

分段线性非线性汽车悬架系统的分岔行为*

钟 顺^{1,2,3}, 陈予恕^{1,2,3}

- (1. 天津大学 机械学院 非线性动力学研究中心, 天津 300072;
2. 天津大学 内燃机燃烧学国家重点实验室, 天津 300072;
3. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 建立了由主、副簧组成的分段线性非线性悬架系统动力学模型, 应用奇异性理论研究了两个自由度汽车悬架系统共振解的分岔, 得到系统的转迁集和 40 组分岔图, 发现了非常复杂的局部分岔, 分岔图全面展示了这一系统的分岔特性. 由系统参数与该系统的拓扑分岔解之间的联系, 分析并得到了不同参数下系统的运动特性, 为实现悬架参数的优化控制提供了理论依据.

关键词: 汽车悬架; 奇异性理论; 分段线性-非线性系统; 分岔

中图分类号: TB535; O322 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.001

引 言

非线性因素广泛的存在于汽车系统内. 进入 21 世纪, 随着电液控制、计算机技术的发展, 传感器、微处理器以及电、液控制元件制造技术的提高以及新材料研究的深入, 汽车悬架的性能及控制技术得到不断提高, 其结构也得到不断改进, 这势必要求汽车悬架的非线性研究不断深入才能够满足汽车工业不废发展的需求^[1-3]. 因此建立汽车非线性悬架模型并利用现代非线性动力学理论、Hopf 分岔理论开展汽车非线性悬架模型的研究, 对于更进一步深入揭示汽车悬架振动行为具有重要的意义.

1 系统模型

将汽车悬架简化成如图 1 所示模型^[4], 其中 M 、 m 分别为簧上质量和簧下质量, k_1 , k_2 和 c_1 , c_2 分别为等效的悬架系统的刚度系数和阻尼系数, k_3 , k_4 和 c_3 , c_4 分别为轮胎的等效弹性刚度系数和阻尼系数. 由动力学理论建立系统的运动微分方程^[5]为

$$\frac{Mb^2 + I \ddot{\cdot}}{(a+b)^2 x_1 + \frac{Mab - I \ddot{\cdot}}{(a+b)^2 x_2 + c_1 x_1 - c_1 x_3 + k_1 x_1 - k_3 x_3 + g_1(x_1, x_3) + g_2(x_1, x_3) = 0,$$

* 收稿日期: 2008-10-23; 修订日期: 2009-05-07

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632040)

作者简介: 钟顺(1983—), 男, 河北易县人, 博士生(联系人. E-mail: ily_00000@163.com);

陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士.

$$\frac{Mab - I \ddot{x}_1}{(a+b)^2} + \frac{Mb^2 + I \ddot{x}_2}{(a+b)^2} + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_3 + k_2 x_2 - k_4 x_4 + g_3(\dot{x}_2, \dot{x}_3) + g_4(x_2, x_4) = 0,$$

$$m \ddot{x}_3 - c_1 \dot{x}_3 + (c_1 + c_3) \dot{x}_3 - k_1 x_1 + (k_1 + k_3) x_3 + g_1(\dot{x}_2, \dot{x}_3) + g_2(x_1, x_3) = F_3,$$

$$m \ddot{x}_4 - c_2 \dot{x}_2 + (c_2 + c_4) \dot{x}_4 - k_2 x_2 + (k_2 + k_4) x_4 + g_3(\dot{x}_2, \dot{x}_3) + g_4(x_2, x_4) = F_4,$$

其中 g_1, g_2, g_3, g_4 为非线性函数.

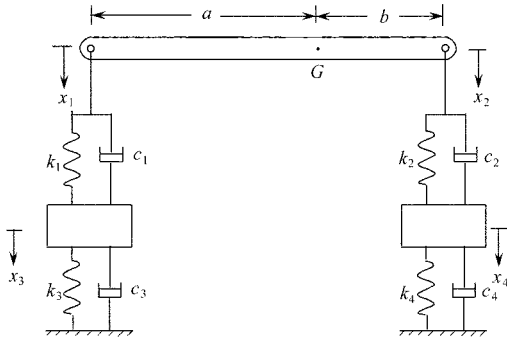


图 1 汽车悬架模型

悬架振动系统的运动方程可简化为

$$\begin{cases} m_1(\ddot{z}_2 + \ddot{z}_{12}) + f_1(z_{12}) + f_2(z_{12}) + k_1 z_{12} + c_1 \dot{z}_{12} = \\ \quad - k_0(z_2 + z_{12} - z_0) - c_0(\dot{z}_2 + \dot{z}_{12} - \dot{z}_0), \\ m_2 \ddot{z}_2 - f_1(z_{12}) - f_2(z_{12}) - k_1 z_{12} - c_1 \dot{z}_{12} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中 m_1 为簧上质量, m_2 为簧下质量.

2 方程的近似解析解

用 KB 法求得汽车悬架系统运动微分方程在主共振情况下, 即 $\lambda_2 = \omega$ 时的一次近似方程^[6]

$$\frac{dY}{dt} = \delta_e(Y) Y - \frac{rk_0 P}{2m_1 \Delta_2 \lambda_2} \cos(\theta - \alpha'), \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = p_e(Y) - \omega + \frac{rk_0 P}{2m_1 \Delta_2 \lambda_2 Y} \sin(\theta - \alpha'), \quad (3)$$

其中, Y 为悬架系统的振幅, θ 为相位, 它们都是时间 t 的函数, λ_2 为悬架系统的第二阶固有频率, $\delta_e(Y)$ 为等效线性衰减指数, $p_e(Y)$ 为等效线性固有频率. 并且有

$$\delta_e(Y) = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m_2 b_1} (a_1 - \lambda_2^2) - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right] (c_0 + c_1 + c_2) H(\alpha, Z) + \frac{1}{a_2} (a_1 - \lambda_2^2) - \frac{1}{2} \left[\frac{c_0}{m_1} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} + \frac{c_1}{m_2 b_1} (a_1 - \lambda_2^2) \right] \right\}, \quad (4)$$

$$p_e(Y) = \lambda_2 + \frac{1}{2 \Delta_2 \lambda_2} \left[\frac{1}{m_2 b_1} (a_1 - \lambda_2^2) - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right] (k_0 + k_1 + k_2) H(\beta, Z), \quad (5)$$

$$H(\alpha, Z) = \frac{1}{Z\pi} (\alpha - 1) \begin{cases} Z \arccos \frac{1}{Z} - \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \end{cases},$$

$$H(\beta, Z) = \frac{1}{Z\pi} (\beta - 1) \begin{cases} Z \arccos \frac{1}{Z} + \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \end{cases},$$

设 k_0, c_0 分别为轮胎的等效弹性刚度系数和阻尼系数; z_2 为 M 的绝对位移, z_{12} 为 m 相对 M 的相对位移, z_0 是路面不平度函数. 在本研究中, 由运动特征设主、副簧组成的悬架系统为分段线性非线性弹性力和阻尼力函数, 则非线性函数 g_1, g_2, g_3, g_4 简化为 $f_1(z_{12}), f_2(z_{12})$, 其表达式

$$f_1(z_{12}) = \begin{cases} 0, & z_{12} < e, \\ k_2 z_{12}, & z_{12} \geq e, \end{cases}$$

$$f_2(z_{12}) = \begin{cases} 0, & z_{12} < e, \\ c_2 \dot{z}_{12}, & z_{12} \geq e. \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{c_0 + c_1}{c_0 + c_1 + c_2}, \quad \beta = \frac{k_0 + k_1}{k_0 + k_1 + k_2}, \quad Z = \frac{Y}{e}, \quad \Delta_2 = 1 + \frac{1}{a_2 b_1} (a_1 - \lambda_2^2)^2,$$

$$b_1 = \frac{k_1}{m_2}, \quad \alpha' = \arctan \frac{c_0 \omega}{k_0}, \quad P = \sqrt{1 + \left(\frac{c_0 \omega}{k_0}\right)^2},$$

$$a_1 = \frac{k_0 + k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_1}, \quad a_2 = -\frac{k_0}{m_1}.$$

令(2)式中 $2\lambda \approx 2\omega$, (3) 式中 $2\lambda \approx p_e(Y) + \omega$. 并使两式右端为 0, 求出系统的定常解为

$$Y = \frac{rk_0 P / (m \Delta_2)}{\sqrt{[p_e(Y)^2 - \omega^2]^2 + 4\omega^2 \delta_e(Y)^2}} \tag{6}$$

$$\theta = \operatorname{arccot} \frac{2\omega \delta_e(Y)}{\omega^2 - p_e(Y)^2} + \alpha', \tag{7}$$

由(6)式和(7)式并根据实际情况选择系统参数^[7]为

$$m_1 = 156.8 \text{ kg}, \quad m_2 = 1274 \text{ kg}, \quad k_0 = 5670 \text{ N/cm}, \quad k_1 = 1620 \text{ N/cm},$$

$$k_2 = 4860 \text{ N/cm}, \quad c_0 = 567 \text{ N}\cdot\text{s/cm}, \quad c_1 = 62.8 \text{ N}\cdot\text{s/cm}, \quad c_2 = 25.6 \text{ N}\cdot\text{s/cm}.$$

绘出当 $e = 4 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$ 时系统的幅频响应曲线和相频响应曲线, 如图 2 所示.

3 定常解的分岔

由图 2(a) 和图 2(b) 可以看出, 当 ω 较小时, 即 $\omega < \omega_D$ 时. 平均方程(2) 和(3) 仅有 1 个稳定的定常解. 当 ω 较大时, 即当 $\omega_D < \omega < \omega_E$ 时, 有 2 个稳定的定常解和 1 个不稳定的定常解. 根据稳定性理论, 此不稳定的定常解为鞍结点^[8]. 当 $\omega > \omega_C$ 时, 仅有 1 个稳定的定常解. 定常解的物理实现决定于起始条件.

当外干扰力频率由大缓慢变小时, 在 D 点, 发生跳跃, 由 D 跳至 B . 同样, 当外干扰力频率由小缓慢变大时, 由 C 点跳至 E . 故在 D, C 两点发生了分岔现象.

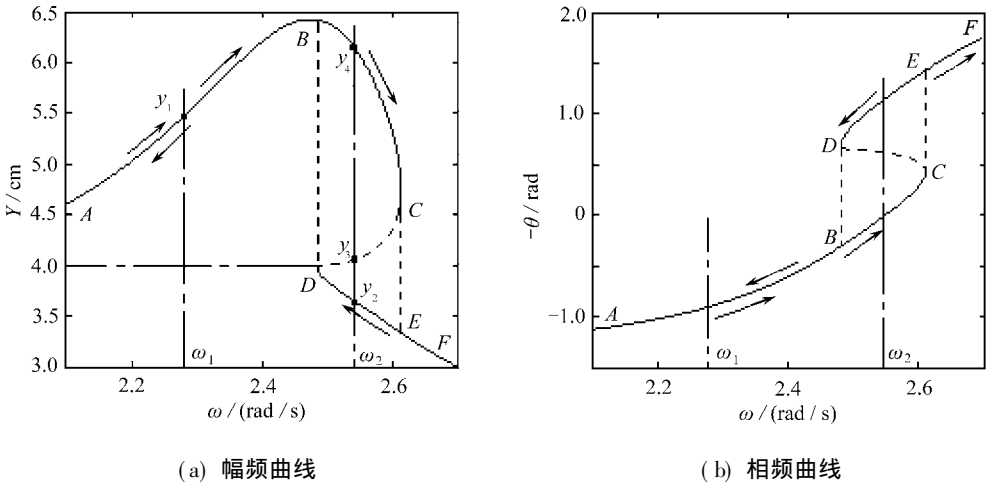


图 2 悬架系统幅频曲线和相频曲线

为了得到在不同参数下系统的运动特性, 我们采用奇异性理论来分析. 通过求解方程(2) 和(3), 可以得到悬架系统主共振情况下(即 $\lambda_2 - \omega = \varepsilon\sigma$, σ 是频率的调谐参数)的周期分岔解的方程为

$$Y^2 \left\{ [p_e(Y)^2 - \omega^2]^2 + 4\omega^2 \delta_e(Y)^2 \right\} = \frac{rk_0 B}{m \Delta_2}, \quad (8)$$

将方程(8)在 $Z = Z_0$ 点作 Taylor 级数展开, 有

$$\begin{aligned} & l_1^4 f_2^4 Z^6 + (4l_1 l_2 f_2^3 + 4l_1^4 f_1 f_2^3) Z^5 + (6l_1^2 l_2^2 f_2^2 + 12l_1 l_2^3 f_1 f_2^2 + 6l_1^4 f_1^2 f_2^2 - 2l_2^2 f_2^2 \lambda_2^2 - \\ & 2l_2^2 f_2^2 \sigma^2 + 4j_2^2 g_2^2 \lambda_2^2 + 4j_2^2 g_2^2 \sigma^2 + 4l_2^2 f_2^2 \lambda_2 \sigma - 8j_2^2 g_2^2 \lambda_2 \sigma) Z^4 + (8j_2^2 g_1 g_2 \lambda_2^2 + \\ & 12l_1 l_2^3 f_1^2 f_2 + 12l_1^2 l_2^2 f_1 f_2 + 8j_1 j_2 g_2 \lambda_2^2 - 4l_2^2 f_1 f_2 \lambda_2^2 - 4l_1 l_2 f_2 \lambda_2^2 + 8l_1 l_2 f_2 \lambda_2 \sigma + \\ & 4l_1^3 l_2 f_2 - 4l_1 l_2 f_2 \sigma^2 + 4l_1^3 f_1^3 f_2 + 8l_2^2 f_1 f_2 \lambda_2 \sigma - 16j_2^2 g_1 g_2 \lambda_2 \sigma - 16j_1 j_2 g_2 \lambda_2 \sigma - \\ & 4l_2^2 f_1 f_2 \sigma^2 + 8j_1 j_2 g_2 \sigma^2 + 8j_2^2 g_1 g_2 \sigma^2) Z^3 + (l_1^4 f_1^4 + 4j_1^2 \lambda_2^2 + 4j_1^2 \sigma^2 - 4\lambda_2^3 \sigma - \\ & 2l_1^2 \lambda_2^2 - 2l_1^2 \sigma^2 + 4\lambda_2 \sigma^3 + 6\lambda_2^2 \sigma^2 + \lambda_2^4 + 8l_1 l_2 f_1 \lambda_2 \sigma + 4j_2^2 g_1^2 \lambda_2^2 - 2l_2^2 f_1^2 \sigma^2 + \\ & l_1^4 + 4l_1^3 l_2 f_1 + 4l_1^2 \lambda_2 \sigma + 4l_1 l_2^3 f_1^3 + 4j_2^2 g_1^2 \sigma^2 - 8j_1^2 \lambda_2 \sigma + 6l_1^2 l_2^2 f_1^2 - 2l_2^2 f_1^2 \lambda_2^2 - \\ & 4l_1 l_2 f_1 \lambda_2^2 - 4l_1 l_2 f_1 \sigma^2 + 4l_2^2 f_1^2 \lambda_2 \sigma + 8j_1 j_2 g_1 \lambda_2^2 - 8j_2^2 g_1^2 \lambda_2 \sigma + 8j_1 j_2 g_1 \sigma^2 + \\ & \sigma^4 - 16j_1 j_2 g_1 \lambda_2 \sigma) Z^2 - \frac{rk_0 B}{m_1 \Delta_2} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{(\alpha - 1)(Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1} \pi - 2Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1} \arcsin(1/Z_0) + 2Z_0^2 - 2)}{2\pi Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1}}, \\ g_2 &= \frac{2(\alpha - 1)(Z_0^2 - 1)}{\pi Z_0^3 \sqrt{Z_0^2 - 1}}, \\ f_1 &= \frac{(\beta - 1)(Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1} \pi - 2Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1} \arcsin(1/Z_0) + 2Z_0^2 + 2)}{2\pi Z_0^2 \sqrt{Z_0^2 - 1}}, \\ f_2 &= \frac{2(\beta - 1)}{\pi Z_0^3 \sqrt{Z_0^2 - 1}}, \\ j_1 &= (2a_1 b_1 m_1 m_2 - 2b_1 m_1 m_2 \lambda_2^2 - a_1 a_2 b_1 c_0 m_2 - a_1 a_2 b_1 c_1 m_2 - a_1 a_2 b_1 c_1 m_1 - \\ & a_1 a_2 c_1 m_1 + a_2 b_1 c_0 m_2 \lambda_2^2 + a_2 b_1 c_1 m_2 \lambda_2^2 + a_2 b_1 c_1 m_1 \lambda_2^2 + \\ & a_2 c_1 m_1 \lambda_2^2) / (2a_2 b_1 m_1 m_2 \Delta_2), \\ j_2 &= (-a_1 c_0 m_1 - a_1 c_1 m_1 - a_1 c_2 m_1 + c_0 m_1 \lambda_2^2 + c_1 m_1 \lambda_2^2 + c_2 m_1 \lambda_2^2 + b_1 c_0 m_1 + \\ & b_1 c_0 m_2 + b_1 c_1 m_1 + b_1 c_1 m_2 + b_1 c_2 m_1 + b_1 c_2 m_2) / (2b_1 m_1 m_2 \Delta_2), \\ l_1 &= \lambda_2 \\ l_2 &= (a_1 k_0 m_1 + a_1 k_1 m_1 + a_1 k_2 m_1 - b_1 k_0 \lambda_2^2 - b_1 k_1 \lambda_2^2 - b_1 k_2 \lambda_2^2 - b_1 k_0 m_1 - \\ & b_1 k_1 m_1 - b_1 k_2 m_1 - b_1 k_0 m_2 - b_1 k_1 m_2 - b_1 k_2 m_2) / (2b_1 m_1 m_2 \Delta_2 \lambda_2). \end{aligned}$$

整理方程(9), 并略去高次项得到分岔方程

$$Z^4 + \alpha_1 \sigma Z^3 + \alpha_2 Z^3 + \alpha_3 \sigma Z^2 + \alpha_4 Z^2 - \alpha_5 = 0, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{n_1}{n_6}, \quad \alpha_2 = \frac{n_2}{n_6}, \quad \alpha_3 = \frac{n_3}{n_6}, \quad \alpha_4 = \frac{n_4}{n_6}, \quad \alpha_5 = \frac{n_5}{n_6}, \\ n_1 &= 8l_1 l_2 f_2 \lambda + 8l_2^2 f_1 f_2 \lambda_2 - 16j_1 j_2 g_2 \lambda_2 - 16j_2^2 g_1 g_2 \lambda_2, \\ n_2 &= 12l_1 l_2^3 f_1^2 f_2 + 12l_1^2 l_2^2 f_1 f_2 + 8j_2^2 g_1 g_2 \lambda_2^2 + 4l_1^4 f_1^3 f_2 + 4l_1^3 l_2 f_2 + 8j_1 j_2 g_2 \lambda_2^2 - \\ & 4l_1 l_2 f_2 \lambda_2^2 - 4l_2^2 f_1 f_2 \lambda_2^2, \end{aligned}$$

$$n_3 = -4\lambda_2^3 + 8l_1 l f_1 \lambda_2 + 4l_1^2 \lambda_2 - 8j_1^2 \lambda_2 + 4l_2^2 f_1^2 \lambda_2 - 8j_2^2 g_1^2 \lambda_2 - 16j_1 j_2 g_1 \lambda_2$$

$$n_4 = l_2^4 f_1^4 + 4j_1^2 \lambda_2^2 - 2l_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 + l_1^4 + 4j_2^2 g_1^2 \lambda_2^2 + 4l_1^3 l f_1 + 4l_1 l_2^3 f_1^3 + 6l_1^2 l_2^2 f_1^2 - 2l_2^2 f_1^2 \lambda_2^2 - 4l_1 l f_1 \lambda_2^2 + 8j_1 j_2 g_1 \lambda_2^2$$

$$n_5 = \frac{rk_0 B}{m \Delta_2}, \quad n_6 = 6l_1^2 l_2^2 f_2^2 + 12l_1 l_2^3 f_2^2 + 6l_1^4 f_1^2 f_2^2 - 2l_2^2 f_2^2 \lambda_2^2 + 4j_2^2 g_2^2 \lambda_2^2$$

4 奇异性分析

根据 G-L 方法^[9], 对方程(8) 作奇异性分析, 得转迁集为

分岔集: B

$$\alpha_3^4 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^3 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 \alpha_4 - \alpha_1^4 \alpha_5 = 0;$$

滞后点集: H

$$Z^4 + \alpha_1 Z^3 \sigma + \alpha_2 Z^3 + \alpha_3 Z^2 \sigma + \alpha_4 Z^2 - \alpha_5 = 0,$$

其中 $\sigma = -(8Z + 3\alpha_2)/(3\alpha_1)$, $-6\alpha_1 Z^2 - 8\alpha_3 Z + 3\alpha_1 \alpha_4 - 3\alpha_2 \alpha_3 = 0$;

双极限点集: D 是空集.

开折参数空间上的转迁集为

$$\Sigma = B \cup H \cup D.$$

由于参数空间是五维空间, 难于在其空间上直观地表示该转迁集, 所以下面主要讨论在该参数空间中在投影平面上的分岔行为. 因为开折参数都是小量, 本文将给出每个参数取不同

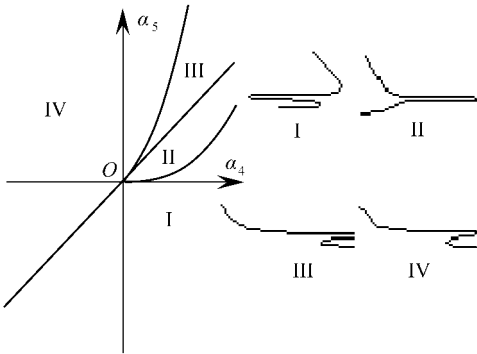


图 3(a) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$

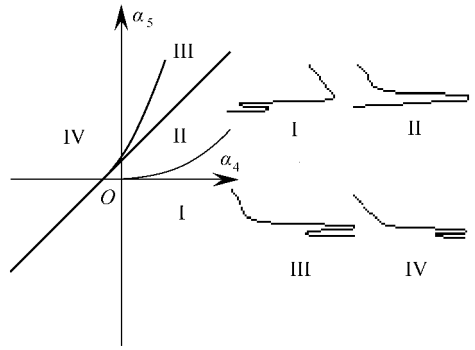


图 3(b) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0, \alpha_3 > 0$

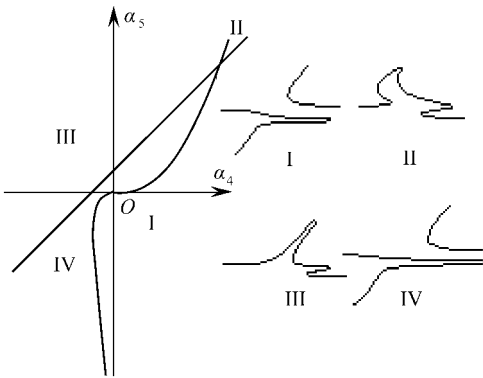


图 3(c) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 > 0$

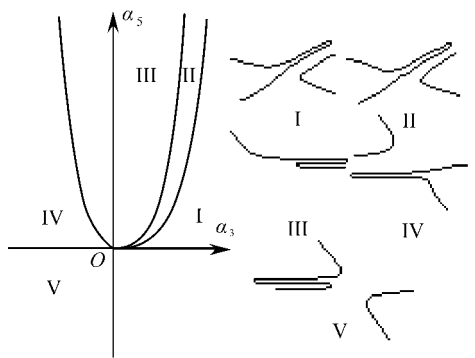


图 3(d) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_4 > 0$

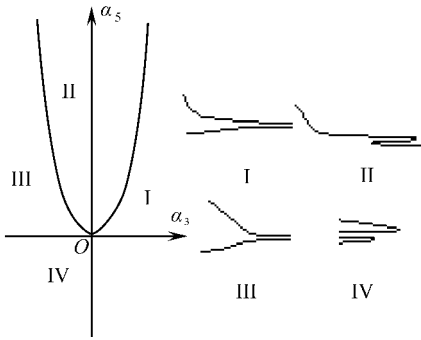


图 3(e) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0, \alpha_4 > 0$

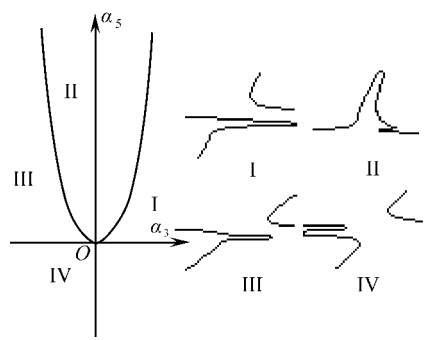


图 3(f) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 = 0, \alpha_4 > 0$

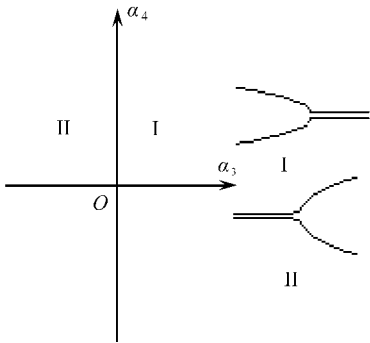


图 3(g) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0, \alpha_5 > 0$

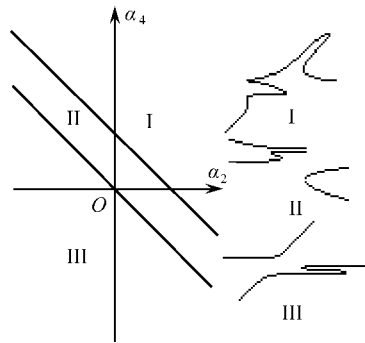


图 3(h) $\alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0, \alpha_5 > 0$

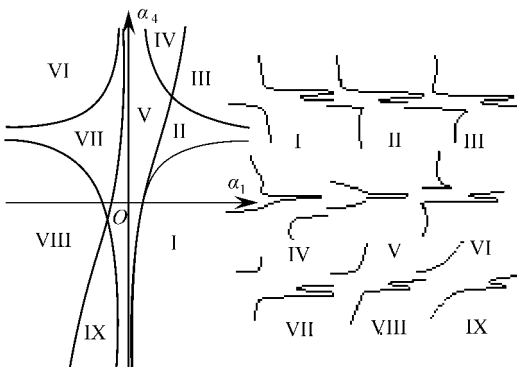


图 3(i) $\alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_5 > 0$

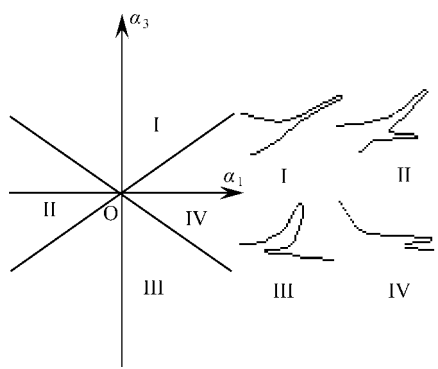


图 3(j) $\alpha_2 = 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0$

图 3 分岔图

值时的各种扰动情况。在每一个投影平面上,分岔集曲线和滞后点集曲线将平面分为不同的子区间。在各子区间任取两点所对应的分岔图都是拓扑等价的,即有持久性。任何两个不是同一区域的两点都是拓扑不等价的。

由数值分析,得到反映系统分岔特性的转迁集和 40 组分岔图。图 3 为在各参数投影平面内的转迁集和在各区域内的部分分岔图,从而得到了系统在各个不同域中的多种保持性分岔图。从图中可以看到十分丰富的分岔行为,如图 3(a) 中域 I 的分岔是双极限点型,域 II 和 III 是滞后型,图 3(g) 中的分岔是树枝型分岔,除了这几种典型的分岔模式以外,图中还存在其他更多更复杂的分岔模式,下面我们根据系统的物理意义进一步讨论具体的分岔特性。

1) 图 3(f) 域 II 开折参数取 $\alpha_1 < 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 < 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0$, 即系统等效阻尼系数 c_2

非常小、副簧等效刚度 k_2 相对比较大而激振力较大的情况, 其分岔图如图 4. 此时, 当分岔参数由大变小时将在小范围内发生两次跳跃现象, 即在 b 点时由简谐响应解跳到 c 点, 到 d 点, 再由 d 点跳到 e 点, 后至 f 点.

2) 图 3(h) 域 I 开折参数取 $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0$ 此时系统等效阻尼系数 c_2 和副簧弹性刚度都很小, 其分岔图如图 5 所示. 此时简谐响应在相对较小的频率处发生滞后现象. 当分岔参数由小缓慢变大时, 其从简谐解到 a 点, 再到 b 点, 由 b 点跳到 c 点, 在 d 点又发生跳跃到 f 点.

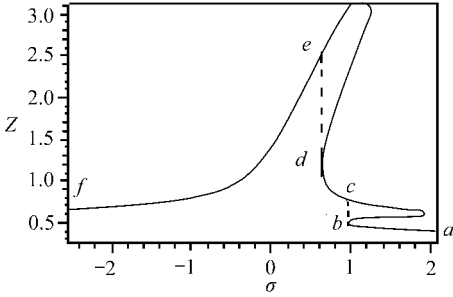


图 4 图 3(f) 域 II 分岔图的放大图

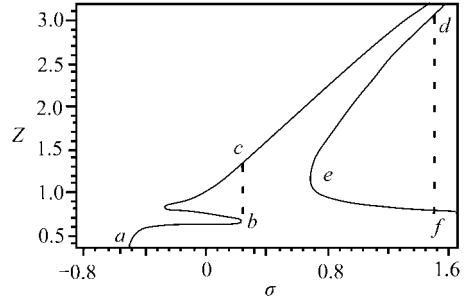


图 5 图 3(h) 域 I 分岔图的放大图

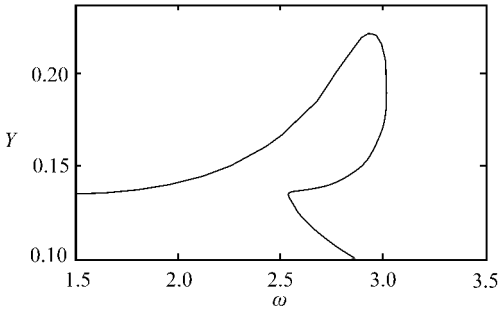


图 6 相同参数下的原分岔方程的分岔图

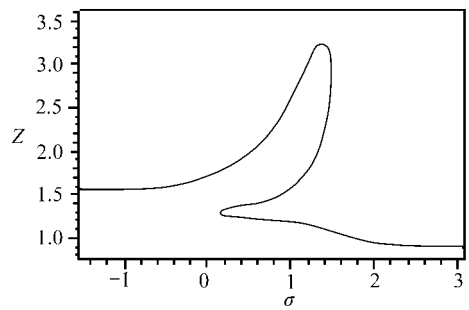


图 7 图 3(j) 中域 III 分岔图的放大图

通过这两个分岔图, 我们可以看到副簧等效阻尼系数的重要作用, 如果阻尼系数很小, 系统很容易发生跳跃现象. 因此, 适当调整阻尼系数的大小减小系统的振动, 防止不必要的跳跃现象, 保持汽车行驶的稳定性 and 可靠性.

为了验证以上所引入的理论分析方法, 取图 3(j) 中域 III 中的数据, 将原分岔方程 (10) 所得到的共振曲线与转迁集在该参数条件下所对应的域中的分岔图作比较, 如图 6 和图 7 所示.

图 6 是原分岔方程 (10) 所得到的分岔图, 而图 7 则是图 3(j) 中域 III 内的分岔图, 对比可以看到 2 幅图从定性的角度看基本一致. 此外, 图 3(e) 的域 II、域 III、图 3(b)~ 图 3(g) 的域 I, 图 3(j) 的域 II 等等都能很好的反映系统的常用参数区间的运动特性.

5 结 论

用平均法、奇异性理论研究两个自由度汽车悬架系统共振解的分岔, 发现了非常复杂的局部分岔, 使我们统一而全面的得到了这一系统的分岔特性. 建立了系统参数与该系统的拓扑分岔解之间的联系, 并且分析了不同参数下系统的运动特性, 为实现悬架参数的优化控制提供了理论依据.

致谢 本文得到内燃机燃烧学国家重点实验室(天津大学)资助,特此致谢.

[参 考 文 献]

- [1] Priyandoko G, Mailah M, Jamaluddin H. Vehicle active suspension system using skyhook adaptive neuro active force control[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, **23**(3): 855-868.
- [2] Fateh M M, Alavi S S. Impedance control of an active suspension system[J]. Mechatronics, 2009, **19**(1): 134-140.
- [3] Litak G, Borowiec M, Friswell M I, et al. Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, **13**(7): 1373-1383.
- [4] 齐志鹏. 汽车悬架和转向系统的结构原理与检修[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2002.
- [5] 贾启芬, 于雯, 刘习军. 汽车悬架系统的分段非线性振动机理的研究[J]. 工程力学, 2004, **23**(2): 319-327.
- [6] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [7] M. 米奇克. 汽车动力学[M]. 桑杰 译. 北京: 机械工业出版社, 1980.
- [8] CHEN Yu-shu, Andrew Y T Leung. Bifurcation and Chaos in Engineering[M]. London: Springer-Verlag, 1998.
- [9] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.

Bifurcation of Piecewise-Linear Nonlinear Vibration System of Vehicle Suspension

ZHONG Shun^{1, 2, 3}, CHEN Yu-shu^{1, 2, 3}

(1. Research Center for Nonlinear Dynamics, Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China;

2. The Key Laboratory of Engines of Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China;

3. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control,
Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The kinetic model of piecewise-linear nonlinear suspension system that consists of a dominant spring and an assistant spring was established. The resonance solution's bifurcation of two-degree-of-freedom suspension system was investigated by means of singularity theory. The transition sets of the system and 40 groups of bifurcation diagrams were obtained. And the complicated local bifurcation was founded, which shows the bifurcation characteristic roundly. Furthermore, according to the relation between the parameters and the topological bifurcation solutions, the motion characteristic with different parameters was obtained. The results supply theoretical bases for optimal control of vehicle suspension system parameters.

Key words: vehicle suspension system; singularity theory; piecewise-linear-nonlinear system; bifurcation