

粘弹性浅拱的非线性动力学行为^{*}

易壮鹏¹, 王连华², 赵跃宇²

(1. 长沙理工大学 土木与建筑学院, 长沙 410114;

2. 湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了外荷载作用下粘弹性浅拱的非线性动力行为. 通过 d'Alembert 原理和 Euler-Bernoulli 假定建立了浅拱的控制方程, 其中非线性粘弹性材料采用 Leaderman 本构关系. 运用 Galerkin 法和数值积分研究粘弹性浅拱的非线性动力特性. 并分析了矢高、材料参数、激励幅值和频率等参数的影响, 结果表明一定条件下粘弹性浅拱可出现混沌运动.

关键词: 粘弹性浅拱; Leaderman 本构关系; Galerkin 法; 分岔; 混沌

中图分类号: U311.2 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1009-0887.2009.06.011

引 言

近年来粘弹性结构在工程实践中得到了广泛的应用, 已有许多研究^[1-13] 关注粘弹性结构的非线性动力行为. 陈立群和程昌钧等^[2,5] 采用 Leaderman 非线性本构关系, 运用 Galerkin 数值积分, 研究了非线性粘弹性梁、柱的动力稳定与混沌运动. 其他的本构关系^[6-8] 同样被用于分析粘弹性结构的动力特性. 已有关于粘弹性结构文献主要研究梁^[2,3,6,8]、柱^[4,5]、板^[9,10]、壳^[11]、壳^[12] 和运动弦线^[13] 等的非线性动力特性而较少涉及到粘弹性浅拱.

本文通过数值方法研究粘弹性浅拱的混沌动力学, 采用 Galerkin 法得到粘弹性拱的离散模型, 分析了浅拱矢高、材料参数、激励幅值和频率等参数对非线性动力特性的影响.

1 数学模型及其简化

如图 1 所示为坐标系 xOy 下跨度 L 的粘弹性浅拱, $F(x, t)$ 为分布荷载, $y_0(x)$ 为初始几何位置, $y(x, t)$ 则是动力荷载作用下的变形. 由 d'Alembert 原理和 Euler-Bernoulli 假定, 并忽略剪切变形和转动惯量, 可以得到浅拱的动力学控制方程^[14]

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - N \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0(x, t)}{\partial x^2} \right] = F(x, t), \quad (1)$$

式中 ρ 为结构的质量密度, A 为截面面积, M 为截面弯矩, N 为截面的轴力, 且有

$$M(x, t) = - \int_A z \sigma(x, z, t) dA, \quad (2)$$

* 收稿日期: 2008-08-22; 修订日期: 2009-02-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10502020; 10772065)

作者简介: 易壮鹏(1979—), 男, 湖南望城人, 讲师, 博士(联系人, E-mail: yizhuangpeng@163.com).

$$N(x, t) = \int_A \sigma(x, z, t) dA. \quad (3)$$

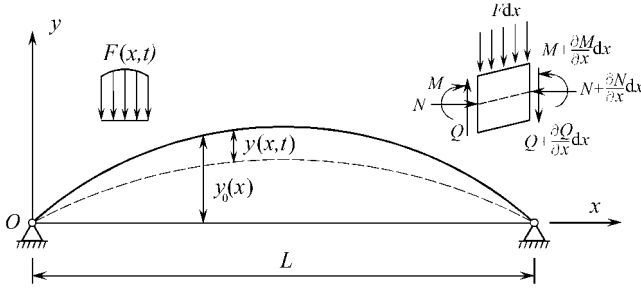


图 1 浅拱的结构示意图

由非线性粘弹性材料 Leaderman 本构关系^[15], 拱截面轴向应力 $\sigma(x, z, t)$ 可表示为

$$\sigma(x, z, t) = E_0 g(\varepsilon(x, z, t)) + \int_0^t E(t - \tau) g(\varepsilon(x, z, t)) d\tau, \quad (4)$$

式中 $E(t)$ 为拉伸松弛函数, $E_0 = E(0)$ 为材料的初始弹性模量, $\varepsilon(x, z, t)$ 为轴向应变, 非线性函数 $g(\varepsilon)$ 定义为

$$g(\varepsilon(x, z, t)) = \varepsilon(x, z, t) + \beta \varepsilon^2(x, z, t) + \gamma \varepsilon^3(x, z, t), \quad (5)$$

其中 β, γ 为材料参数, 由浅拱中小变形情况下应变和位移几何关系的假定, $\varepsilon(x, z, t)$ 可表示为

$$\varepsilon(x, z, t) = \frac{1}{2L} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y_0(x)}{\partial x} \right] dx - z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6)$$

因此, 可得到动力控制方程如下:

$$\begin{aligned} & \rho A \ddot{y} + 2\beta E_0 I \ddot{\varepsilon}_y'' + 2\beta E_0 I \dot{\varepsilon}_y^{\ominus} + (1 + 2\beta \varepsilon) E_0 I y'''' + \gamma E_0 J_4 [(y'')^3]'' + \\ & \int_0^t D(t - \tau) \left\{ 2\beta E_0 I \ddot{\varepsilon}_y'' + 2\beta E_0 I \dot{\varepsilon}_y^{\ominus} + (1 + 2\beta \varepsilon) E_0 I y'''' + \gamma E_0 J_4 [(y'')^3]'' \right\} d\tau + \\ & \left\{ E_0 A \varepsilon + E_0 I (\beta + 3\gamma \varepsilon) (y_0'')^2 + \right. \\ & \left. \int_0^t D(t - \tau) [E_0 A \varepsilon + E_0 I (\beta + 3\gamma \varepsilon) (y_0'')^2] d\tau \right\} (y'' + y_0'') = F(x, t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{其中 } I = \int_A z^2 dA, \quad J_4 = \int_A z^4 dA,$$

右上标撇表示对时间 x 求导, 上标点表示对时间 t 求导, $D(t) = E(t)/E_0$, 且 $D(t)$ 可以假定为

$$D(t) = 1 - b + b e^{-at}. \quad (8)$$

由铰支边界条件 $y(0, t) = y_0(0) = 0$ 和 $y(L, t) = y_0(L) = 0$, 可以将 $y(x, t)$, $y_0(x)$ 和 $F(x, t)$ 展开如下:

$$\begin{cases} y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, & y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{cases} \quad (9)$$

利用 Galerkin 方法, 并取(9)式中前面两阶可以得到两自由度模型如下:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) + g_1(t) + \int_0^t D(t - \tau) g_1(\tau) d\tau = f_1(t), \\ \dot{q}_2(t) + g_2(t) + \int_0^t D(t - \tau) g_2(\tau) d\tau = f_2(t), \end{cases} \quad (10)$$

式中 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的表达式为

$$\begin{cases} g_1(t) = \beta_1 q_1(t) + \beta_2 q_1(t) h_1(t) + \beta_3 [q_1^3(t) + 32q_1(t) q_2^2(t)] - \\ \quad \beta_4 [q_1(t) + b_1] h_1(t) - [\beta_5 + \beta_6 h_1(t)] h_2(t), \\ g_2(t) = 16\beta_1 q_2(t) + 16\beta_2 q_2(t) h_1(t) + 32\beta_3 [8q_2^3(t) + q_1^2(t) q_2(t)] - \\ \quad 4\beta_4 [q_2(t) + b_2] h_1(t) - 8[\beta_5 + \beta_6 h_1(t)] h_3(t), \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} h_1(t) = q_1^2(t) + 2q_1(t) b_1 + 4q_2^2(t) + 8q_2(t) b_2 \\ h_2(t) = 3q_1^2(t) [q_1(t) + b_1] + 32q_2^2(t) [q_1(t) + b_1] + \\ \quad 64q_1(t) q_2(t) [q_2(t) + b_2], \\ h_3(t) = 24q_2^2(t) [q_2(t) + b_2] + q_1^2(t) [q_2(t) + b_2] + \\ \quad 2q_1(t) q_2(t) [q_1(t) + b_1]. \end{cases} \quad (12)$$

系数 $\beta_1 - \beta_6$ 的意义为

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{E_0 I}{\rho A} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4, \quad \beta_2 = \frac{\beta E_0 I}{2\rho A} \left(\frac{\pi}{L} \right)^6, \quad \beta_3 = \frac{3\sqrt{E_0} J_4}{4\rho A} \left(\frac{\pi}{L} \right)^8, \\ \beta_4 = \frac{E_0}{4\rho} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4, \quad \beta_5 = \frac{\beta E_0 I}{4\rho A} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4, \quad \beta_6 = \frac{3\sqrt{E_0} I}{16\rho A} \left(\frac{\pi}{L} \right)^6. \end{cases} \quad (13)$$

引入辅助变量的方法^[16]如下:

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha b e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} g_1(\tau) d\tau, \\ x_2(t) = \alpha b e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} g_2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (14)$$

方程(10)可以重新写为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + g_1(t) - x_1(t) = f_1(t), \quad x_1(t) = -\alpha x_1(t) + \alpha b g_1(t), \\ \ddot{q}_2(t) + g_2(t) - x_2(t) = f_2(t), \quad x_2(t) = -\alpha x_2(t) + \alpha b g_2(t). \end{cases} \quad (15)$$

很明显,粘弹性浅拱的单自由度模型可以写为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + g_1(t) - x_1(t) = f_1(t), \\ x_1(t) = -\alpha x_1(t) + \alpha b g_1(t). \end{cases} \quad (16)$$

式(15)和(16)可用来数值分析粘弹性浅拱的非线性动力学行为。

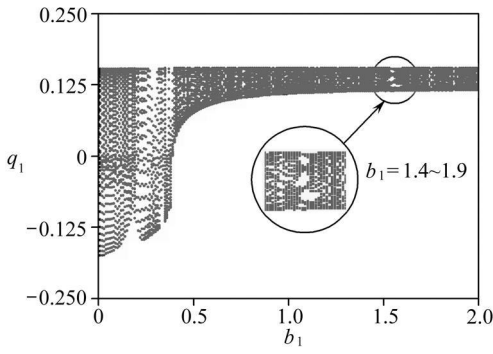
2 数值结果与讨论

本节通过数值方法分析粘弹性浅拱的非线性动力学,计算过程中取如下参数:

$$\begin{aligned} E_0 &= 3.0 \times 10^9 \text{ kg/m}^2, \quad \rho = 2.5 \times 10^9 \text{ kg/m}^3, \quad A = 0.64 \text{ m}^2, \quad L = 10 \text{ m}, \\ \beta &= 4.5, \quad \gamma = 2000, \quad b = 0.1, \quad f_1(t) = f \cos(\Omega t), \quad f_2(t) = 0, \quad b_2 = 0. \end{aligned}$$

2.1 浅拱矢高对系统的影响

给定材料、外激励参数 $\alpha = 0.0001$, $f = 1.0$, $\Omega = 2\pi$, 图2给出了单自由度粘弹性浅拱随矢高变化的分岔图。从中可以看到单自由度模型显示出复杂的非线性动力特性,在图2中可以观察到混沌运动和周期窗口。图3则给出了两自由度模型的分岔图,在图3(b)中可以明显看到浅拱矢高对非线性动力特性的重要影响。同时与图2对比,两自由度模型的一阶模态幅值大于单自由度模型的幅值。因此,二阶模态的非线性响应对粘弹性浅拱一阶模态的幅值影响显著。



($\alpha = 0.0001, f = 1.0, \Omega = 2\pi$)

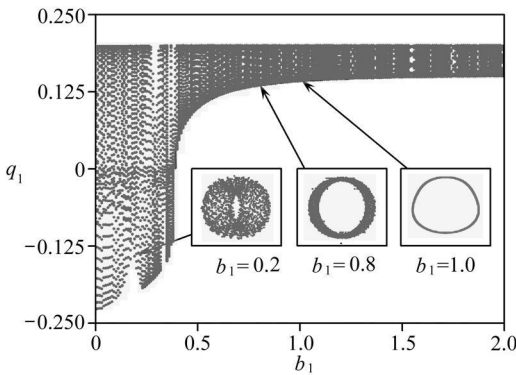
图 2 单自由度模型分岔图

2.2 材料参数对系统的影响

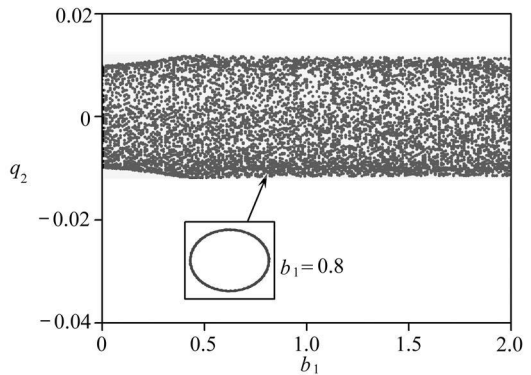
图 4 给出了粘弹性浅拱随材料参数变化时的分岔图,其中矢高、激励参数给定为 $b_1 = 1.0, f = 1.0, \Omega = 2\pi$. 从图中可以看到在 α 增至 0.20 的过程中系统渐进稳定. 在图 4 中还可看到广义坐标 q_1 和 q_2 的幅值随材料参数 α 的增大而减小. 因此材料参数 α 对粘弹性浅拱的运动稳定起着十分重要的作用.

2.3 荷载参数对系统的影响

一般来说,外激励对粘弹性浅拱运动形态的影响,一般考察激励的幅值和频率两个参数. 图 5 和图 6 分别给出了粘弹性浅拱跨中位移随激励幅值

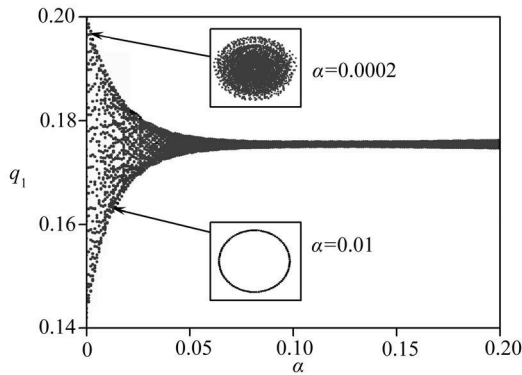


(a) 一阶模态

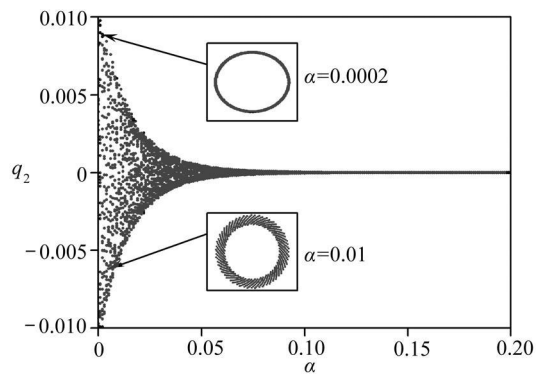


(b) 二阶模态

图 3 两自由度模型分岔图 ($\alpha = 0.0001, f = 1.0, \Omega = 2\pi$)



(a) 一阶模态

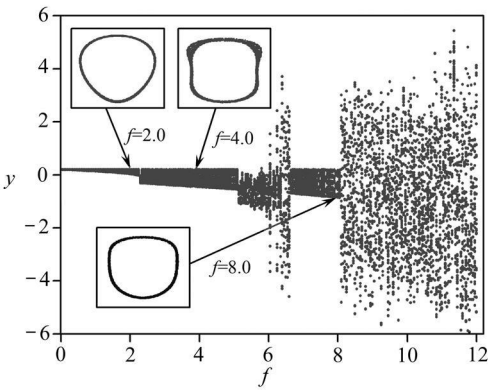


(b) 二阶模态

图 4 材料参数变化时粘弹性浅拱分岔图 ($b_1 = 1.0, f = 1.0, \Omega = 2\pi$)

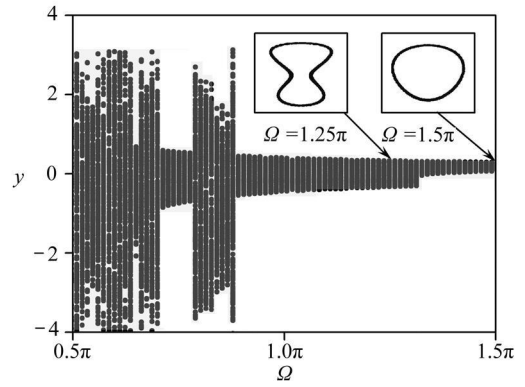
和频率变化的分岔图,图 5 中 $b_1 = 1.0, \alpha = 0.0001, \Omega = 2\pi$,图 6 中 $b_1 = 1.0, \alpha = 0.0001, f = 1.0$.

图 5 给出了激励幅值区域(1, 12)内的分岔图,从中可以看到,随着激励幅值的增加,粘弹性浅拱的准周期运动出现在激励幅值区间 $f \in (0, 6.05] \cup [6.65, 8.05]$;而在激励幅值增大的过程中,粘弹性浅拱的混沌运动则出现在幅值区间 $f \in (6.05, 6.65) \cup (8.05, 12)$ 内. 图 6 给



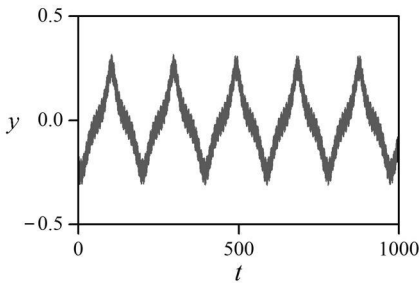
($b_1 = 1.0, \alpha = 0.0001, \Omega = 2\pi$)

图5 激励幅值变化时系统分岔图

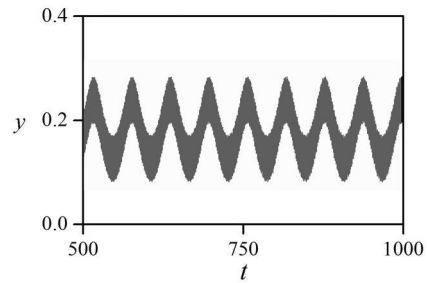


($b_1 = 1.0, \alpha = 0.0001, f = 1.0$)

图6 激励频率变化时系统分岔图



(a) $\Omega = 1.25\pi$



(b) $\Omega = 1.5\pi$

图7 q_1 的时间历程曲线 ($b_1 = 1.0, \alpha = 0.0001, f = 1.0$)

出了激励频率区域 $\Omega \in [0.5\pi, 1.5\pi]$ 内的分岔图, 从中可以看到区间 $\Omega \in [0.71\pi, 0.78\pi] \cup [0.88\pi, 1.5\pi]$ 内的运动是准周期运动, 而区间 $\Omega \in (0.5\pi, 0.71\pi) \cup (0.78\pi, 0.88\pi)$ 内的运动是混沌运动. 为进一步说明频率区间 $\Omega \in [0.88\pi, 1.5\pi]$ 内粘弹性浅拱准周期运动的特征, 图7给出了 $\Omega = 1.25\pi$ 和 $\Omega = 1.5\pi$ 两种情况下粘弹性浅拱的时间历程曲线, 从中可以看到时间历程的幅值以一种特殊的周期发生变化, 即粘弹性浅拱的准周期运动.

3 结 论

本文通过 Leaderman 本构关系和数值积分, 研究了外荷载作用下粘弹性浅拱的非线性动力特性. 主要结论有: 1) 矢高参数 b_1 减小时系统可由准周期环面破裂的方式进入混沌运动状态; 2) 混沌运动对材料参数 α 的增加很敏感; 3) 激励幅值对粘弹性浅拱的混沌运动的影响很明显, 同时激励频率与非线性特性显著相关. 另外值得指出的是弹性浅拱^[17] 在外激励频率发生变化时的非线性特征与粘弹性浅拱有一定的相似性, 因此矢高和材料参数对粘弹性浅拱的非线性振动起着更为重要的作用.

[参 考 文 献]

- [1] 陈立群, 程昌钧. 基于 Galerkin 截断的粘弹性结构动力学行为研究综述[J]. 自然杂志, 1999, 21(1): 1-4.
- [2] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性梁的动力学行为[J]. 应用数学和力学 2000, 21(9): 897-902.
- [3] 陈立群, 程昌钧, 张能辉. 具有几何和物理非线性粘弹性梁的混沌运动[J]. 工程力学, 2001, 18(1): 1-6.

- [4] Chen L Q, Cheng C J. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on 2-order Galerkin truncation[J]. *Mechanics Research Communications*, 2000, **27**(4): 413-419.
- [5] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(9): 890-896.
- [6] 程昌钧, 盛冬发, 李晶晶. 损伤粘弹性 Timoshenko 梁的拟静态力学行为分析[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(3): 267-274.
- [7] Argyris J, Belubekian V, Ovakinyan N, et al. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 1996, **7**(2): 151-163.
- [8] 李根国, 朱正佑, 程昌钧. 非线性粘弹性 Timoshenko 梁动力学行为的分析[J]. *力学季刊*, 2001, **22**(3): 346-351.
- [9] 程昌钧, 盛冬发, 杨晓. 损伤粘弹性桩基的非线性动力学行为[J]. *振动与冲击*, 2006, **25**(1): 18-24.
- [10] 冯振宇, 王忠民, 樊丽俭. 粘弹性点支承粘弹性桩的动力稳定性分析[J]. *中国公路学报*, 2006, **19**(1): 67-70.
- [11] 张能辉, 程昌钧. 粘弹性板动力稳定性分析中的两模态 Galerkin 逼近[J]. *应用数学和力学*, 2003, **24**(3): 221-228.
- [12] 程昌钧, 张能辉. 轴压作用下粘弹性柱壳的动力学行为[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(1): 1-8.
- [13] 张能辉, 王建军, 程昌钧. 轴向变速运动粘弹性弦线横向振动的复模态 Galerkin 方法[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(1): 1-8.
- [14] Huang N C, Nachbar W. Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches[J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1968, **35**: 289-296.
- [15] Leaderman H. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubber like network polymers[J]. *Polymer Trans Soc Rheol*, 1962, **6**(4): 361-382.
- [16] Potapov V D, Marasnov A Y. The investigation of the stability of elastic and viscoelastic rods under a stochastic excitation[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 1997, **34**(9): 1367-1377.
- [17] Bi Q, Dai H H. Analysis of non-linear dynamics and bifurcations of a shallow arch subjected to periodic excitation with internal resonance[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **233**(4): 553-567.

Nonlinear Dynamic Behaviors of Viscoelastic Shallow Arches

YI Zhuang-peng¹, WANG Lian-hua², ZHAO Yue-yu²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, P. R. China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The nonlinear dynamic of nonlinear viscoelastic shallow arches subjected to the external excitation is investigated. Based on the d'Alembert principle and the Euler-Bernoulli assumption, the governing equation of shallow arch was obtained, where the Leaderman constitutive relation was applied. The Galerkin method and numerical integration were used to study the nonlinear dynamic properties of the viscoelastic shallow arches. Moreover, the effects of the rise, the material parameter and excitation on the nonlinear dynamic of shallow arch were investigated. The results show that viscoelastic shallow arches may have chaotic motion for certain condition.

Key words: viscoelastic shallow arch; Leaderman constitutive relation; Galerkin method; bifurcation; chaos