singh S P. An alternate version of a variational inequality[J]. Indian J Math, 1999, **41**(1): 25-31.

[20] Chadli O, Chiang Y, Yao J C. Equilibrium problems with lower and upper bounds[J]. Appl Math Lett, 2002, **15**(3): 327-331.

[21] Li J. A lower and upper bounds of a variational inequality[J]. Appl Math Lett, 2000, **13**(5): 47-51.

[22] Tian G. Generalized of FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457-471.

[23] Ding X P. Generalized variaitonal inequalities and equilibrium problems in generalized convex spaces [J]. Comput Math Appl, 1999, **38**(7/8): 189-197.

[24] 丁协平. 非紧广义凸空间内的拟平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 578-584.

[25] Lin L J, Park S. On some generalized quasi-equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(2): 167-181.

Some Nonempty Intersection Theorems in Topological Spaces With Applications

FANG Min[1], HUANG Nan-jing[2]

(1. Department of Economic Mathematics, South Western University of Finance and Economics, Chengdu 610074, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China)

Abstract: The some new nonempty intersection theorems for generalized L-KKM mappings were established and some new fixed point theorems for set-valued mappings were proved under suitable conditions in topological spaces. As applications, an existence theorem for an equilibrium problem with lower and upper bounds and two existence theorems for a quasi-equilibrium problem with lower and upper bounds were obtained in topological spaces. The results generalize some known results in recent literature.

Key words: generalized L-KKM mapping; α-β-generalized L-diagonally quasi-subspace; transfer compactly closed-valued; fixed point; quasi-equilibrium problem with lower and upper bounds