

托卡马克中低模态到高模态转迁 模型的混沌运动*

陈芳启^{1,3}, 周良强^{2,3}, 王霞¹, 陈予恕^{2,3}

(1. 南京航空航天大学 数学系, 南京 210016;

2. 天津大学 力学系, 天津 300072;

3. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 利用 Melnikov 方法详细研究了在托卡马克(Tokamaks)中, 等离子区边缘附近低模态到高模态转迁方程的混沌动力学. 该转迁方程是一个含外激励和参数激励的系统. 对含周期外激励和线性参数激励、三次参数激励的系统分别绘出了用来划分混沌区和非混沌区的临界曲线. 得到的结果表明, 含有线性或三次参数激励的系统存在不可控区域, 在该区域中异宿轨分岔总是导致混沌发生. 特别地, 三次参数激励系统存在一个“可控频率”, 施以该频率的激励, 不论激励的振幅多大, 同宿轨分岔总是不会导致混沌发生. 得到了这类系统的一些复杂的动力学行为.

关键词: 托卡马克中的转迁; 混沌; Melnikov 方法; 不可控区域; 可控频率

中图分类号: O347.4 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.001

引 言

托卡马克(Tokamaks)是利用外部磁场控制并通过电阻对填充气体加热产生等离子体的环形系统. 在过去的 20 年中, 对托卡马克中低模态到高模态转迁模型有了很多研究. Wagher 等^[1]首先在 ASDEX 托卡马克中发现了高模态, Shaing 和 Cruhe^[2] 研究了一类低模态到高模态转迁模型的分岔, Itoh 等^[3] 提出了在托卡马克中等离子体低模态到高模态的转迁模型并讨论了突变现象. Itoh 等^[4] 研究了在托卡马克中 ELMS-H 模态的极限环. Wang^[5] 分析了文献[4]中模型的稳定性和突变. Zhang^[6] 研究了在托卡马克中一维梁的非线性动力学. Colchin 等^[7] 研究了在 DIII-D 托卡马克中慢低模态到高模态转迁的物理行为, 发现在瞬态模态中, 能量和粒子限制增加低模态值. Guzdar 等^[8] 通过实验数据给出了在 DIII-D 托卡马克中低限制模态到高限制模态转迁的理论比较. 在文献[9]中, 利用多尺度方法, Zhang 和 Cao 研究了在托卡马克中等离子区边缘附近低模态到高模态 Ginzburg-Landau 类型转迁方程的局部分岔, 得到了 Hopf 分岔和极限环振动.

* 收稿日期: 2008-10-17; 修订日期: 2009-06-11

基金项目: 天津市自然科学基金资助项目(09JCZJC26800); 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632040)

作者简介: 陈芳启(1963—), 男, 山东人, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: cfqyf@eyou.com).

近年来在托卡马克中的混沌运动得到了广泛的研究. Silvia 等^[10] 利用频闪映射研究了等离子体边缘全场线混沌的产生过程和磁轴的 Hamilton 分岔. Portela 等^[11] 研究了带有遍历限制器托卡马克磁场的辛映射, 用它可描述在内壁边缘产生混沌的扰动磁场. 他们利用数值方法研究了由于邻近磁场的相互作用而产生的混沌、混沌区域, 并研究了由于和托卡马克壁碰撞而产生的反常扩散和场的消失. Koretz 等^[12] 数值研究了等离子体边缘 Lagrange 混沌对托卡马克中限制于磁场的等离子体的影响. Viana^[13] 利用 Hamilton 描述和数值方法研究了带有共振螺旋圈的托卡马克中磁场的混沌. Ullmann 和 Caldas^[14] 提出了描述托卡马克中磁场轨道的二维辛映射模型. 利用 Liapunov 指数、Poincaré 映射和旋转变换研究了系统的分岔和通向混沌的途径.

据我们所知, 目前大多数托卡马克中的混沌运动都是用数值方法来研究的. 本文利用 Melnikov 方法解析地研究了托卡马克中等离子区边缘附近低模态到高模态转迁模型的混沌动力学, 该模型含有外激励和参数激励, 绘出了划分混沌区和非混沌区的临界曲线. 得到的结果表明, 对含外激励和线性参数激励、三次参数激励的系统存在不可控区域, 在该区域中, 异宿轨分岔总是会导致混沌发生. 特别地, 三次参数激励系统存在 1 个“可控频率”, 施以该频率的激励, 不论激励的振幅多大, 同宿轨分岔总是不会导致混沌发生. 得到了这类系统的一些复杂的动力学行为.

1 问题描述

用来描述托卡马克中等离子区边缘附近等离子体密度和径向电场强度的一维 Ginzburg-Landau 扩散方程可写为^[9]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(E_r) \frac{\partial n}{\partial x} \right] + f_1 \cos \Omega_1 t, \quad (1)$$

$$\gamma \frac{\partial E_r}{\partial t} = -N(E_r, g) + \mu_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + f_2 \cos \Omega_2 t, \quad (2)$$

其中 n 和 E_r 分别是等离子区边缘粒子的密度和归一化径向电场强度, $D(E_r)$ 和 μ_1 是密度和径向电场强度的扩散系数, $N(E_r, g)$ 是电流总作用, f_1 , Ω_1 , f_2 和 Ω_2 分别是粒子扰动和径向电场控制的振幅和频率. $D(E_r)$, $N(E_r, g)$ 和 γ 分别满足下面的方程:

$$\begin{cases} D(E_r) = \frac{D_{\max} + D_{\min}}{2} + \frac{D_{\max} - D_{\min}}{2} \tanh E_r, \\ N(E_r, g) = g - g_0 + (\beta E_r^3 - \alpha E_r), \\ g(n) = \frac{3}{n^2} \frac{dn}{dx}, \\ \gamma = \left[1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right] \frac{B_P^2}{B^2}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 D_{\max} 和 D_{\min} 分别表示高模态和低模态的扩散系数, 参数 v_A , c , B_P , B , α , β 和 g_0 是常数, v_A , c , B_P 和 B 分别为阿尔芬 (Alfven) 速度、光速、平行于托卡马克极向的磁场强度和特征磁场强度.

应用如下变换

$$n = \frac{1}{V}, \quad E_r = U, \quad V = V_0 + A(x)v(t), \quad U = G(x)u(t), \quad (4)$$

将方程 (3) 和 (4) 代入到方程 (1) 和 (2) 中并消去 v 和 v_t , 截取到主要阶, 得^[9]

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \varepsilon(\mu + \beta_2 u^2 + \beta_3 u + \beta_4 u^3 + \beta_5 u^2 + \beta_6 u^2) u + \\ C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + C_4 u^4 + C_5 u^5 + \varepsilon(\delta_1 \cos \Omega_1 t + \delta_2 \cos \Omega_2 t) u + \\ \varepsilon(\delta_3 \cos \Omega_1 t + \delta_4 \cos \Omega_2 t) u^2 + \varepsilon(\delta_5 \cos \Omega_1 t + \delta_6 \cos \Omega_2 t) u^3 = \\ \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon F_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) + \varepsilon^2 a_0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中变量 u 表示托卡马克中等离子区边缘附近归一化径向电场强度的变化, $0 < \varepsilon \ll 1$, Ω_1 和 Ω_2 分别表示粒子扰动和径向电场控制的频率, 方程(5)中的系数可见文献[9], 这里予以省略.

方程(5)表示1个含有外激励和参数激励的复杂系统. 这里我们考虑一种特殊而重要的情形 $C_2 = C_4 = 0$. 在 $C_2 = C_4 = 0$ 情形下, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 未扰系统为

$$\ddot{u} + C_1 u + C_3 u^3 + C_5 u^5 = 0. \quad (6)$$

考虑三势阱情形, 即 $C_1 > 0$, $C_3 < 0$, $C_5 > 0$ 且 $C_3^2 - 4C_1 C_5 > 0$. 未扰系统(6)有如下5个平衡点:

$$-u_1, -u_2, 0, u_1, u_2,$$

其中

$$u_1 = \sqrt{\frac{-C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4C_1 C_5}}{2C_5}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{-C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4C_1 C_5}}{2C_5}}.$$

该系统存在两类不同的轨道: 连接两个鞍点 ($\pm u_1, 0$) 的异宿轨, 表达式如下:

$$(u_{\text{het}}^{\pm}, \dot{u}_{\text{het}}^{\pm}) = \left[\pm \frac{\sqrt{2} u_1 \sinh(T_1 t/2)}{\sqrt{-\xi + \cosh(T_1 t)}}, \pm \frac{\sqrt{2}(1-\xi) T_1 u_1 \cosh(T_1 t/2)}{2(-\xi + \cosh(T_1 t))^{3/2}} \right] \quad (7)$$

和连接每个不稳定鞍点到其自身的同宿轨, 表达式如下:

$$(u_{\text{hom}}^{\pm}, \dot{u}_{\text{hom}}^{\pm}) = \left[\pm \frac{\sqrt{2} u_1 \cosh(T_1 t/2)}{\sqrt{\xi + \cosh(T_1 t)}}, \pm \frac{\sqrt{2}(1-\xi) T_1 u_1 \sinh(T_1 t/2)}{2(\xi + \cosh(T_1 t))^{3/2}} \right], \quad (8)$$

见图1. 其中

$$T_1 = u_1^2 \sqrt{2C_5(\rho^2 - 1)}, \quad \xi = \frac{5 - 3\rho^2}{3\rho^2 - 1},$$

$$\rho^2 = \frac{-C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4C_1 C_5}}{-C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4C_1 C_5}}.$$

略去高阶项 $\varepsilon^2 a_0$, 并取 $C_2 = C_4 = 0$, 系统(5)可化为

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \varepsilon(\mu + \beta_2 u^2 + \beta_3 u + \beta_4 u^3 + \beta_5 u^2 + \\ \beta_6 u^2) u + C_1 u + C_3 u^3 + C_5 u^5 + \\ \varepsilon(\delta_1 \cos \Omega_1 t + \delta_2 \cos \Omega_2 t) u + \\ \varepsilon(\delta_3 \cos \Omega_1 t + \delta_4 \cos \Omega_2 t) u^2 + \\ \varepsilon(\delta_5 \cos \Omega_1 t + \delta_6 \cos \Omega_2 t) u^3 = \\ \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon F_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (9)$$

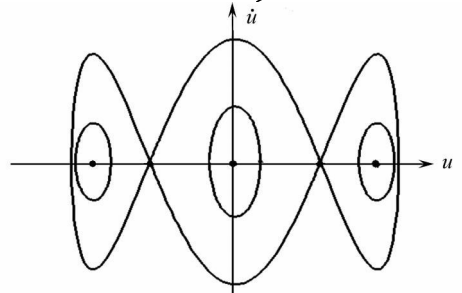


图1 系统(6)的相图描述

2 混沌行为的 Melnikov 分析

本节使用经典 Melnikov 方法^[15-16]来分析系统(9)的混沌动力学. 考虑 1:1 共振即 $\Omega_1 =$

$\Omega_2 = \omega$ 情形, 作变量代换 $t \rightarrow t + t_0$, 经过整理, 系统(9)的 Melnikov 函数分别为同宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_3 I_2 + \beta_5 I_3 + \beta_6 I_4 + (\delta_1 + \delta_2) \sin \omega t_0 I_5 + \\ & (\delta_3 + \delta_4) \sin \omega t_0 I_6 + (\delta_5 + \delta_6) \sin \omega t_0 I_7 - \\ & [(F_1 + F_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t_0 + F_2 \sin \varphi_2 \cos \omega t_0] I_8; \end{aligned} \quad (10)$$

异宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_2 J_2 + \beta_5 J_3 + \beta_6 J_4 + (\delta_1 + \delta_2) \sin \omega t_0 J_5 - \\ & (\delta_3 + \delta_4) \cos \omega t_0 J_6 + (\delta_5 + \delta_6) \sin \omega t_0 J_7 + \\ & [(F_1 + F_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t_0 - F_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t_0] J_8, \end{aligned} \quad (11)$$

其中积分 I_i 和 J_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 的表达式和结果见附录.

下面分析线性参数激励和三次参数激励两种情形.

情形 1 周期外激励和线性参数激励

在这种情形下, 取 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0$, 则 Melnikov 函数分别如下:

同宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_3 I_2 + \beta_5 I_3 + \beta_6 I_4 + 2\delta \sin \omega t_0 - \\ & (F_1 \sin \omega t_0 + F_2 \cos \varphi_2 \sin \omega t_0 + F_2 \sin \varphi_2 \cos \omega t_0) I_8; \end{aligned} \quad (12)$$

异宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_2 J_2 + \beta_5 J_3 + \beta_6 J_4 + 2\delta J_5 \sin \omega t_0 + \\ & (F_1 \cos \omega t_0 + F_2 \cos \varphi_2 \cos \omega t_0 - F_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t_0) J_8. \end{aligned} \quad (13)$$

详细分析得到轨道横截相交从而存在混沌的条件如下:

同宿轨

$$\frac{1}{\delta} < \frac{2 | I_5 |}{| \sqrt{I^2 - (F_2 I_6 \sin \varphi_2)^2} + (F_1 + F_2 \cos \varphi_2) I_6 | }; \quad (14)$$

异宿轨

$$4J_5^2 \delta^2 - 4J_5 F_2 \sin \varphi_2 J_6 \delta + F_2^2 \sin^2 \varphi_2 J_6^2 + (F_1 J_6 + F_2 \cos \varphi_2 J_6)^2 - J^2 \geq 0, \quad (15)$$

其中

$$I = W_1 + \beta_3 I_2 + \beta_5 I_3 + \beta_6 I_4, \quad J = W_1 + \beta_2 J_2 + \beta_5 J_3 + \beta_6 J_4.$$

情形 2 周期外激励和三次参数激励情形

在这类情形下, 取 $\delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = \delta_6 = \delta$, $\delta_3 = \delta_4 = 0$, 则 Melnikov 函数分别如下:

同宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_3 I_2 + \beta_5 I_3 + \beta_6 I_4 + 2(I_5 + I_7) \delta \sin \omega t_0 - \\ & (F_1 \sin \omega t_0 + F_2 \cos \varphi_2 \sin \omega t_0 + F_2 \sin \varphi_2 \cos \omega t_0) I_8; \end{aligned} \quad (16)$$

异宿轨

$$\begin{aligned} M(t_0) = & W_1 + \beta_2 J_2 + \beta_5 J_3 + \beta_6 J_4 + 2\delta(J_5 + J_7) \sin \omega t_0 + \\ & (F_1 \cos \omega t_0 + F_2 \cos \varphi_2 \cos \omega t_0 - F_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t_0) J_8. \end{aligned} \quad (17)$$

通过详细的 Melnikov 分析, 我们可得到横截相交条件如下:

同宿轨

$$\frac{1}{\delta} < \frac{2 | (I_5 + I_7) |}{| \sqrt{I^2 - (F_2 I_6 \sin \varphi_2)^2} + (F_1 + F_2 \cos \varphi_2) I_6 | }; \quad (18)$$

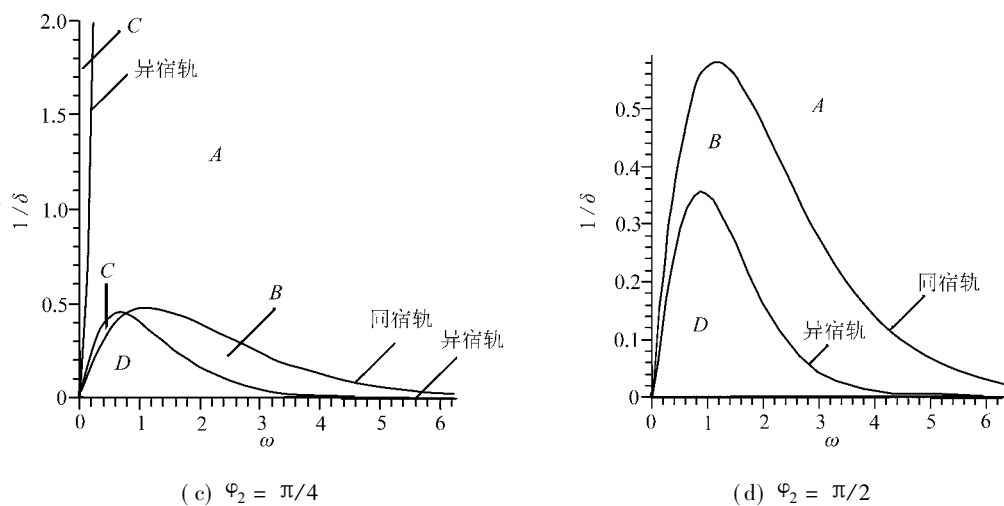
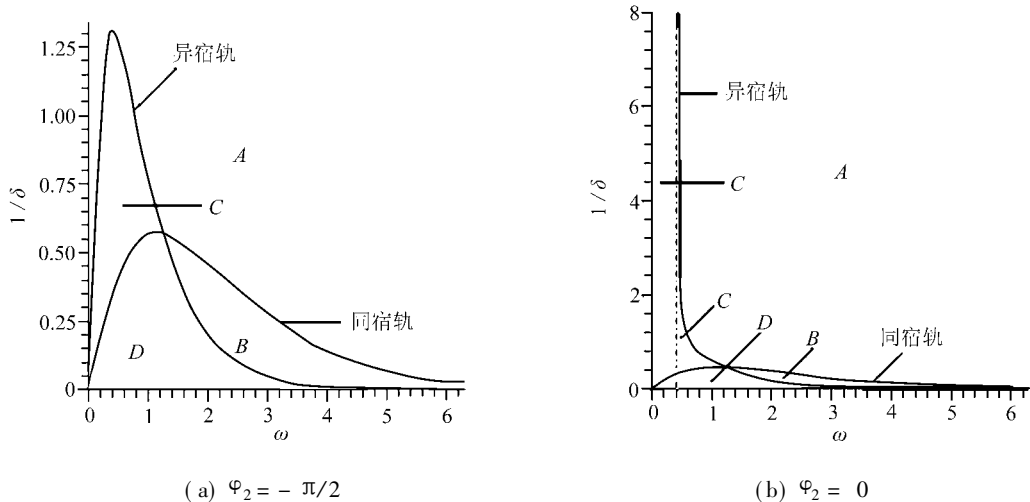
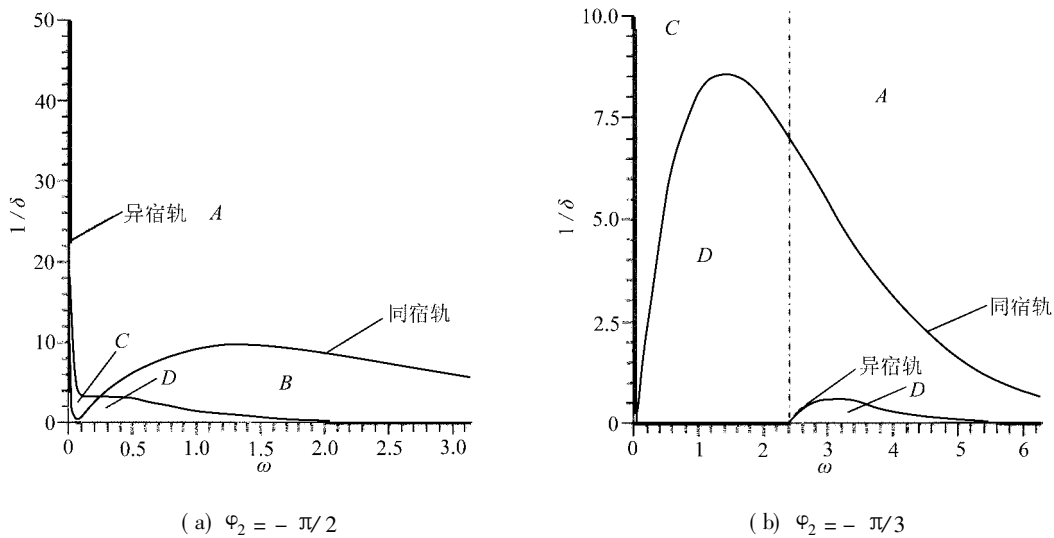
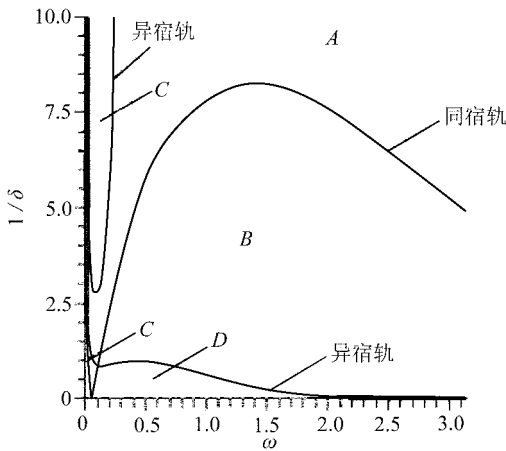
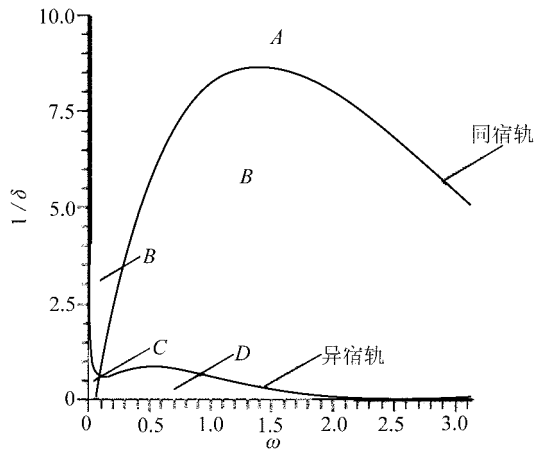


图2 周期外激励和线性参数激励系统的临界曲线





(c) $\varphi_2 = \pi/4$



(d) $\varphi_2 = \pi/2$

图3 周期外激励和三次参数激励系统的临界曲线

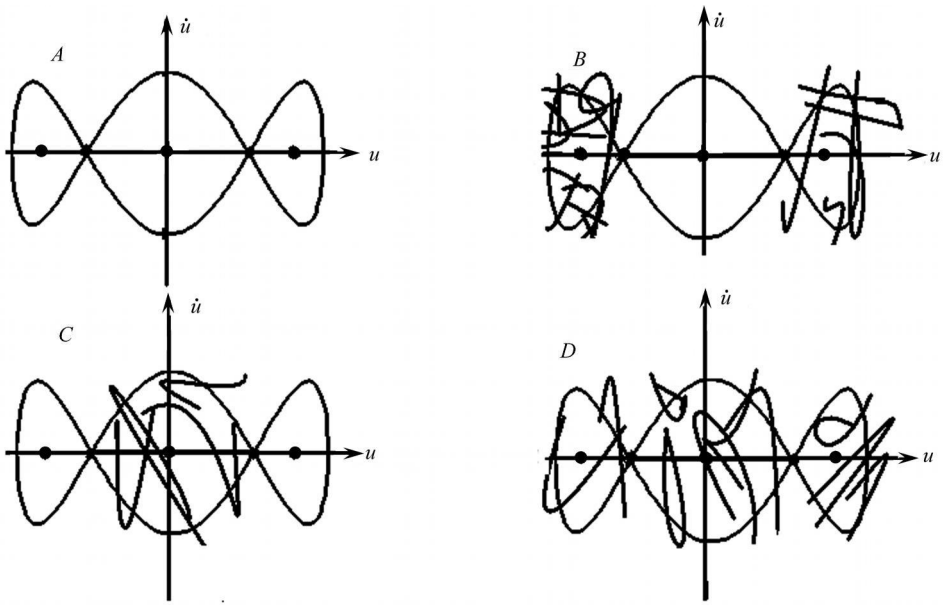


图4 每个区域的不同相图描述

异宿轨

$$4(J_5^2 + J_8^2) \delta^2 - 4(J_5 + J_8) F_2 \sin \varphi_2 J_6 \delta + F_2^2 \sin^2 \varphi_2 J_6^2 + [(F_1 + F_2 \cos \varphi_2) J_6]^2 - J^2 \geq 0. \quad (19)$$

取参数 $\mu = \beta = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = \sqrt{2 + \omega^2}$, 我们得到如图2和图3所示的临界曲线. 由图2和图3我们可得到如下结论:

- 1) 当 $(1/\delta, \omega)$ 位于区域A中时, 系统不会发生混沌; 当 $(1/\delta, \omega)$ 位于区域B中时, 同宿轨分岔导致系统混沌发生而异宿轨分岔不导致混沌发生; 当 $(1/\delta, \omega)$ 位于区域C中时, 情况正好相反; 当 $(1/\delta, \omega)$ 位于区域D中时, 同宿轨分岔、异宿轨分岔均导致系统混沌发生.
- 2) 对于周期外激励和线性参数激励系统, 近似地有, 当 $-17\pi/48 \leq \varphi_2 < \pi/4$ 时存在不可控区域, 在此区域中异宿轨分岔总是会 导致混沌发生. φ_2 越靠近0, 不可控区域越大, 当 $\varphi_2 =$

0 时不可控区域达到最大. 当 $\pi/4 \leq \varphi_2 < \pi/2$, 频率 ω 较小时, 较小或较大的参数激励振幅 δ 会使异宿轨分岔导致混沌发生. 当 $\varphi_2 = \pm \pi/2$ 时, 同、异宿轨的临界曲线都具有典型的钟形结构. 对 $\varphi_2 = -\pi/2$ 情形, 当 ω 靠近 0 时, 随着激励振幅 δ 的增加, 异宿轨分岔首先导致混沌发生, 接着同宿轨分岔和异宿轨分岔均导致系统混沌发生. 这表明在这个范围下, 混沌首先从相空间的中间发生, 然后向外扩散. 当 ω 增加到临界值时, 情况正好相反, 即混沌首先在相空间的外部发生, 然后向中心聚拢, 直至达到全部混沌. 当 ω 较大时, 系统将不会发生混沌, 见图 4. 当 $\varphi_2 = \pi/2$ 时, 异宿轨的临界曲线总是在同宿轨的下方, 这表明随着激励振幅 δ 的增加, 同宿轨分岔首先导致系统发生混沌, 接着同宿轨分岔、异宿轨分岔均导致系统发生混沌.

3) 对周期外激励和三次参数激励系统, 近似地有, 当 $\varphi_2 \in [-17\pi/48, -\pi/3) \cup (-\pi/6, \pi/4)$ 时存在小不可控区域, 当 $\varphi_2 \in [-\pi/3, -\pi/6]$ 时存在大不可控区域. 当 $\varphi_2 \in [\pi/4, \pi/2)$ 时, 对很小或很大的激励振幅, 异宿轨分岔会导致混沌发生. 另外同宿轨存在 1 个“可控频率”, 施以该频率的激励, 不论激励振幅多大, 同宿轨分岔总不会导致混沌发生.

3 结 论

利用 Melnikov 方法研究了托卡马克中等离子区边缘附近低模态到高模态转迁模型的混沌运动. 该模型是一个含外激励和参数激励的系统. 线性参数激励和三次参数激励系统存在不可控区域, 在此区域中异宿轨分岔总是会导致混沌发生. 三次参数激励系统存在“可控频率”, 施以该频率的激励, 不论激励振幅多大, 同宿轨分岔总不会导致混沌发生. 该系统表现出复杂的混沌动力学行为. 所得结果为该系统的动力学分析与设计提供一定的指导. 例如在设计这类系统时, 可适当选取系统参数, 如激励频率选取“可控频率”, 从而系统不发生混沌运动.

附录: Melnikov 积分

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^2(t) dt = \frac{u_1^2 T_1}{1+\xi} \left[-\frac{1+2\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{2+\xi}{4}} \right], \\
 J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^2(t) dt = \frac{u_1^2 T_1}{1+\xi} \left[\frac{1+2\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{2+\xi}{4}} \right], \\
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^2(t) u_{\text{het}}(t) dt = T_1^2 u_1^3 \left[-\frac{\sqrt{2}(1-\xi)^2}{10(1+\xi)} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}(3\xi+7)(1-\xi)^{3/2}}{30(1+\xi)^{3/2}} \right], \\
 J_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^3(t) dt = \frac{4T_1^2 u_1^3 (13-\xi)}{105(1-\xi)}, \\
 I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^2(t) u_{\text{het}}^2(t) dt = \\
 &= 2T_1^2 u_1^4 \left[\frac{6\sqrt{1-\xi^3} \arctan \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} + \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} (-2\xi^3 - 5\xi^2 - \xi + 2)}{96(1+\xi)^3} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{6 \arctan \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} + \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} (2\xi^3 - \xi^2 - 5\xi - 2)}{96\sqrt{1-\xi}(1+\xi)^{3/2}} \right], \\
 J_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^2(t) u_{\text{het}}^2(t) dt = \frac{T_1^4 u_1^4}{12} \left[\sqrt{(1-\xi^2)} (\xi^2 + 2) + 6 \arctan \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \right], \\
 I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{het}}^4(t) dt = \frac{T_1^3 u_1^4}{320\sqrt{1-\xi^2}(1+\xi)^3(\xi-1)} \left[\sqrt{1-\xi^2} (2\xi^4 - 20\xi^3 - 119\xi^2 - 130\xi - 48) - \right. \\
 &\quad \left. 30 \arctan \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} (4\xi^3 + 8\xi^2 + 7\xi + 2) \right],
 \end{aligned}$$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{het}}^4(t) dt = \frac{T_1^3 u_1^4}{320 \sqrt{1-\xi^2}(\xi-1)} \left[\sqrt{1-\xi^2}(2\xi^4 - 20\xi^3 - 119\xi^2 - 130\xi - 48) - 10 \arctan \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}(12\xi^3 + 20\xi^2 + 21\xi + 6) \right],$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{hom}}(t) \mathcal{I}_{\text{hom}}(t) \sin \omega t dt = u_1^2 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{\omega}{T_1} \frac{\sinh(\omega/T_1 \arccos \xi)}{\sinh(\omega/T_1 \pi)},$$

$$J_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{het}}(t) \mathcal{I}_{\text{het}}(t) \sin \omega t dt = u_1^2 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{\omega}{T_1} \frac{\sinh(\omega/T_1 \arccos(-\xi))}{\sinh(\omega/T_1 \pi)},$$

$$I_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{hom}}^3(t) \mathcal{I}_{\text{hom}}^3(t) \sin \omega t dt = 2u_1^4(\xi-1)I^*,$$

其中

$$I^* = \frac{\pi}{1 - e^{-2\omega \pi}} \text{Re}[\psi_1''(z_1) + \psi_1''(z_2)]J,$$

$$\psi_1'(z) = h_1'(z)g_1(z) + 2h_1'(z)g_1'(z) + h_1(z)g_1''(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_k} h_1'(z) = -\frac{4\cosh z_k}{3\sinh z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow z_k} h_1''(z) = \frac{2\cosh^2 z_k}{\sinh^5 z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow z_k} h_1(z) = \frac{1}{\sinh^3 z_k} \quad (k = 1, 2),$$

$$h_1(z) = (z - z_k)^3, \quad g_1(z) = \sinh z (\cosh z + 1)e^{i\alpha}, \quad z_1 = i \arccos(-\xi),$$

$$z_2 = i(2\pi - \arccos(-\xi)), \quad J_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{het}}^3(t) \mathcal{I}_{\text{het}}^3(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{2}u_1^4(1-\xi)J^*,$$

其中

$$J^* = \frac{\pi}{1 - e^{-2\omega \pi}} \text{Re}[\psi_2''(z_1) + \psi_2''(z_2)]J, \quad \psi_2'(z) = h_2'(z)g_2(z) + 2h_2'(z)g_2'(z) + h_2(z)g_2''(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_k} h_2'(z) = -\frac{4\cosh z_k}{3\sinh z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow z_k} h_2''(z) = \frac{2\cosh^2 z_k}{\sinh^5 z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow z_k} h_2(z) = \frac{1}{\sinh^3 z_k} \quad (k = 3, 4),$$

$$z_3 = i \arccos \xi, \quad z_4 = i(2\pi - \arccos \xi),$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{hom}}^2(t) \mathcal{I}_{\text{hom}}^2(t) \sin \omega t dt, \quad J_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{het}}^2(t) \mathcal{I}_{\text{het}}^2(t) \cos \omega t dt,$$

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_{\text{hom}}(t) \sin \omega t dt, \quad J_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_{\text{het}}(t) \cos \omega t dt$$

由数值方法算得.

[参 考 文 献]

- [1] Wagner F, Becker G, Campbell D, et al. Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharge of the ASDEX Tokamak[J]. Physical Review Letters, 1982, **49**(19): 1408-1412.
- [2] Shaing K, Crume J. Bifurcation theory of poloidal rotation in Tokamak: a model for L-H transition[J]. Physical Review Letters, 1989, **63**(21): 2369-2372.
- [3] Itoh S, Itoh K. Model of L to H-mode transition in Tokamak[J]. Physical Review Letters, 1988, **60**(22): 2276-2279.
- [4] Itoh S, Itoh K, Fukuyama A, et al. Edge localized mode activity and a limit cycle in Tokamak plasma[J]. Physical Review Letters, 1991, **67**(18): 2485-2488.
- [5] WANG Xian-min. The stability and catastrophe of diffusion process of plasma boundary layer[J]. Science in China, Ser A, 1996, **39**(4): 430-441.
- [6] ZHANG Wei. Further study for nonlinear dynamic of one dimensional cylindrical beam[J]. Acta Physica Sinica (Oversea Edition), 1996, **5**(3): 409-422.
- [7] Colchin R J, Carrera B A, Maingi R, et al. Physics of low L-H transition in DIII-D Tokamak[J]. Nuclear Fusion, 2002, **42**(9): 1134-1143.

- [8] Guzdar P, Liu C S, Dong J Q, et al. Comparison of a low-to high-confinement transition theory with experiment data from DIII-D[J]. Physical Review Letters, 2002, **89**(26): 2650-2654.
- [9] ZHANG Wei, CAO Dong-xin. Local and global bifurcation of L-mode to H-mode transition near plasma edge in Tokamak[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006, **29**(1): 223-232.
- [10] Silva E C, Calda I L, Viana R L. Bifurcation and onset of chaos on the ergodic magnetic limiter mapping[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006, **14**(3): 403-423.
- [11] Portela J S E, Viana R L, Calda I L. Chaotic magnetic field line in Tokamak with ergodic limiter [J]. Physica A, 2003, **317**(3/4): 411-431.
- [12] Kroetz T, Marcu F A, Roberto M, et al. Transport control in fusion plasma by changing electric and magnetic field radial profile [J]. Computer Physics Communications, 2009, **180**(4): 642-650.
- [13] Viana R L. Chaotic magnetic field line in a Tokamak with resonant helical winding [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2000, **11**(5): 765-778.
- [14] Ullmann K, Calda I L. A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2000, **11**(13): 2129-2140.
- [15] Wiggins S. Introduction to Applied Non-Linear Dynamical Systems and Chaos [M]. New York: Springer, 1990.
- [16] Guckenheimer J, Holmes P J. Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields [M]. New York: Springer, 1983.

Chaotic Motions for the Model of the L-Mode to H-Mode in Tokamak

CHEN Fang-qi^{1,3}, ZHOU Liang-qiang^{2,3}, WANG Xia¹, CHEN Yuhu^{2,3}

(1. Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China ;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China ;

3. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The chaotic dynamic of the transport equation for the L-mode to H-mode near plasma in Tokamak is studied in detail with Melnikov method. The transport equation represents a system with external and parametric excitation. The critical curve separating the chaotic region and non-chaotic region were presented for the system with periodically external excitation and linear parametric excitation, or cubic parametric excitation, respectively. The result obtained here shows that there exists uncontrollable region in which chaos always take place via heteroclinic bifurcation for the system with linear or cubic parametric excitation. Especially, there exists a "controllable frequency" excited at which chaos does not occur via homoclinic bifurcation no matter how large the excitation amplitude is for the system with cubic parametric excitation. Some complicated dynamical behavior were obtained for this class of system.

Key words: transition in Tokamak; chaos; Melnikov method; uncontrollable region; controllable frequency