文章编号: 1000-0887(2009) 06-0677-13

一类强交错扩散的捕食模型弱解的整体存在性*

李慧玲

(东南大学 数学系, 南京 210018)

(李继彬推荐)

摘要: 考虑一类带有强交错扩散项的捕食模型解的整体存在性. 借助于有限差分方法和熵不等式的相关性质及结论, 证明了在高维空间上, 该问题有整体存在的弱解. 此外, 还说明了所得的这个弱解是非负解.

关 键 词: 捕食模型; 强交错扩散; 熵泛函; 弱解的存在性; Orlicz 空间
中图分类号: O175.26 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.007

1 背景介绍与主要结论

本文讨论如下带有齐次 Neumann 边界条件的抛物型方程组弱解的整体存在性:

$$
\begin{cases}
\partial_t u_i - \operatorname{div}\boldsymbol{J}_i = f_i(u_1, u_2), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\
\boldsymbol{J}_i \cdot \nu = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\
u_i(x, 0) = u_{i0}(x), & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $\boldsymbol{J}_i = \nabla(c_i u_i + a_i u_i^2 + u_1 u_2) + d_i u_i \nabla U$, $f_i(u_1, u_2) = (R_i + (-1)^i \beta_{i1} u_1 - \beta_{i2} u_2) u_i$, $i = 1, 2$. 这里的区域 $\Omega \subset R^N (N \leqslant 3)$ 有界光滑, ν 表示边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 问题(1) 被称为是带有交错扩散项的 Lotka-Volterra 型捕食模型. u_1 和 u_2 分别代表被捕食者和捕食者的密度, 对应的流量为 $J_i(x, t)$. 函数 $U = U(x, t)$ 表示环境的舒适度, 与之对应的扩散可以反映出物种所处的环境是否利于物种的生存: 当某处的环境位势比较低(即环境比较舒适) 时, 将会有更多的物种迁移到该处; 反之, 物种将会逃离该处. 参见文献[1-2]. 扩散系数 c_i 和 a_i 为非负常数, $d_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2)$. $R_i \geqslant 0$ 表示物种 i 自身固有的增长率, 常数 $\beta_{ii} > 0$ 为物种 i 自身内部的竞争, $\beta_{12} \geqslant 0$ 和 $\beta_{21} \geqslant 0$ 分别表示由物种间的相互作用所引起的线性衰减率和线性增长率. 这样一类种群模型是 Shigesada 等[2] 在研究群居现象时提出的.

在上述问题中, 捕食者的流量为 $J = -\nabla(c_2 u_2 + a_2 u_2^2 + u_1 u_2) = -u_2 \nabla u_1 - (c_2 + 2a_2 u_2 + u_1) \nabla u_2$, 其中, $-u_2 \nabla u_1$ 指向 u_1 的密度减少的方向, 这说明被捕食者聚合成群(尤其是巨大

* 收稿日期: 2008-09-22; 修订日期: 2009-04-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10701024; 10601011)
作者简介: 李慧玲(1977—), 女, 湖南人, 讲师, 博士(E-mail: lihuiling_seu@yahoo.com.cn).

的群)可以帮助自身抵御捕食者的捕猎. 这种现象在种群动力学中被称为群居防御效应. 当同一物种的个数足够多进而形成群时, 这个群中的每一个个体抵御被捕猎的能力也相应增强, 因此, 捕食者很难捕到, 甚至于不能捕到这个群里的任何个体. 更为详细的物理学和生物学背景请参阅文献[3-4]及其参考文献.

文献[5-6]中的抽象结果已经说明问题(1)存在局部古典解(u_1, u_2). 然而, 不论对初值加什么样的光滑性条件, 都很难说明这个局部解是整体存在的. 这是因为, 为了证明这个局部解是整体存在的, 即说明这个局部解的极大存在时间 $T = \infty$, 就必须证明存在 $p > \max\{2, N\}$, 使得

$$\sup_{0\leqslant t< T} \|u_i(\cdot, t)\|_{W_p^1(\Omega)} < \infty, \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

但是, 由于强交错扩散的出现, 再者当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 问题(1)所对应的扩散矩阵是非对称的退化矩阵, 因此对问题(1)来说, 不仅最大值原理不成立, 而且偏微分方程中的经典理论(L^p 理论、Schauder 理论)和先验估计也不成立. 所以, 很难得到上述估计式(2). 到目前为止, 人们只对几个非常特殊的问题(绝大多数是竞争模型), 在很强的参数关系下得到了古典解的整体存在性, 可以参阅文献[7-12]及其参考文献. 鉴于此, 人们把目标转向于探讨这类问题弱解的整体存在性. 最近, 受到文献[13]的启发, Chen 和 Jüngel[14] 论证了在高维空间 $(N \leqslant 3)$ 上, 带强交错扩散项的竞争问题(1)有整体存在的非负弱解.

本文的主要目的是说明问题(1)有整体存在的弱解. 本文的主要结论如下.

定理 1.1 设 $T > 0$, $Q_T = \Omega\times(0, T)$. 假定以下条件成立:

(i) 区域 $\Omega \subset R^N (N \leqslant 3)$ 有界, 且边界 $\partial\Omega \in C^{0,1}$;

(ii) 系数 $c_i \geqslant 0$, $a_i > 0$, $R_i \geqslant 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0\ (i, j = 1, 2)$ 满足

$$4\beta_{11}\beta_{21}^3 + \beta_{21}^2\beta_{12}^2 \leqslant 27\beta_{11}^2\beta_{32}^2 + 4\beta_{12}^3\beta_{22} + 18\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}, \tag{3}$$

$$\beta_{21} \leqslant \beta_{12} \text{ 或 } \beta_{12} \leqslant \beta_{21} \leqslant \beta_{12} + 2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}; \tag{4}$$

(iii) $\nabla U \in (L^2(Q_T))^N$, 初值 $u_{i0} \in L_\Psi(\Omega)$ 且在 Ω 上 $u_{i0} \geqslant 0\ (i = 1, 2)$.

则问题(1)存在弱解(u_1, u_2), 满足: 在 Q_T 上 $u_i \geqslant 0$, 并且

$$u_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_\Psi(\Omega)) \cap W^{1,r}(0, T; (W^{1,r'}(\Omega))'),$$
$$i = 1, 2.$$

上式是指, 对任意的 $\varphi_i \in L^{r'}(0, T; W^{1,r'}(\Omega))$, 下述积分等式对 $i = 1, 2$ 总成立:

$$\int_0^T \langle\partial_t u_i, \varphi_i\rangle \mathrm{d}t + \int_{Q_T}(c_i\nabla u_i + 2a_i u_i\nabla u_i + \nabla(u_1u_2) + d_i u_i\nabla U)\cdot\nabla\varphi_i \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{Q_T} f_i(u_1, u_2)\varphi_i \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

其中 $r = (2N+2)/(2N+1)$, $r' = r/(r-1) = 2N+2$, 记号$\langle\cdot, \cdot\rangle$表示空间 $W^{1,r'}(\Omega)$ 与其对偶空间$(W^{1,r'}(\Omega))'$之间的对偶积.

在这里, $L_\Psi(\Omega)$ 表示由函数 $\Psi(s) = (1+s)\ln(1+s) - s\ (s \geqslant 0)$ 所生成的 Orlicz 空间. 文献[13]已经将 Orlicz 空间的技巧成功地应用于研究抛物型方程(组). 至于 Orlicz 空间的定义及性质, 有兴趣的读者可以参阅文献[14]及其参考文献.

注 1.1 1) 对任意固定的 β_{21}, 如果 β_{11}, β_{12} 和 β_{22} 这 3 个数中有 1 个比较大, 而其它两个为固定的正数(当然, 我们要求 $\beta_{12} \geqslant \beta_{21}$), 那么定理 1.1 中的(3)式以及(4)式中的第 1 个不等式都成立.

2) 选取 $\beta_{11}=\beta_{12}=1, \beta_{21}=5, \beta_{22}=4$, 则 $\beta_{21}=\beta_{12}+2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}$, 且

$$4\beta_{11}\beta_{21}^3+\beta_{21}^2\beta_{12}^2=525<808=27\beta_{11}^2\beta_{22}^2+4\beta_{12}^3\beta_{22}+18\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}.$$

于是, 定理 1.1 中的(3) 式以及(4) 式中的第 2 个不等式都成立.

借助于有限差分方法和熵不等式的有关结论, 我们导出了定理 1.1 的结论. 虽然所用的主要方法同于文献[14], 但是, 本文讨论的是 $f_i(u_1,u_2)=(R_i+(-1)^i\beta_{i1}u_1-\beta_{i2}u_2)u_i(i=1,2)$ 的情况, 此时问题(1) 是一捕食问题, 而文献[14] 所讨论的是 $f_i(u_1,u_2)=(R_i-\beta_{i1}u_1-\beta_{i2}u_2)u_i(i=1,2)$ 的情况, 此时问题(1) 是一竞争问题. 从表达式来看, 捕食问题(1) 和竞争问题(1) 只有唯一的差别: β_{21} 前的系数不同, 除此之外, 几乎没有任何差别. 但是, 我们在这里需要指出的是:

注 1.2 1) β_{21} 前的系数由' +1' 改为' -1', 正是这一变化, 给后面一系列关键性的先验估计的建立带来了技术上的困难. 我们通过给出两个辅助性结论(命题 2.1 和命题 2.2), 解决了这一问题.

2) 文献[14] 始终要求 $\beta_{12}=\beta_{21}\geqslant 0$. 但是, 在推导本文的主要结论时, 我们发现, 利用本文的方法, 我们可以去掉这一限制条件. 事实上, 当 β_{21} 前的系数是 +1' 时, 利用本文的论证方法不难证明, 本文的命题 2.1 和命题 2.2 中的结论对所有 $\beta_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$ 均成立, 从而, 本文的引理 2.1 和引理 2.2 中的结论对所有 $\beta_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$ 都成立. 注意到本文的这两个引理中的结论分别对应于文献的引理 2.1 和引理 2.5 中的结论. 在文献[14] 中, 这是两个关键性引理, 由此就可以推出文献[14] 的定理 1.1 中的结论. 但文献[14] 在推导这两个引理, 尤其在推导引理 2.5 的结论时, 用到了 $\beta_{12}=\beta_{21}$ 这一条件. 因此, 利用本文的讨论方法, 我们可以说明, 文献[14] 的定理 1.1 中的结论对所有 $\beta_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$ 都成立. 换而言之, 我们能够证明, 只要 $\beta_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$, 即使 $\beta_{12}\neq\beta_{21}$, 此时文献[14] 的定理 1.1 中的结论也成立.

目前, 已有很多研究工作者在关注捕食模型的平衡态问题, 比如文献[15-20]. 但是, 在这里我们必须指出的是, 不论是对平衡态问题还是对与时间有关的问题, 相较于捕食模型, 在竞争模型上的研究进展更为顺利, 取得的研究成果更多, 有兴趣的读者可以参阅文献[7-8, 12] 和[21-22] 及其参考文献.

2 定理 1.1 的证明

本文的证明方法是受到文献[14] 的启发. 大致来说, 证明的基本思路为: 首先对问题(1) 进行两次逼近, 然后说明逼近问题存在解, 最后说明逼近解序列的极限就是问题(1) 的解. 我们仅详细叙述与文献[14] 不同的证明过程. 但为了使全文更为完整, 对于用类似于文献[14] 的方法易导出的一些结论, 我们仅列出主要结论, 不再证明.

2.1 辅助命题

为了说明逼近问题存在解, 我们首先建立两个重要的结论.

命题 2.1 设 $\beta_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$ 满足(3) 式. 此外, 当 $\beta_{11}=\beta_{12}=0$ 时, 进一步假设

$$\beta_{21}=0. \tag{5}$$

则函数

$$f(s)=\beta_{11}s^3+\beta_{12}s^2-\beta_{21}s+\beta_{22}$$

满足 $f(s)\geqslant 0,\ \forall s\in[0,\infty)$.

证明 注意到, 当条件(3) 和(5) 成立时, $f(s)\equiv\beta_{22}\geqslant 0$. 因此, 接下来只需说明在(3) 式成立且 $\beta_{11}+\beta_{12}\neq 0$ 时, $f(s)\geqslant 0$.

由 $f(s)$ 的表达式易知, 对 $s>0$, 有 $f'(s)=3\beta_{11}s^2+2\beta_{12}s-\beta_{21}$ 和 $f''(s)=6\beta_{11}s+2\beta_{12}$

>0. 因此$f(s)$在区间$(0,\infty)$上仅有唯一的极小值点, 记为s_0. 由于$f(0)=\beta_{22}\geqslant 0$且$\lim_{s\to\infty}f(s)\geqslant 0$, 因此要证$f(s)\geqslant 0$对任意的$s\geqslant 0$成立, 只需说明$f(s_0)\geqslant 0$. 当$\beta_{11}=0$时, 易证$f(s_0)\geqslant 0$. 下面只需讨论$\beta_{11}>0$的情况. 由$f'(s_0)=0$和$s_0\geqslant 0$知

$$s_0=\frac{-\beta_{12}+\sqrt{\beta_{12}^2+3\beta_{11}\beta_{21}}}{3\beta_{11}}.$$

由$f'(s_0)=3\beta_{11}s_0^2+2\beta_{12}s_0-\beta_{21}=0$, 推出$f(s_0)=\beta_{11}s_0^3+\beta_{12}s_0^2-\beta_{21}s_0+\beta_{22}=[(\beta_{12}\beta_{21}+9\beta_{11}\beta_{22})-2(\beta_{12}^2+3\beta_{11}\beta_{21})s_0]/(9\beta_{11})$. 因此$f(s_0)\geqslant 0$等价于

$$2(\beta_{12}^2+3\beta_{11}\beta_{21})^{3/2}\leqslant 9\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}+27\beta_{11}^2\beta_{22}+2\beta_{12}^3. \tag{6}$$

不难验证: 由(3)式可导出(6)式. 故, 命题成立. □

注 2.1 若(4)式成立, 则由$\beta_{11}=\beta_{12}=0$知, $\beta_{21}=0$.

命题 2.2 设$\beta_{ij}\geqslant 0$, $i,j=1,2$. 令

$$I(x,y)=-\beta_{11}x^2\ln x-\beta_{22}y^2\ln y-\beta_{12}xy\ln x+\beta_{21}xy\ln y,\qquad x,y>0.$$

则在(4)式成立的条件下, 有

$$I(x,y)\leqslant\frac{1}{2}(\beta_{11}+\beta_{22})x^2+\frac{1}{2}(\beta_{12}+2\beta_{21}+\beta_{22})y^2+\frac{1}{2}(\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}),\quad \forall x,y>0.$$

证明 由于映射$x\mapsto-\ln x$是凸映射, 因此

$$x(\ln x-\ln y)\geqslant x-y,\qquad\forall x,y>0. \tag{7}$$

情况(i): $\beta_{21}\leqslant\beta_{12}$. 由(7)式得

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\beta_{21}xy(\ln y-\ln x)+(\beta_{21}-\beta_{12})xy\ln x-\beta_{11}x^2\ln x-\beta_{22}y^2\ln y\leqslant\\&\beta_{21}y(y-x)-(\beta_{12}-\beta_{21})(x-1)y-\beta_{11}x(x-1)-\beta_{22}y(y-1)\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta_{11}x^2+\frac{1}{2}(\beta_{12}+2\beta_{21}+\beta_{22})y^2+\frac{1}{2}(\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}),\qquad\forall x,y>0.\end{aligned}$$

情况(ii): $\beta_{21}\geqslant\beta_{12}$. 若$0<x\leqslant 1$, 则由(7)式知, 对任意$y>0$有

$$\begin{aligned}I(x,y)&\leqslant\beta_{21}y(y-x)-\beta_{11}x(x-1)-\beta_{22}y(y-1)\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta_{11}x^2+\frac{1}{2}(2\beta_{21}+\beta_{22})y^2+\frac{1}{2}(\beta_{11}+\beta_{22}).\end{aligned}$$

若$x>1$, 则由(7)式和(4)式得

$$\begin{aligned}I(x,y)&\leqslant\beta_{21}y(y-x+x\ln x)-\beta_{12}xy\ln x-\beta_{11}x^2\ln x-\beta_{22}y(y-x+y\ln x)\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta_{22}x^2+\frac{1}{2}(2\beta_{21}+\beta_{22})y^2-[\beta_{11}x^2-(\beta_{21}-\beta_{12})xy+\beta_{22}y^2]\ln x\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta_{22}x^2+\frac{1}{2}(2\beta_{21}+\beta_{22})y^2,\qquad\forall y>0.\end{aligned}$$

综上, 我们完成命题 2.2 的证明. □

2.2 逼近问题

对于任意给定的$0<\eta<1$, 定义$s=(s)_+/[1+\eta(s)_+]$, $m(s)=(s)_++\eta$, 其中$(s)_+:=\max\{0,s\}$. K等分时间区间$(0,T]=\bigcup_{k=1}^K((k-1)\tau,k\tau]$, 其中$\tau=T/K>0$. 设$h>0$, 并记$\chi_h$为区域$\{x\in\Omega\mid\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>h\}$上的特征函数. 用有限差分$D^{-h}[\chi_h u_1u_2D^h\ln(u_1u_2)]$离散扩散项$\Delta(u_1u_2)$, 则对任给的$u_1^{k-1}, u_2^{k-1}\in L^2(\Omega)$, 我们得到逼近问题

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} - \operatorname{div}[c_i \nabla u_i^k + 2a_i m(u_i^k)\nabla u_i^k + d_i(u_i^k)_+ \nabla U] = \\ \qquad D^{-h}[\chi_h \overline{u_1^k}\,\overline{u_2^k} D^h \ln(m(u_1^k)m(u_2^k))] + f_i(m(u_1^k), m(u_2^k)), \qquad x \in \Omega, \\ (c_i \nabla u_i^k + 2a_i m(u_i^k)\nabla u_i^k + d_i(u_i^k)_+ \nabla U)\cdot \gamma = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{8}$$

在这里, D^h 是对梯度项的逼近, D^{-h} 是对散度项的逼近, 即 $D^h f = (D_1^h f, \cdots, D_N^h f)$,

$$D_j^h f(x, t) = \frac{f(x + he_j, t) - f(x, t)}{h},$$

$$D^{-h} F(x, t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j(x - he_j, t) - F_j(x, t)}{-h},$$

其中 e_j 表示空间 R^N 上的第 j 个单位向量, $j = 1, \cdots, N$.

考虑到扩散系数 $2a_i m(u_i^k)$ 不一定有界, 因此不能直接运用 Lax-Milgram 引理来证明问题(8) 存在解. 所以用有界的扩散系数来代替系数 $2a_i m(u_i^k)$, 于是得到第 2 个逼近问题: 对任给的 $u_1^{k-1}, u_2^{k-1} \in L^2(\Omega)$, 考虑问题(其中 $\nu > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} - \operatorname{div}\left(c_i \nabla u_i^k + 2a_i \dfrac{m(u_i^k)}{1 + \nu m(u_i^k)} \nabla u_i^k + d_i(u_i^k)_+ \nabla U\right) = \\ \qquad D^{-h}[\chi_h \overline{u_1^k}\,\overline{u_2^k} D^h \ln(m(u_1^k)m(u_2^k))] + f_i(m(u_1^k), m(u_2^k)), \qquad x \in \Omega, \\ \left(c_i \nabla u_i^k + 2a_i \dfrac{m(u_i^k)}{1 + \nu m(u_i^k)} \nabla u_i^k + d_i(u_i^k)_+ \nabla U\right)\cdot \gamma = 0, \\ \qquad\qquad x \in \partial\Omega,\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{9}$$

为了使本文的证明更为简洁, 我们分别用 $u_{i0} \in L^2(\Omega)$ 和 $\nabla U \in (L^\infty(Q_T))^N$ 来代替较弱的条件 $u_{i0} \in L^\Psi(\Omega)$ 和 $\nabla U \in (L^2(Q_T))^N$. 进一步, 假定 $\nabla U \in (L^\infty(\Omega))^N$, 系数 c_1 和 c_2 为正常数. 至于更为一般的情况以及 $c_1 = 0$ 或 $c_2 = 0$ 的情况, 可以采用与文献[14]类似的方法来处理. 在这里, 我们略去细节. 在下面的推导中, C 和 $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ 总表示各步推导中出现的正数, 它们的取值可以有所不同, 但它们的值只与括号中出现的量有关. 简记

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|f\|_{p,T} := \|f\|_{L^p(Q_T)}.$$

2.2.1 逼近问题(8) 和(9) 解的存在性

步骤 1　问题(9) 解的存在性

引理 2.1　设命题 2.1 的条件成立. 若时间半差分参数 $\tau > 0$ 满足

$$\frac{1}{8\tau} \geqslant \max_{\substack{i=1,2\\ i+j=3}} \left\{ \frac{d_i^2}{2c_i} \|\nabla U\|_\infty^2 + 2(R_i + \beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{ji}) \right\} \tag{10}$$

以及

$$32\tau \leqslant h^2 \eta^2. \tag{11}$$

则问题(9) 存在解 $(u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2$, 且有

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{c_i}{2} |\nabla u_i|^2 + \frac{u_i^2}{4\tau} + 2a_i \frac{m(u_i)}{1 + \nu m(u_i)} |\nabla u_i|^2 \right\} dx \leqslant C(\tau), \tag{12}$$

其中常数 $C(\tau) > 0$ 只与 τ 有关, 而与 ν 无关.

证明　设映射

$$\Gamma: \quad (\sigma, v_1, v_2) \in [0, 1] \times (L^4(\Omega))^2 \to (L^4(\Omega))^2$$

是下述线性问题的解算子:

$$
\begin{cases}
-\operatorname{div}(c_i\nabla u_i)+\dfrac{u_i}{\tau}-\sigma\operatorname{div}\left(2a_i\dfrac{m(v_i)}{1+\gamma m(v_i)}\nabla u_i\right)-\sigma\operatorname{div}(d_i(v_i)_+\nabla U)= \\
\qquad \sigma F_i(u_i^{k-1};v_1,v_2), \qquad x\in\Omega, \\
\left(c_i\nabla u_i+2\sigma a_i\dfrac{m(v_i)}{1+\gamma m(v_i)}\nabla u_i+\sigma d_i(v_i)_+\nabla U\right)\cdot\gamma=0, \\
\qquad x\in\partial\Omega,\ i=1,2,
\end{cases}
\tag{13}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&v_1,v_2\in L^4(\Omega),\\
&F_i(u_i^{k-1};v_1,v_2)=(u_i^{k-1})/\tau+D^{-h}[\chi_h v_1v_2D^h\ln(m(v_1)m(v_2))]+\\
&\quad f_i(m(v_1),m(v_2)).
\end{aligned}
$$

易证

$$
\|F_i(u_i^{k-1};v_1,v_2)\|_2\leqslant\tau^{-1}\|u_i^{k-1}\|_2+C(1+\|v_1\|_4^2+\|v_2\|_4^2),\qquad i=1,2.
$$

由于问题(13)中的扩散系数有界,因此由Lax-Milgram定理知,问题(13)存在唯一解. 从而映射 Γ 是适定的. 此外,不难验证映射 Γ 的连续性. 进一步,由 $N\leqslant 3$ 知,嵌入 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ 是紧的. 因此对每一个 $\sigma\in[0,1]$,映射 Γ 都是紧映射. 当 $\sigma=0$ 时,由 $\Gamma(0,u_1,u_2)=(u_1,u_2)$ 解出,在 Ω 上 $u_1=u_2=0$.

现在对映射 Γ 的每一个不动点建立一致估计. 注意到映射 Γ 的每一个不动点 (u_1,u_2) 都满足带有齐次Neumann边界条件的方程

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{div}(c_i\nabla u_i)+\frac{u_i}{\tau}-\sigma\operatorname{div}\left(2a_i\frac{m(u_i)}{1+\gamma m(u_i)}\nabla u_i\right)-\sigma\operatorname{div}(d_i(u_i)_+\nabla U)=\\
&\quad\sigma F_i(u_i^{k-1};u_1,u_2),\qquad x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中 $i=1,2$. 用 $u_i\in H^1(\Omega)$ 同乘以(14)式的两端并积分,然后将所得的两个积分式相加,推出

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(c_i|\nabla u_i|^2+\frac{u_i^2}{\tau}+2\sigma a_i\frac{m(u_i)}{1+\gamma m(u_i)}|\nabla u_i|^2\right)\mathrm{d}x=\\
&\quad I_1+I_2+I_3+\int_\Omega J(u_1,u_2)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&I_1=-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\sigma d_i(u_i)_+\nabla U\cdot\nabla u_i\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\frac{\sigma}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_iu_i^{k-1}\,\mathrm{d}x,\\
&I_3=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\sigma D^{-h}[\chi_h u_1u_2D^h\ln(m(u_1)m(u_2))]u_i\,\mathrm{d}x,\\
&J=\sum_{i=1}^{2}\sigma[R_i+(-1)^i\beta_{i1}m(u_1)-\beta_{i2}m(u_2)]m(u_i)u_i.
\end{aligned}
$$

由Young不等式得

$$
\begin{aligned}
I_1+I_2\leqslant&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega c_i|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{2}\frac{d_i^2}{2c_i}\|\nabla U\|_\infty^2\int_\Omega u_i^2\,\mathrm{d}x+\\
&\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

注意到 $|u_i|\leqslant 1/\eta$,并且对任意的 $x\geqslant 0$ 以及 $0<\eta<1$ 有 $|\ln(x+\eta)|\leqslant x+|\ln\eta|$,所以由Young不等式得

$$I_3 \leqslant \frac{1}{4\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i^2\mathrm{d}x + \frac{128\tau}{\eta^4 h^4}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i^2\mathrm{d}x + \frac{256\tau}{\eta^4 h^4}|\ln\eta|^2|\Omega|. \tag{17}$$

下面估计(15)式中的 $J(u_1, u_2)$. 当 $u_1u_2\leqslant 0$ 或者当 $u_1\leqslant 0$ 且 $u_2\leqslant 0$ 时, 易得

$$J(u_1, u_2)\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(R_i+\beta_{i1}+\beta_{i2})+$$
$$\frac{1}{2}[(\beta_{11}+2\beta_{12}+3R_1)u_1^2+(3R_2+\beta_{12}+3\beta_{21}+\beta_{22})u_2^2]. \tag{18}$$

当 $u_1, u_2>0$ 时, 由于 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 和 $0<\eta<1$, 所以由引理的假设条件和命题 2.1 知

$$J(u_1, u_2)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}(R_1+R_2+\beta_{21})+\frac{1}{2}(3R_1+\beta_{21})u_1^2+\frac{1}{2}(3R_2+4\beta_{21})u_2^2-\sigma u_2^3 f\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}(R_1+R_2+\beta_{21})+\frac{1}{2}[(3R_1+\beta_{21})u_1^2+(3R_2+4\beta_{21})u_2^2], \tag{19}$$

其中函数 $f(s)$ 由命题 2.1 定义. 所以联立(15)~(19)式可知, 对 $\forall u_1, u_2\in H^1(\Omega)$, 总有

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{c_i}{2}|\nabla u_i|^2+\frac{u_i^2}{4\tau}+2\sigma a_i\frac{m(u_i)}{1+\nu m(u_i)}|\nabla u_i|^2\right)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}|\Omega|\sum_{i=1}^{2}(R_i+\beta_{i1}+\beta_{i2})+\frac{256\tau}{h^4\eta^4}|\ln\eta|^2|\Omega|+$$
$$\sum_{\substack{i=1\\ j+i=3}}^{2}\int_\Omega u_i^2\left(-\frac{1}{4\tau}+\frac{d_i^2}{2c_i}\|\nabla U\|_\infty^2+\frac{128\tau}{h^4\eta^4}+2(R_i+\beta_{i1}+\beta_{i2}+\beta_{ji})\right)\mathrm{d}x, \tag{20}$$

这里的记号 $|\Omega|$ 表示区域 Ω 的测度. 选取 τ 充分小, 使得(10)式和(11)式成立. 特别地, 由(11)式知, $128\tau/(h^4\eta^4)\leqslant 1/(8\tau)$. 于是

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{c_i}{2}|\nabla u_i|^2+\frac{u_i^2}{4\tau}+2\sigma a_i\frac{m(u_i)}{1+\nu m(u_i)}|\nabla u_i|^2\right)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x+C(\tau)\leqslant C(\tau). \tag{21}$$

此外, 由(20)式知, 常数 $C(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 仅依赖于 τ, 而与 ν 无关.

由 Leray-Schauder 定理知, $\Gamma(1, \cdot)$ 有一个不动点. 因此, 问题(9)存在弱解. 在(21)式中取 $\sigma=1$, 即得不等式(12). 证毕. □

注 2.2 从上面的证明过程不难看出, 若 $\beta_{ij}=0(i, j=1, 2)$, 则映射 Γ 定义在 $[0, 1]\times(L^2(\Omega))^2$ 上. 此时, 以上推导不再依赖于空间维数 N. 换而言之, 引理 2.1 的结论对任意维数的空间都成立. 从而定理 1.1 的结论对任意维数的空间也成立(参见注 2.3).

步骤 2 问题(8)解的存在性

引理 2.1 给出了问题(9)的弱解关于 ν 的一致估计, 因此在问题(9)中取极限 $\nu\to 0^+$, 即得问题(8)解的存在性.

结论 A 设引理 2.1 的条件成立. 则问题(8)存在弱解 $(u_1, u_2)\in(H^1(\Omega))^2$, 满足: 对任意的 $\varphi_i\in W^{1, 2\cdot 2^*/(2^*-2)}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\frac{u_i-u_i^{k-1}}{\tau}\varphi_i\mathrm{d}x+\int_\Omega(c_i\nabla u_i+2a_i m(u_i)\nabla u_i+d_i(u_i)_+\nabla U)\cdot\nabla\varphi_i\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega[\chi_h u_1u_2 D^h\ln(m(u_1)m(u_2))]D^h\varphi_i\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega f_i(m(u_1), m(u_2))\varphi_i\mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2, \tag{22}$$

其中,当 $N = 1$ 时, $2^* = \infty$; 当 $N = 2$ 时, 2^* 可以为任意实数; 当 $N \geqslant 3$ 时, $2^* = 2N/(N-2)$.

2.2.2 问题(8)的解关于 τ 和 h 的一致估计

在问题(8)中取极限 $\tau, h, \eta \to 0^+$, 可得问题(1)解的存在性. 为此,必须给出问题(8)的弱解关于参数的先验估计.

引理 2.2 在引理 2.1 的条件下,若 $(u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2$ 是问题(8)的解且(4)式成立,则有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^2\left(c_i\frac{|\nabla(u_i)_+|^2}{m(u_i)} + a_i|\nabla(u_i)_+|^2\right) + \chi_h u_1u_2|D^h\ln(m(u_1)m(u_2))|^2\right]\mathrm{d}x + \\
&\quad\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^2\int_\Omega[m(u_i)(\ln m(u_i) - 1) + (u_i)_-\ln\eta]\mathrm{d}x \leqslant \\
&\quad\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^2\int_\Omega[m(u_i^{k-1})(\ln m(u_i^{k-1}) - 1) + (u_i^{k-1})_-\ln\eta]\mathrm{d}x + \\
&\quad C\sum_{i=1}^2\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x + C(\tau, R_i, \beta_{ij}, |\Omega|),
\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left(\frac{c_i}{2}|\nabla(u_i)_-|^2 + 2a_i\eta|\nabla(u_i)_-|^2\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^2\int_\Omega|(u_i)_-|^2\mathrm{d}x \leqslant \\
&\quad\frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^2\int_\Omega|(u_i^{k-1})_-|^2\mathrm{d}x + \eta C\sum_{i=1}^2\int_\Omega(|(u_i)_+|^2 + |(u_i)_-|^2)\mathrm{d}x + \\
&\quad\frac{C(c_1, c_2)}{\eta}\int_\Omega\chi_h u_1u_2|D^h\ln(m(u_1)m(u_2))|^2\mathrm{d}x + C,
\end{aligned}\tag{24}$$

其中,常数 $C > 0$ 只与 $R_i, \beta_{ij}(i, j = 1, 2), |\Omega|$ 和 $\|\nabla U\|_2$ 有关,常数 $C(\tau, R_i, \beta_{ij}, |\Omega|)$ 与 τ 成正比,记号 $(s)_- := \min\{0, s\}$.

证明 设 (u_1, u_2) 是问题(8)的解,即 $u_i \in H^1(\Omega)$ 满足(22)式. 选取光滑函数序列 $\{v^\varepsilon\}$, 使得在 $H^1(\Omega)$ 上 $v^\varepsilon \to (u_1)_+$, 且在 Ω 上 $v^\varepsilon \geqslant 0$. 在(22)式中取 $\varphi_1 = \ln(v^\varepsilon + \eta)$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\frac{u_1 - u_1^{k-1}}{\tau}\ln(v^\varepsilon + \eta)\mathrm{d}x + \\
&\quad\int_\Omega(c_1\nabla u_1 + 2a_1m(u_1)\nabla u_1 + d_1(u_1)_+\nabla U)\cdot\nabla\ln(v^\varepsilon + \eta)\mathrm{d}x + \\
&\quad\int_\Omega\chi_h u_1u_2D^h\ln(m(u_1)m(u_2))D^h\ln(v^\varepsilon + \eta)\mathrm{d}x = \\
&\quad\int_\Omega[R_1 - \beta_{11}m(u_1) - \beta_{12}m(u_2)]m(u_1)\ln(v^\varepsilon + \eta)\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{25}$$

注意到,在 $L^{2\cdot2^*/(2+2^*)}(\Omega)$ 上有 $m(u_1)\nabla\ln(v^\varepsilon + \eta) \rightharpoonup m(u_1)\nabla\ln m(u_1) = \nabla(u_1)_+$ 和 $\|m(u_1)\nabla\ln(v^\varepsilon + \eta)\|_2 \leqslant \|m(u_1)/(v^\varepsilon + \eta)\|_\infty\|\nabla v^\varepsilon\|_2 \leqslant C$, 其中常数 $C > 0$ 与 ε 无关,记号"$\rightharpoonup$"表示弱收敛. 因此在 $L^2(\Omega)$ 上, $m(u_1)\nabla\ln(v^\varepsilon + \eta) \rightharpoonup m(u_1)\nabla\ln m(u_1) = \nabla(u_1)_+$. 由 $\nabla u_1 \in L^2(\Omega)$ 知,当 $\varepsilon \to 0$ 时,有

$$\int_\Omega m(u_1)\nabla u_1\cdot\nabla\ln(v^\varepsilon + \eta)\mathrm{d}x \to \int_\Omega|\nabla(u_1)_+|^2\mathrm{d}x.$$

由于在 $H^1(\Omega)$ 上 $\ln(v^\varepsilon + \eta) \to \ln m(u_1)$, 因此在(25)式中令 $\varepsilon \to 0$, 可得

$$\int_\Omega\left[c_1\frac{|\nabla(u_1)_+|^2}{m(u_1)}+2a_1|\nabla(u_1)_+|^2+\right.$$
$$\left.\chi_h u_1u_2D^h\ln(m(u_1)m(u_2))D^h\ln m(u_1)\right]\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega\frac{u_1-u_1^{k-1}}{\tau}\ln m(u_1)\mathrm{d}x-\int_\Omega|d_1\nabla U\cdot\nabla(u_1)_+|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_\Omega[R_1-\beta_{11}m(u_1)-\beta_{12}m(u_2)]m(u_1)\ln m(u_1)\mathrm{d}x. \tag{26}$$

类似地，通过选取光滑函数序列$\{w^\varepsilon\}$，使得在$H^1(\Omega)$上$w^\varepsilon\to(u_2)_+$，并且在区域Ω上$w^\varepsilon\geqslant 0$，也可以推出$\int_\Omega m(u_2)\nabla u_2\cdot\nabla\ln(w^\varepsilon+\eta)\mathrm{d}x\to\int_\Omega|\nabla(u_2)_+|^2\mathrm{d}x$以及

$$\int_\Omega\left[c_2\frac{|\nabla(u_2)_+|^2}{m(u_2)}+2a_2|\nabla(u_2)_+|^2+\right.$$
$$\left.\chi_h u_1u_2D^h\ln(m(u_1)m(u_2))D^h\ln m(u_2)\right]\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega\frac{u_2-u_2^{k-1}}{\tau}\ln m(u_2)\mathrm{d}x-\int_\Omega|d_2\nabla U\cdot\nabla(u_2)_+|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_\Omega[R_2+\beta_{21}m(u_1)-\beta_{22}m(u_2)]m(u_2)\ln m(u_2)\mathrm{d}x. \tag{27}$$

于是由(26)式和(27)式得

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{2}\left(c_i\frac{|\nabla(u_i)_+|^2}{m(u_i)}+2a_i|\nabla(u_i)_+|^2\right)+\right.$$
$$\left.\chi_h u_1u_2|D^h\ln(m(u_1)m(u_2))|^2\right]\mathrm{d}x+$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{u_i-u_i^{k-1}}{\tau}\ln m(u_i)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|d_i\nabla U\cdot\nabla(u_i)_+|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega[R_i+(-1)^i\beta_{i1}m(u_1)-\beta_{i2}m(u_2)]m(u_i)\ln m(u_i)\mathrm{d}x. \tag{28}$$

接下来，估计式(28)中的各项．由于$x(\ln x-\ln y)\geqslant x-y$对任意的$x,y>0$成立，因此

$$\int_\Omega\frac{u_i-u_i^{k-1}}{\tau}\ln m(u_i)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega\left\{m(u_i)\ln m(u_i)-m(u_i^{k-1})\ln m(u_i^{k-1})+\right.$$
$$\left.m(u_i^{k-1})[\ln m(u_i^{k-1})-\ln m(u_i)]\right\}\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega[(u_i)_--(u_i^{k-1})_-]\ln m(u_i)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega\left\{m(u_i)[\ln m(u_i)-1]+(u_i)_-\ln\eta\right\}\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega\left\{m(u_i^{k-1})[\ln m(u_i^{k-1})-1]+(u_i^{k-1})_-\ln\eta\right\}\mathrm{d}x. \tag{29}$$

对(28)式的左端最后一项运用Young不等式，得

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|d_i\nabla U\cdot\nabla(u_i)_+|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega a_i|\nabla(u_i)_+|^2\mathrm{d}x+C(a_1,a_2,d_1,d_2,\|\nabla U\|_2). \tag{30}$$

由于条件(4)成立,因此由命题2.2得

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega [R_i+(-1)^i\beta_{i1}m(u_1)-\beta_{i2}m(u_2)]m(u_i)\ln m(u_i)\mathrm{d}x=$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega R_i m(u_i)\ln m(u_i)\mathrm{d}x+\int_\Omega I(m(u_1),m(u_2))\mathrm{d}x\leqslant$$
$$3|\Omega|\sum_{i=1}^{2}(R_i+\beta_{i1}+\beta_{i2})+(2R_1+\beta_{11}+\beta_{22})\int_\Omega|(u_1)_+|^2\mathrm{d}x+$$
$$(2R_2+\beta_{12}+2\beta_{21}+\beta_{22})\int_\Omega|(u_2)_+|^2\mathrm{d}x, \tag{31}$$

其中 $I(x,y)$ 由命题2.2确定. 因为引理2.1的条件成立,所以可以将对 u_i 的讨论运用到 $(u_i)_+$ 上,从而还能推出

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{c_i}{2}|\nabla(u_i)_+|^2+\frac{(u_i)_+^2}{4\tau}+\frac{2a_im(u_i)}{1+\gamma m(u_i)}|\nabla(u_i)_+|^2\right)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x+C(\tau),$$

这里的常数 $C(\tau)$ 仅依赖于 τ. 因此

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|(u_i)_+|^2\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega 4(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x+C(\tau), \tag{32}$$

其中 $C(\tau)=4\tau C(\tau)$. 由(31)式和(32)式知

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega[R_i+(-1)^i\beta_{i1}m(u_1)-\beta_{i2}m(u_2)]m(u_i)\ln m(u_i)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C(\tau,R_i,\beta_{ij},|\Omega|)+C\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(u_i^{k-1})^2\mathrm{d}x, \tag{33}$$

其中常数 $C(\tau,R_i,\beta_{ij},|\Omega|)$ 与 τ 成正比. 将(29)~(30)式和(33)式代入(28)式,即得(23)式.

同上可得估计式(24). 此时,只要在(22)式中取检验函数 $\varphi_i=v_i^\varepsilon(i=1,2)$,其中,$\{v_i^\varepsilon\}$ 为光滑函数序列,并满足:在 $H^1(\Omega)$ 上 $v_i^\varepsilon\to(u_i)_-$,且在 $\{u_i\geqslant 0\}$ 上 $v_i^\varepsilon=0$. □

2.3 问题(1)解的存在性

下面说明问题(8)的解的极限就是问题(1)的弱解. 我们分5步进行证明.

步骤1 改写问题(8)

设 $(u_1^k,u_2^k)\in(H^1(\Omega))^2$ 是问题(8)的解. 令 $u_i^{(\tau)}(x,t)=u_i^k(x)$, $\forall(x,t)\in\Omega\times((k-1)\tau,k\tau]$. 改写逼近问题(8)为

$$\begin{cases} D_t^\tau u_i^{(\tau)}-\mathrm{div}[c_i\nabla u_i^{(\tau)}+2a_im(u_i^{(\tau)})\nabla u_i^{(\tau)}+d_i(u_i^{(\tau)})_+\nabla U]-\\ \qquad D^{-h}\left[\chi_h\overline{u_1^{(\tau)}}\,\overline{u_2^{(\tau)}}D^h\ln(m(u_1^{(\tau)})m(u_2^{(\tau)}))\right]=\\ \qquad f_i(m(u_1^{(\tau)}),m(u_2^{(\tau)})), & x\in\Omega,\\ (c_i\nabla u_i^{(\tau)}+2a_im(u_i^{(\tau)})\nabla u_i^{(\tau)}+d_i(u_i^{(\tau)})_+\nabla U)\cdot\gamma=0,\\ & x\in\partial\Omega,\ i=1,2,\end{cases} \tag{34}$$

且问题(34)与问题(1)具有相同的初始条件. 其中

$$D_t^\tau v(x,t):=\frac{v(x,t+\tau)-v(x,\tau)}{\tau},\qquad(x,t)\in\Omega\times[0,\infty).$$

步骤2 问题(34)的解关于 τ 和 h 的先验估计

条件(3)和(4)及注2.1说明命题2.1和命题2.2的条件成立．因此由结论A和引理2.2知，若对任意固定的 $0<\eta<1$，参数 τ 和 h 满足关系式 $32\tau\leqslant h^2\eta^2$，则问题(8)，即问题(34)存在弱解，并且这个解满足引理2.2的结论．所以类似于文献[14]，由引理2.2可导出如下结论．

结论B　设 $T>0$，则以下估计对 $i=1,2$ 成立：

$$\|\nabla(u_i^{(\tau)})_+\|_{2,T}+\|(u_i^{(\tau)})_+\|_{L^\infty(0,T;L_\Psi(\Omega))}\leqslant C,$$

$$\|\chi_h\sqrt{\overline{u_1^{(\tau)}}\,\overline{u_2^{(\tau)}}}D^h\ln(m(u_1^{(\tau)})m(u_2^{(\tau)}))\|_{2,T}\leqslant C,$$

$$\|\nabla(u_i^{(\tau)})_-\|_{2,T}+\|(u_i^{(\tau)})_-\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant C/\eta,$$

其中常数 $C>0$ 不依赖于 c_1, c_2, h, τ 和 η．此外，还有

$$\|u_i^{(\tau)}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|u_i^{(\tau)}\|_{p,T}\leqslant C(\eta),$$

$$\|D_t^\tau u_i^{(\tau)}\|_{L^{r'}(0,T;(W^{1,r'}(\Omega))')}\leqslant C(\eta),$$

这里的 $p=(2N+2)/N$，常数 r 和 r' 由定理1.1定义，常数 $C(\eta)>0$ 与 τ 和 h 无关．

在接下来的内容里出现的常数 p, r 以及 r' 都是由结论B确定．

步骤3　对固定的 $0<\eta<1$，取极限 $\tau, h\to 0^+$

结论C　设对任意固定的 $0<\eta<1$，τ 和 h 满足 $32\tau\leqslant h^2\eta^2$．则当 $\tau, h\to 0^+$ 时，存在函数列 (u_1^η, u_2^η)（可能是函数列 (u_1^η, u_2^η) 的子列，但仍记为 (u_1^η, u_2^η)），使得对 $i=1,2$，有

在 $(L^2(Q_T))^N$ 上，$\nabla u_i^{(\tau)}\rightharpoonup\nabla u_i^\eta$，在 $(L^r(Q_T))^N$ 上，$m(u_i^{(\tau)})\nabla u_i^{(\tau)}\rightharpoonup m(u_i^\eta)\nabla u_i^\eta$，

在 $(L^2(Q_T))^N$ 上，$\chi_h\overline{u_1^{(\tau)}}\,\overline{u_2^{(\tau)}}D^h\ln(m(u_1^{(\tau)})m(u_2^{(\tau)}))\rightharpoonup\overline{u_1^\eta}\,\overline{u_2^\eta}\nabla\ln(m(u_1^\eta)m(u_2^\eta))$，

在 $(L^r(Q_T))^N$ 上，$d_i(u_i^{(\tau)})_+\nabla U\rightharpoonup d_i(u_i^\eta)_+\nabla U$，

在 $L^{r'}(0,T;(W^{1,r'}(\Omega))')$ 上，$D_t^\tau u_i^{(\tau)}\rightharpoonup\partial_t u_i^\eta$，

在 $(L^{p/2}(Q_T))^N$ 上，$f_i(m(u_1^{(\tau)}), m(u_2^{(\tau)}))\rightharpoonup f_i(m(u_1^\eta), m(u_2^\eta))$．

在问题(34)的积分形式中令 $\tau, h\to 0^+$（此时仍要求 τ 和 h 满足不等式 $32\tau\leqslant h^2\eta^2$），可知，对任意的 $\varphi_i\in L^{r'}(0,T;W^{1,r'}(\Omega))$，$i=1,2$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle\partial_t u_i^\eta,\varphi_i\rangle_{(W^{1,r'}(\Omega))',W^{1,r'}(\Omega)}\mathrm{d}t+\int_{Q_T}(c_i\nabla u_i^\eta+2a_i m(u_i^\eta)\nabla u_i^\eta)\cdot\nabla\varphi_i\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\&\quad\int_{Q_T}[\overline{u_1^\eta}\,\overline{u_2^\eta}\nabla\ln(m(u_1^\eta)m(u_2^\eta))+d_i(u_i^\eta)_+\nabla U]\cdot\nabla\varphi_i\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\\&\quad\int_{Q_T}f_i(m(u_1^\eta),m(u_2^\eta))\varphi_i\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{35}$$

由结论B以及结论C还可以推出，函数 $u_i^\eta(i=1,2)$ 满足 $u_i^\eta\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^p(Q_T)$，$(u_i^\eta)_+\in L^\infty(0,T;L_\Psi(\Omega))$ 和 $(u_i^\eta)_-\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$．

步骤4　取极限 $\eta\to 0^+$

结论D（对 η 的先验估计）　设 $T>0$，则存在不依赖于 c_1, c_2 和 η 的常数 $C>0$，使得对 $i=1,2$，有

$$\|\nabla(u_i^\eta)_+\|_{2,T}+\|(u_i^\eta)_+\|_{L^\infty(0,T;L_\Psi(\Omega))}\leqslant C,$$

$$\|\ln\eta(u_i^\eta)_-\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\leqslant C,$$

$$\|\sqrt{\overline{u_1^\eta}\,\overline{u_2^\eta}}\nabla\ln(m(u_1^\eta)m(u_2^\eta))\|_{2,T}\leqslant C,$$

$$\|\partial_t u_i^\eta\|_{L^{r'}(0,T;(W^{1,r'}(\Omega))')}\leqslant C,$$

$$\|\nabla(u_i^\eta)_-\|_{2,T}+\|(u_i^\eta)_-\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant C,$$
$$\|u_i^\eta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|u_i^\eta\|_{p,T}\leqslant C.$$

结论 E 令 $\eta\to 0^+$, 则存在函数 $u_1, u_2\geqslant 0$, 使得以下极限对 $i=1,2$ 成立(可能是函数列 (u_1^η, u_2^η) 的子列收敛, 但仍记为(u_1^η, u_2^η)):

在 $(L^2(Q_T))^N$ 上, $c_i\nabla u_i^\eta\to c_i\nabla u_i$, 在$(L^r(Q_T))^N$ 上 $2a_i m(u_i^\eta)\nabla u_i^\eta\to 2a_i u_i\nabla u_i$,

在 $(L^2(Q_T))^N$ 上, $\overline{u_1^\eta}\,\overline{u_2^\eta}\nabla\ln(m(u_1^\eta)m(u_2^\eta))\to\nabla(u_1u_2)$,

在 $(L^r(Q_T))^N$ 上, $d_i(u_i^\eta)_+\nabla U\to d_iu_i\nabla U$,

在 $L^r(0,T;(W^{1,r'}(\Omega))')$ 上, $\partial_t u_i^\eta\to\partial_t u_i$,

在 $(L^{p/2}(Q_T))^N$ 上, $f_i(m(u_1^\eta), m(u_2^\eta))\to f_i(u_1,u_2)$,

步骤 5 完成定理 1.1 的证明

对问题(35) 应用结论 E, 立即可得定理 1.1 的结论.

注 2.3 除引理 2.1 以外, 本文导出的所有先验估计都与空间维数 N 无关. 对空间维数的限制($N\leqslant 3$) 仅在证明引理 2.1 时用到. 正如在注 2.2 中所阐述的那样, 当 $\beta_{ij}=0\ (i,j=1,2)$ 时, 引理 2.1 的结论对任意维数的空间都成立. 因此只要 $\beta_{ij}=0\ (i,j=1,2)$, 那么定理 1.1 的结论对任意维数的空间也成立.

致谢 在本文的成稿过程中, 导师王明新教授给予了很多有益的帮助及建议, 作者在此表示由衷地感谢. 本文的作者也同样衷心地感谢审稿老师和编委老师所提供的帮助及对本文仔细的审阅.

[参 考 文 献]

[1] Mimura M, Kawasaki K. Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations[J]. J Math Biol, 1980, **9**(1): 49-64.

[2] Shigesada N, Kawasaki K, Teramoto E. Spatial segregation of interacting species[J]. J Theor Biol, 1979, **79**(1): 83-99.

[3] Kuto K, Yamada Y. Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion[J]. J Diff Equns, 2004, **197**(2): 315-348.

[4] Okubo A, Levin L A. Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspective[M]. Interdisciplinary Applied Mathematics, 2nd Edition, Vol. **14**. New York: Springer, 2001.

[5] Amann H. Dynamic theory of quasilinear parabolic equations Ⅱ: reaction-diffusion systems[J]. Differential Integral Equations, 1990, **3**(1): 13-75.

[6] Amann H. Dynamic theory of quasilinear parabolic equations III: Global existence[J]. Math Z, 1989, **202**(2): 219-250.

[7] Choi Y S, Lui R, Yamada Y. Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with weak cross-diffusion[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2003, **9**(5): 1193-1200.

[8] Choi Y S, Lui R, Yamada Y. Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-diffusion[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2004, **10**(3): 719-730.

[9] LOU Yuan, NI Wei-ming, WU Ya-ping. On the global existence of a cross-diffusion system[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 1998, **4**(2): 193-203.

[10] Pang P Y H, WANG Ming-xin. Existence of global solutions for a three-species predator-prey model with cross-diffusion[J]. Mathematische Nachrichten, 2008, **281**(4): 555-560.

[11] Shim S A. Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with a single nonzero

cross-diffusion[J]. J Math Anal Appl, 2003, **279**(1): 1-21.

[12] WU Ya-ping. Qualitative studies of solutions for some cross-diffusion systems[A]. In: Li T T, Mimura M, Nishiura Y, et al, Eds. China-Japan Symposium on Reaction-Diffusion Equations and Their Applications and Computational Aspects[C]. Singapore: World Scientific, 1997, 177-187.

[13] Knies S. Schwache Lösungen von halbleitergleichungen im falle von ladungstransport mit streueffekten[D]. Germany: Universität Bonn, 1997.

[14] CHEN Li, Jüngel A. Analysis of a multidimensional parabolic population model withstrong cross-diffusion[J]. SIAM J Math Anal, 2004, **36**(1): 301-322.

[15] CHEN Xin-fu, QI Yuan-wei, WANG Ming-xin. A strongly coupled predator-prey system with non-monotonic functional response[J]. Nonlinear Anal TMA, 2007, **67**(6): 1966-1979.

[16] CHEN Xin-fu, QI Yuan-wei, WANG Ming-xin. Steady states of a strongly coupled prey-predator model[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2005, (suppl): 173-180.

[17] Pao C V. Strongly coupled elliptic systems and applications to Lotka-Volterra models with cross diffusion[J]. Nonlinear Anal TMA, 2005, **60**(7): 1197-1217.

[18] Pang P Y H, WANG Ming-xin. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model[J]. J Differential Equations, 2004, **200**(2): 245-273.

[19] Ryu K, Ahn I. Positive solutions for ratio-dependent predator-prey interaction systems[J]. J Differential Equations, 2005, **218**(1): 117-135.

[20] WANG Ming-xin. Stationary patterns of strongly coupled prey-predator models[J]. J Math Anal Appl, 2004, **292**(2): 484-505.

[21] Dung L. Cross diffusion systems on n spatial dimensional domains[J]. Indiana Univ Math J, 2002, **51**(3): 625-643.

[22] LOU Yuan, Martínez S, NI Wei-ming. On 3×3 Lotka-Volterra competition systems with cross-diffusion[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2000, **6**(1): 175-190.

Global Existence of Weak Solutions to a Prey-Predator Model With Strong Cross-Diffusion

LI Hui-ling

(Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210018, P. R. China)

Abstract: By using finite differences and entropy inequalities, the global existence of weak solutions to a multidimensional parabolic strongly coupled prey-predator model is obtained. Furthermore, the non-negativity of such solution is also given.

Key words: prey-predator model; strong cross-diffusion; entropy functional; existence of weak solutions; Orlicz space