应用数学和力学, 第 30 卷 第 6 期
2009 年 6 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 6, Jun. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009)06-0663-04

半正定张量半正定方根唯一性的直接证明*

邵 , 吕存景

(清华大学 航天航空学院 工程力学系 断裂力学实验室, 北京 100084)

(郑泉水推荐)

摘要: 研究半正定张量半正定方根的唯一性问题. 避开了二阶张量特征值的概念和对称二阶张量谱分解定理, 运用简单的预备知识, 直接证明了二阶半正定张量半正定方根的唯一性.

关 键 词: 半正定; 二阶张量; 唯一性; 分解

中图分类号: O183.2; O34 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.005

引 言

在连续介质力学中进行大变形的几何分析时, 通常需要对变形梯度张量进行极分解, 变形梯度张量的左右极分解定理是一个非常重要的定理, 对连续介质力学的发展起着至关重要的作用. 目前, 具有不同功效的新材料发展迅速, 并在工业领域和日常生活中得到了广泛的应用. 对于某些非传统材料(如生物材料、理想弹塑性材料)而言, 其部分力学和物理特性必须要借助于半正定张量来描述[1-4]. 为求解与这些量相关的问题, 了解半正定张量的运算性质具有基本的重要性. 因此, 二阶半正定张量半正定方根的唯一性值得深入研究. 另外, 由于描述部分生物材料和塑性变形的变形梯度张量有可能从正则扩展到非正则, 而二阶半正定张量的半正定方根的唯一性为扩展极分解定理提供了理论基础[5]. 因此, 为了更好地通过扩展极分解定理的表述来研究这些材料的力学行为, 我们必须要关注半正定张量的半正定方根的唯一性问题. 在证明正则的变形梯度张量具有唯一的极分解形式时, 一个非常重要的中间定理就是二阶正定张量正定方根的唯一性定理. 此唯一性定理受到学者们的广泛关注, 但是传统的证明方法过于复杂. Stephenson[6] 曾经给出过一个简洁的证明方法. 此后, He[7] 在不使用二阶张量特征值和特征向量概念的前提下, 给出了一个更加直接的证明方法. 本文借鉴文献[7]在证明二阶正定张量正定方根唯一性定理中使用的方法, 避开二阶张量的特征值、特征向量以及二阶对称张量谱分解定理等涉及复杂线性代数的知识, 对 N 维空间上二阶半正定张量的半正定方根的唯一性给出了直接的证明. 在本文的工作之前, 没有见过类似的报道.

* 收稿日期: 2009-03-30; 修订日期: 2009-05-08
作者简介: 邵 (1986—), 男, 重庆人, 硕士生(E-mail: shaoy04@mails.tsinghua.edu.cn);
吕存景(1981—), 男, 河南南阳人, 硕士生(联系人. Tel: +86-10-62783814; E-mail: lvcj05@mails.tsinghua.edu.cn).

1 引　理

在证明之前,我们先回顾一下 N 维内积空间 V 中半正定二阶张量 $\boldsymbol{S}$ 的定义:

(ⅰ) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V;$

(ⅱ) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in V\setminus\{\boldsymbol{0}\};$

其中, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 N 维内积空间 V 中的任意非零矢量,"$\cdot$"表示内积运算. 条件(ⅰ)保证了二阶张量 $\boldsymbol{S}$ 的对称性;条件(ⅱ)保证了二阶张量 $\boldsymbol{S}$ 的半正定性.

为了证明二阶半正定张量的半正定方根的唯一性,我们还需要运用如下两个引理.

引理 1　在 N 维内积空间 V 中,对于任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 和任意二阶对称张量 $\boldsymbol{S}$,如下定理成立:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in V.$$

证明

充分性　显然对任意的矢量 $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ 成立,即引理的充分性得证.

必要性　由于原命题与其逆否命题同真假,证明必要性等价于证明如下命题:当二阶对称张量 $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{0}$ 时,存在矢量 $\boldsymbol{u} \in V$,使得 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} \neq 0$. 接下来我们对 $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{0}$ 的情况作如下讨论:

(ⅰ) 当在某组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下, $\boldsymbol{S}$ 的矩阵表示中至少存在一个对角线元素不为 0 时

不妨设 $S_{ii} \neq 0$(对 i 不求和),那么在这组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下,取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$,则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_i = S_{ii} \neq 0 \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}).$$

(ⅱ) 当在某组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下, $\boldsymbol{S}$ 的矩阵表示中的所有对角线元素都为 0,但至少存在一个非对角元素不为 0 时

不妨设 $S_{ij} \neq 0 (i \neq j)$,那么在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下,取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$,则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_i + 2\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_j = 2S_{ij} \neq 0 \quad (\text{对 } i, j \text{ 不求和}).$$

综合情况(ⅰ)、(ⅱ),可以得到如下结论:当二阶对称张量 $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{0}$ 时,存在矢量 $\boldsymbol{u} \in V$,使得 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} \neq 0$. 从而其逆否命题也成立,即:如果对任意矢量 $\boldsymbol{u} \in V$,二阶对称张量 $\boldsymbol{S}$ 满足 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = 0$,那么 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$. 因此引理的必要性得证.

至此,引理 1 得证. □

引理 2　对于 N 维内积空间 V 中的二阶实对称张量 $\boldsymbol{S}$,

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0}.$$

证明　当 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 时,显然有 $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0}$ 成立. 下面我们证明如果 $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0}$ 成立,那么 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 成立.

当 $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0}$ 时,其在任意一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下的矩阵表示中的各个对角元素都为 0,即

$$\sum_{j=1}^{N} S_{ij}S_{ji} = \sum_{j=1}^{N} S_{ij}S_{ij} = \sum_{j=1}^{N} S_{ij}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N). \tag{1}$$

因为 $\boldsymbol{S}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下的矩阵表示中所有分量都为实数,所以由(1)式得到 $S_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \cdots, N)$,即: $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$.

综上, $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$. 至此,引理 2 得证. □

2 直接证明

下面我们来证明二阶半正定张量半正定方根的唯一性定理.

二阶半正定张量半正定方根的唯一性定理　对于任意二阶半正定张量 $\boldsymbol{S}$,存在唯一的二

阶半正定张量 $\boldsymbol{U}$, 满足: $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{S}$.

证明　采用反证法, 我们作如下假设: 假设存在另一个二阶半正定张量 $\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ 均满足

$$\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{S}, \tag{2}$$

则(2)式等价于

$$2(\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{V}^2)=(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\cdot(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})+(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})\cdot(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})=\boldsymbol{0}. \tag{3}$$

取二阶对称张量 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}$, 则由假设出发可以得到如下结果: 存在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{0}$, 满足

$$\boldsymbol{X}:[(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})]=0. \tag{4}$$

引进 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e}_i=\sum_{k=1}^{N}X_{kl}\boldsymbol{e}_k$, $\left\{\boldsymbol{e}_i\right\}$ 为在 N 维欧氏空间 V 中任意选定的一组标准正交基, 由于 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{x}_i$ 不全为 0, 不难得到[7]

$$\boldsymbol{X}:[(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})]=2\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\cdot(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{x}_i=0. \tag{5}$$

又因为 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ 均为半正定张量, 则由定义得

$$\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x}_i\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}_i\geqslant 0\qquad (\text{对 } i \text{ 不求和}, i=1,2,\cdots,N). \tag{6}$$

因此, 要使得(5)式成立, 只能满足

$$\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x}_i=0,\quad \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}_i=0\qquad (\text{对 } i \text{ 不求和}, i=1,2,\cdots,N). \tag{7}$$

将 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{X}$ 代入(7)式, 得

$$\boldsymbol{x}_i\cdot(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{x}_i=-\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{x}_i=0\qquad (\text{对 } i \text{ 不求和}, i=1,2,\cdots,N). \tag{8}$$

再将 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e}_i=\sum_{k=1}^{N}X_{kl}\boldsymbol{e}_k$ 代入(8)式, 立即得到

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{X}^3\cdot\boldsymbol{e}_i=0\qquad (\text{对 } i \text{ 不求和}, i=1,2,\cdots,N). \tag{9}$$

由于 $\left\{\boldsymbol{e}_i\right\}$ 是 N 维欧氏空间 V 中任意选定的一组标准正交基, 那么当取遍 N 维欧氏空间 V 中所有的标准正交基时, 对应的(9)式也成立, 所以(9)式可以写为如下的等价形式:

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{X}^3\cdot\boldsymbol{e}=0. \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 可以取遍 V 中的所有单位矢量. 再取任意实数 λ, 当 λ 取遍实数域时, 在(10)式的基础上可以进一步得到

$$\lambda\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{X}^3\cdot\lambda\boldsymbol{e}\equiv 0, \tag{11}$$

其中, $\lambda\boldsymbol{e}$ 可取遍 N 维欧氏空间 V 中所有的矢量. 因此(11)式可以被等价地写为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{X}^3\cdot\boldsymbol{u}\equiv 0,\qquad \forall\,\boldsymbol{u}\in V, \tag{12}$$

$\boldsymbol{u}$ 是 N 维欧氏空间 V 中任意的矢量. 根据引理 1, 由(12)式得到 $\boldsymbol{X}^3=\boldsymbol{0}$, 因此有 $\boldsymbol{X}^4=\boldsymbol{X}^3\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^2\cdot\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{X}^2$ 是二阶实对称张量. 所以由引理 2, 得 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{0}$; 由于 $\boldsymbol{X}$ 是二阶实对称张量, 则再用引理 2, 进一步得到 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$. 这与原先的假设: 存在另一个二阶半正定张量 $\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{U}$, 二者均满足 $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{S}$ 相矛盾. 所以二阶半正定张量的半正定方根是唯一的.

□

3 结　　论

另外, 正如 He[7] 在文章中提到的, 这里的直接证法对内积空间 V 的维数 N 没有任何限制, 并且如果将上述证明过程中的 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{S}$ 同时改为半负定二阶对称张量, 也不会改变证明的过程和结果. 因此对于半负定二阶对称张量, 也存在同样的半负定方根唯一性定理. 二阶半正

(负)定张量半正(负)定方根唯一性定理将会对人们运用连续介质力学理论研究新材料的力学问题提供强有力的理论指导.

致谢 本文作者衷心感谢郑泉水教授在本文形成过程中的悉心指导.

[参 考 文 献]

[1] Garikipati K, Arruda E M, Grosh K, et al. A continuum treatment of growth in biological tissue: the coupling of mass transport and mechanics[J]. J Mech Phys Solids, 2004, **52**(7): 1595-1625.

[2] Häusler O, Schick D, Tsakmakis Ch. Description of plastic anisotropy effects at large deformations—part Ⅱ: the case of transverse isotropy[J]. Internat J Plasticity 2002, **20**(2): 199-223.

[3] Ehret A E, Itskov M. Modeling of anisotropic softening phenomena: application to soft biological tissues[J]. Internat J Plasticity, 2008, **25**(5): 901-919.

[4] Schröder J, Neff P, Ebbing V. Anisotropic polyconvex energies on the basis of crystallographic motivated structural tensors[J]. J Mech Phys Solids, 2008, **56**(12): 3486-3506.

[5] Jog C S. On the explicit determination of the polar decomposition in n-dimensional vector spaces [J]. J Elasticity, 2002, **66**(2): 159-169.

[6] Stephenson R A. On the uniqueness of the square-root of a symmetric, positive-definite tensor[J]. J Elasticity, 1980, **10**(2): 213-214.

[7] He Q C. A direct proof of the uniqueness of the square-root of a positive-definite tensor[J]. J Elasticity, 1997, **47**(3): 251-253.

Direct Proof of the Uniqueness of the Square-Root of a Positive Semi-Definite Tensor

SHAO Yue, LÜ Cun-jing

(Fracture Mechanics Laboratory, Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R.China)

Abstract: Understanding the basic properties of the positive semi-definite tensor is prerequisite for its wide application in theoretical and practical field, especially for its square-root. The uniqueness of the square-root of a positive semi-definite tensor was proven without resorting to the notion of eigenvalues, eigenvectors and the spectral decomposition of the second-order symmetric tensor.

Key words: positive semi-definite tensor; second-order tensor; uniqueness; decomposition