

# II型裂纹弹塑性场在裂纹线附近匹配 方程的一般形式\*

易志坚<sup>1,2</sup>, 赵朝华<sup>2</sup>, 杨庆国<sup>2</sup>, 彭 凯<sup>2</sup>, 黄宗明<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 土木学院, 重庆 400044;

2. 重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

(本刊编委易志坚来稿)

**摘要:** 针对理想弹塑性III型裂纹问题, 对线场分析方法的步骤和匹配过程进行了凝练和归纳, 给出了裂纹线附近塑性场、弹塑性边界、弹塑性匹配方程的一般形式及其一般求解步骤, 将不同条件下的III型裂纹问题归结为由4个匹配方程确定4个待定常数, 并通过一个具体问题, 验证了这一方法的正确性、简明性和通用性.

**关键词:** III型裂纹; 理想弹塑性; 线场分析方法; 裂纹线; 塑性区

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.05.002

## 引 言

裂纹弹塑性分析的传统方法一直受到小范围屈服条件的限制. 小范围屈服条件假定裂纹尖端塑性区之外的弹性场为裂纹的尖端奇异  $K$  场, 忽略了弹性场中非奇异项的影响; 小范围屈服条件还假定塑性区的存在使裂纹的弹性场发生了水平移动.

很显然, 小范围屈服条件仅在裂尖塑性区足够小的情况下才成立. 当裂纹体应力水平较高, 塑性区的尺寸相对较大时, 小范围屈服条件就失去了成立的条件, 必须探索新的方法.

作者提出了裂纹弹塑性分析的线场分析方法<sup>[1-7]</sup>, 这一方法从根本上突破了传统的小范围屈服条件. 线场分析方法的基本思路是: 求出塑性场在裂纹线附近的幂级数形式的通解, 并将裂纹体弹性场的精确解在裂纹线附近按幂级数形式展开, 将塑性场的通解与弹性场的精确解在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 从而完全放弃小范围屈服条件, 所得出的弹塑性场、塑性区尺寸在裂纹线附近足够精确, 不受屈服范围大小的限制. 线场分析方法作为裂纹弹塑性分析的一种独立方法, 已解决了不少裂纹问题<sup>[8-12]</sup>, 并已应用到了岩土、混凝土等领域<sup>[13-15]</sup>, 线场分析方法还适用于线弹性断裂力学领域, 已发展成为求解裂纹应力强度因子的一种有效方法<sup>[16-20]</sup>.

\* 收稿日期: 2009-02-23; 修订日期: 2009-04-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672196)

作者简介: 易志坚(1963-), 男, 重庆人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: +86-23-62652730; Fax: +86-23-62650561; E-mail: yizjizj@hotmail.com).

II型裂纹是一种经典的裂纹形式,对一些具体问题,已经求得了裂纹线附近足够精确的弹塑性场和弹塑性边界<sup>[1, 6, 8-9]</sup>,但这些求解是针对具体问题的具体分析,没有得出匹配方程的一般形式和求解的一般规律,使得对不同的具体问题求解时,重复内容和步骤较多.作者发现,II型问题和I型平面应力问题<sup>[7]</sup>一样,其求解方法和过程具有一般的共性.通过总结和提炼,本文针对II型裂纹问题,按线场分析方法,给出了裂纹线附近弹塑性匹配方程的一般形式和求解的一般步骤,将这一问题归结为由4个匹配方程确定4个待定常数,并针对一具体的问题,验证了这一方法的正确性、简明性和通用性.

## 1 基本方程

对理想弹塑性II型裂纹问题,不为零的应力分量为 $\tau_{xz}$ 和 $\tau_{yz}$ ,不为零的位移分量分别为 $w$ ,它们均只是 $x$ 和 $y$ 的函数.平衡微分方程和屈服条件为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (2)$$

其中 $k$ 为剪切屈服应力.

与应力分量 $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ 相对应的应变分量可以通过位移 $w$ 表示为 $\gamma_{xz} = \partial w / \partial x$ ,  $\gamma_{yz} = \partial w / \partial y$ ,对静态裂纹问题,塑性形变理论的本构关系为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} + \lambda \tau_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} + \lambda \tau_{yz}, \quad (3)$$

其中 $G$ 为剪切特性模量, $\lambda$ 为比例系数.

## 2 裂纹线附近弹塑性匹配方程的一般形式

裂纹线是指裂纹的延长线(图1).采用线场分析方法时,仅关注裂纹线附近的量,可求出完全放弃小范围屈服条件的,在裂纹线附近足够精确的弹塑性解和塑性区边界,其一般步骤是:通过基本方程求出塑性场在裂纹线附近的幂级数形式的通解,然后将塑性场的这一通解与弹性场在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配.以下,我们将按照这一步骤进行分析,给出裂纹线附近弹塑性匹配方程的一般形式.

### 2.1 塑性应力场和位移场在裂纹线附近的幂级数形式的通解

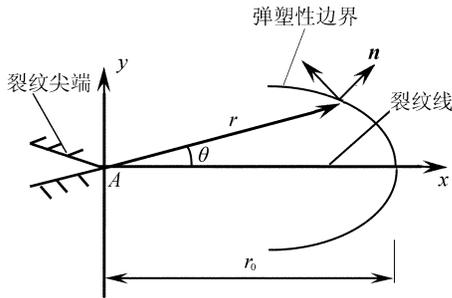


图1 裂纹线附近区域

一般情况下,要求解塑性区应力场 $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ 和位移场 $w$ ,需求解偏微分方程组(1)、(2)和(3),其解的具体形式是难以求得的.但是,在裂纹线附近(图1),采用线场分析方法,求解偏微分方程的问题可以转化为求解常微分方程,从而可求出裂纹线附近应力场和位移场幂级数形式的通解.

线场分析方法的关键是将各场量在裂纹线附近按幂级数形式展开.由于应力场 $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ 和位移场 $w$ 对于裂纹线是连续的,是关于裂纹线 $\theta = 0$ (或 $y = 0$ )的连续函数,因此,根据连续函数的性

质, $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $w$ 可在裂纹线附近按泰勒(Taylor)级数展开.考虑到 $\tau_{yz}$ 和 $\lambda$ 关于裂纹线的对称性和 $\tau_{xz}$ ,  $w$ 关于裂纹线的反对称性, $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $w$ 和 $\lambda$ 可表示为

$$\tau_{xz} = \tau_1^{(p)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = \tau_0^{(p)}(r) + \tau_2^{(p)}(r)\theta^2 + O(\theta^4), \quad (4)$$

$$w = w_1^{(p)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad (5)$$

$$\lambda = \lambda_0(r) + \lambda_2(r)\theta^2 + O(\theta^4), \quad (6)$$

式中的上标(p)表示塑性. 公式(6)中的 $\lambda$ 与公式(3)中的相同.

为了给出线场分析方法的一般匹配方程和步骤, 公式(4)~(6)是以极坐标形式表示的, 而以前的求解<sup>[1, 6, 8-9]</sup>是在直角坐标系下进行的.

将公式(4)~(6)代入公式(1)~(3), 利用直角坐标和极坐标之间的关系 $r^2 = x^2 + y^2$ 和 $\theta = \arctan(y/x)$ , 比较 $\theta$ 的同次幂和系数得

$$\frac{d\tau_1}{dr} + \frac{d\tau_0}{dr} - \frac{\tau_1}{r} + \frac{2\tau_2}{r} = 0, \quad (7)$$

$$\tau_0^2 = k^2, \quad \tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dw_1}{dr} - \frac{w_1}{r} = \left[ \frac{1}{G} + \lambda_0 \right] \tau_1, \quad \frac{w_1}{r} = \left[ \frac{1}{G} + \lambda_0 \right] \tau_0. \quad (9)$$

可见, 偏微分方程组(1)~(3)在裂纹线附近已简化为了常微分方程组(7)~(9), 公式(7)~(9)与直角坐标系下的形式<sup>[1, 6, 8-9]</sup>不同. 公式(7)~(9)中忽略了上标(p). 通过式(7)~(9),  $\tau_0^{(p)}$ ,  $\tau_1^{(p)}$ ,  $\tau_2^{(p)}$ ,  $w_1^{(p)}$ 可以被精确求解, 代回式(4)和(5), 则裂纹线附近的应力场和位移场为

$$\tau_{xz} = -\frac{kr}{r+L}\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = k - \frac{1}{2} \frac{kr^2}{(r+L)^2} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (10)$$

$$w = \frac{Cr}{r+L}\theta + O(\theta^3), \quad (11)$$

式中 $C, L$ 为积分常数. 当转化到直角坐标系后, 式(10)、(11)与文献[1, 6, 8-9]的结果相同.

公式(10)和(11)是连续函数的泰勒(Taylor)展开式(4)和(5)的具体形式, 是通过精确求解而得, 因此, 公式(10)和(11)是塑性区内应力场和位移场在裂纹线附近幂级数形式的通解. 需要说明的是, 式(10)、(11)忽略了 $\theta$ 的3次幂及其以上的项. 可以证明,  $\theta$ 的3次幂以上的任意幂次项均可以精确求解, 但由于线场分析方法关心的是裂纹线附近的量, 因此我们忽略了 $\theta$ 的高幂次项.

公式(10)和(11)具有的物理意义在于: 对III型裂纹问题, 不管具体受载形式和裂纹体几何形式如何, 其解的表达式是一样的, 均可表达为式(10)和(11)的形式, 实际裂纹问题的具体受载形式和裂纹体几何形式是有差异的, 这种差异由公式中的积分常数 $C$ 和 $L$ 的不同来反映.

## 2.2 弹性场的解在裂纹线附近的幂级数形式

弹性区的应力场 $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ 和位移场 $w$ 对于裂纹线也是连续的, 也可在裂纹线附近按泰勒(Taylor)级数展开, 在图1所示的极坐标表示下 $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ 和 $w$ 可表示为

$$\tau_{xz} = \tau_1^{(e)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = \tau_0^{(e)}(r) + \tau_2^{(e)}(r)\theta^2 + O(\theta^4), \quad (12)$$

$$w = w_1^{(e)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad (13)$$

式中的上标(e)表示弹性.

尽管将弹性应力场(12)代入平衡微分方程(1)也可将求解偏微分方程的问题转化为求解常微分方程, 但与塑性区应力场所不同的是, 塑性应力场(4)同时满足平衡微分方程(1)和屈服条件(2), 由此得出的常微分方程组中, 方程数与未知数相等, 因此其幂级数形式的解的各幂次项可以精确求解, 也就是说, 其幂级数形式的通解可以表达为具体的函数形式(10). 而弹性应

力场(12)仅要求满足平衡微分方程(1),所以常微分方程组中方程的数目将少于未知量的数目,其幂级数形式的解的各幂次项不能求出具体的表达式.弹性区位移场(13)同样不能求出具体的表达式.

所以,II型裂纹的弹性场的幂级数形式解的各幂次项的具体形式是不确定的,II型裂纹的弹性应力场和位移场没有一个统一的具体表达式,这就说明,随着载荷的不同或几何形式的不同,其解的具体函数表达式也不同,这与塑性区的应力场和位移场根本不同.因此,对II型裂纹,塑性区应力场(10)和位移场(11)是一定的,而弹性区的应力场(12)和位移场(13)是不确定的.

线场分析方法的突破在于求得了塑性区应力场和位移场的统一表达式,而线场分析方法的难点又在于弹性场的不确定性.本文将在后面给出构造弹性场的方法.

### 2.3 裂纹线附近弹塑性边界上的匹配方程的一般形式

经典的小范围屈服理论除了假定裂纹前缘塑性区外的弹性场是  $K$  场外,还假定塑性区的存在使裂纹的弹性奇异  $K$  场沿裂纹线移动了一段距离.作者<sup>[1]</sup>对小范围屈服分析为何必须作出弹性奇异  $K$  场沿裂纹线移动一段距离的假定进行了分析和讨论,并说明,这一假定将导致解的较大误差.

裂纹线附近的弹塑性边界  $r = r_p(\theta)$  如图 1 所示,它是关于裂纹线对称的.与小范围屈服条件的分析根本不同的是,我们这里已经放弃了弹性场沿裂纹线移动了一距离的假定.由于弹塑性边界  $r = r_p(\theta)$  对称于裂纹线  $y = 0$  (或  $\theta = 0$ ) 且关于裂纹线连续,弹塑性边界  $r = r_p(\theta)$  在裂纹线附近的幂级数展式为

$$r_p(\theta) = r_0 + r_2\theta^2 + O(\theta^4), \quad (14)$$

式中  $r_0$  为裂纹线上塑性区的长度.

由式(14)可求得裂纹线附近弹塑性边界上任一点的单位法向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  为

$$n_x = 1 - \frac{1}{2}B_1^2\theta^2 + O(\theta^4), \quad n_y = B_1\theta + O(\theta^3), \quad (15)$$

其中

$$B_1 = 1 - 2\frac{r_2}{r_0}. \quad (16)$$

为了将塑性应力场与弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配,必须给出塑性应力场和弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的取值.将式(14)代入式(10)和(11),可得出塑性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的值为

$$\tau_{xz} = \tau_1^{(pb)}\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = \tau_0^{(pb)} + \tau_2^{(pb)}\theta^2 + O(\theta^4), \quad (17)$$

$$w = w_1^{(pb)}\theta + O(\theta^3), \quad (18)$$

其中

$$\tau_0^{(pb)} = k, \quad (19)$$

$$\tau_1^{(pb)} = -\frac{kr_0}{r_0 + L}, \quad (20)$$

$$\tau_2^{(pb)} = -\frac{kr_0^2}{(r_0 + L)^2}, \quad (21)$$

$$w_1^{(pb)} = \frac{Cr_0}{r_0 + L}. \quad (22)$$

以上各式中的上标 (pb) 表示塑性场在弹塑性边界上的取值.

另一方面, 将式(14)代入(12)和(13), 可得出弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的一般形式为

$$\tau_{xz} = \tau_1^{(db)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = \tau_0^{(db)}(r) + \tau_2^{(db)}(r)\theta^2 + O(\theta^4), \quad (23)$$

$$w = w_1^{(eb)}(r)\theta + O(\theta^3), \quad (24)$$

式中上标(eb)表示弹性场在弹塑性边界上的取值. 公式(23)和(24)中的幂次项仍然是不确定的, 尽管如此, 但在 $O(\theta^3)$ 的近似下, 式(23)和(24)中已隐含了公式(14)中 $r_0, r_2$ 两个未知量.

弹性场与塑性场在裂纹线附近弹塑性边界上的匹配条件为: 在弹塑性边界上, 应力要满足连续条件, 即: 弹性应力场和塑性应力场沿边界上任一点的法向分量相等, 切向分量也相等, 即

$$\sigma_{nz}^e = \sigma_{nz}^p, \quad \sigma_{sz}^e = \sigma_{sz}^p, \quad (25)$$

式中 $\sigma_{nz}$ 和 $\sigma_{sz}$ 是弹塑性边界上局部坐标系( $n, s$ )上的法向和切向应力, 上标e和p分别表示其在塑性场边界上靠近弹性区和靠近塑性区的取值.  $\sigma_{nz}$ 和 $\sigma_{sz}$ 的表达式为

$$\sigma_{nz} = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y, \quad \sigma_{sz} = \tau_{xz}n_y - \tau_{yz}n_x, \quad (26)$$

式中 $n_x$ 和 $n_y$ 已在公式(15)中定义.

弹塑性边界上的位移必须连续, 因此

$$w^e = w^p. \quad (27)$$

将公式(26)、(15)、(23)和(17)代入公式(25), 比较等式两端的 $\theta^0, \theta^1, \theta^2$ 项的系数, 并求得

$$\tau_0^{(eb)} = \tau_0^{(pb)}, \quad (28)$$

$$\tau_1^{(eb)} = \tau_1^{(pb)}, \quad (29)$$

$$\tau_2^{(eb)} = \tau_2^{(pb)}. \quad (30)$$

将式(18)和(24)代入式(27)并比较等式两端同次幂的系数得

$$w_1^{(db)} = w_1^{(pb)}. \quad (31)$$

将公式(19)~(22)分别代入公式(28)~(31)得

$$\tau_0^{(eb)} = k, \quad (32)$$

$$\tau_1^{(eb)} = -\frac{k r_0}{r_0 + L}, \quad (33)$$

$$\tau_2^{(eb)} = -\frac{k r_0^2}{(r_0 + L)^2}, \quad (34)$$

$$w_1^{(db)} = \frac{C r_0}{r_0 + L}. \quad (35)$$

公式(32)~(35)是按线场分析方法进行求解的匹配方程的一般形式, 它将不同条件下的II型裂纹问题归结为由4个匹配方程确定4个待定常数, 对具体问题进行求解时, 可以省略之前的步骤, 直接通过式(32)~(35)进行求解.

#### 2.4 II型裂纹线场分析方法求解的一般步骤

方程(32)~(35)即为按裂纹线场分析方法求解时, 匹配方程在裂纹线附近的一般形式. 由于方程(32)~(35)中等式的右端的具体形式已求出, 而等式的左边是幂级数形式的弹性场中的幂次项, 没有具体的函数表达式, 因此, 按线场分析方法进行求解时, 关键是求出弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的具体形式, 即求式(32)~(35)中等式左端各项. 一旦求得了式(32)~(35)中等式左端各项, 即可由匹配方程(32)~(35)求出决定塑性区长度及弹塑性

边界单位法向量的关键未知量  $r_0, r_2$  以及塑性区应力场中的待定量  $L, C$ .

对理想弹塑性 II 型裂纹问题, 按线场分析方法求解的一般步骤为:

第 1 步 直接给出塑性区内应力场和位移场的幂级数形式解.

由于裂纹线附近的塑性区内的应力场和位移场对 II 型裂纹均适用, 因此在针对具体问题求解时, 塑性区内应力场和位移场的幂级数形式解 (10)、(11) 可直接采用.

由式 (14)、(15) 和基本方程直接得出裂纹线附近塑性区的应变场

$$\gamma_{xz} = -\frac{Cr}{(r+L)^2}\theta + O(\theta^3), \quad \gamma_{yz} = \frac{C}{r+L} + O(\theta^2). \quad (36)$$

由于塑性区的应力场、位移场和变形场的形式是统一的, 对 II 型裂纹的各种受载形式和几何形式均相同, 因此可以直接给出以上解的一般形式, 避免针对具体问题重复求解.

第 2 步 构造裂纹线附近的弹性区应力场和位移场, 也就是给出方程 (12) 和 (13) 的具体形式.

由于弹性场解的不确定性, 需要针对不同问题具体分析, 所以弹性场的构造成为线场分析方法的一个关键问题. 我们将在下节的具体例子中对其构造方法和原则进行说明.

第 3 步 直接给出裂纹线附近的弹塑性边界 (14) 和其单位法向量 (15) 和 (16) 的表达式. 这些表达式对 II 型裂纹具有通用性. 其中参数  $r_0, r_2$  十分重要,  $r_0$  表示塑性区沿裂纹线的长度,  $r_2/r_0$  通过弹塑性边界单位法向量定义裂纹线附近塑性区的形状.

第 4 步 求出裂纹线附近弹塑性边界上的弹性场.

将式 (14) 代入所构造的弹性区应力场和位移场, 得出式 (32) ~ (35) 等式左边的  $\tau_0^{(eb)}$ ,  $\tau_1^{(eb)}$ ,  $\tau_2^{(eb)}$ ,  $w_1^{(eb)}$ .

第 5 步 求解得出待定常数  $r_0, r_2, L, C$ .

求解方程 (32) ~ (35) 即可求出以上待定常数.

以上各步骤中, 第 1 步和第 3 步是直接给出方程的形式, 第 2 步是构造弹性场, 第 4、5 步仅涉及简单的代数方程求解. 可见, 本文匹配方程的一般形式和求解步骤规范了线场分析方法的求解, 简化了 II 型裂纹弹塑性问题.

### 3 求解示例

本文以文献 [1] 求解的一个问题——经典加载下的 II 型中心裂纹无限板为例 (图 2), 采用本文给出的匹配方程的一般形式和求解步骤进行求解. 从以下求解步骤可以看出, 采用本文的方法极大地简化了求解过程.

第 1 步 给出裂纹线附近塑性区的应力场和位移场.

其公式 (10)、(11) 已在本文列出, 这里不再重复.

第 2 步 构造裂纹线附近的弹性场.

如前所述, 裂纹线附近弹性场的获得是线场分析方法的关键和难点. 采用文献 [1] 的方法可得出弹性应力场和位移场的精确场, 将这一精确场展开到裂纹线附近得

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \frac{a^2}{2a+r} \theta + O(\theta^3), \\ \tau_{yz} = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ (a+r) - \frac{2a^2r+a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] + O(\theta^4), \end{cases} \quad (37)$$

$$w = \frac{\tau}{G} \sqrt{r(2a+r)} \frac{a+r}{2a+r} \theta + O(\theta^3). \quad (38)$$

对这一具体问题, 公式(37)和(38)就是公式(12)和(13)的具体表达式.

第3步 直接给出裂纹线附近的弹塑性边界和其单位法向量的表达式.

本文公式(14)~(16)中已列出其表达式, 这里不再重复.

第4步 求出裂纹线附近弹塑性边界上的弹性场.

将公式(14)代入公式(37)和(38)便得到弹性场在裂纹线附近弹塑性边界上的表达式

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0} \theta + O(\theta^3), \\ \tau_{yz} = \frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left\{ (a+r_0) - \left[ \frac{2a^2r_0+a^3}{2(2a+r_0)^2} + \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4), \end{cases} \quad (39)$$

$$w = \frac{\tau}{G} \sqrt{r_0(2a+r_0)} \frac{a+r_0}{2a+r_0} \theta + O(\theta^3). \quad (40)$$

公式(39)和(40)就是公式(23)和(24)的具体表达式, 通过比较可得

$$\tau_0^{(eb)} = \frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} (a+r_0), \quad (41)$$

$$\tau_1^{(eb)} = -\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0}, \quad (42)$$

$$\tau_2^{(eb)} = -\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[ \frac{2a^2r_0+a^3}{2(2a+r_0)^2} + \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} \right], \quad (43)$$

$$w_1^{(eb)} = \frac{\tau}{G} \sqrt{r_0(2a+r_0)} \frac{a+r_0}{2a+r_0}. \quad (44)$$

第5步 求解得出待定常数  $r_0, r_2, L, C$ .

将式(41)~(44)代入式(32)~(35)的左边得

$$\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} (a+r_0) = k, \quad (45)$$

$$-\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0} = -\frac{kr_0}{r_0+L}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[ \frac{2a^2r_0+a^3}{2(2a+r_0)^2} + \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} \right] = \\ & -\frac{kr_0^2}{(r_0+L)^2}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\tau}{G} \sqrt{r_0(2a+r_0)} \frac{a+r_0}{2a+r_0} = \frac{Cr_0}{r_0+L}. \quad (48)$$

公式(45)~(48)的匹配方程与文献[1]中的匹配方程在形式上不同, 这是因为文献[1]中是针对具体问题进行匹配的, 且没有经过简化. 求解式(45)~(48)可得  $r_0, r_2, L, C$  的具体表达式

$$r_0 = a \left[ \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \tau^2} - 1} \right], \quad (49)$$

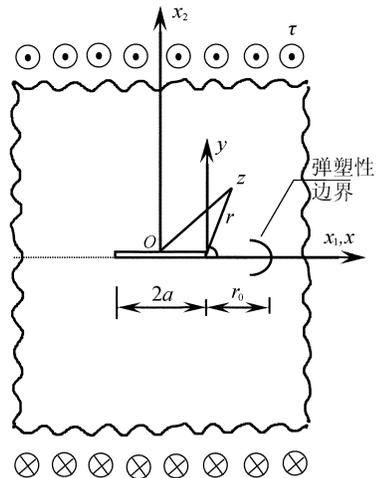


图2 无限大板中的一个反平面裂纹

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 - \tau^2}{k^2}} - \frac{k}{k + \sqrt{k^2 - \tau^2}}, \quad (50)$$

$$L = a \left[ \frac{2\tau^2 - k^2}{k^2 - \tau^2} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \tau^2} + 1} \right], \quad (51)$$

$$C = \frac{k}{G} (r_0 + L). \quad (52)$$

公式(49) ~ (52)与文献[1]所得结果完全相同.

## 4 与其它解的比较

Hult 和 McClintock 在 1957 年给出了理想弹塑性材料 II 型裂纹封闭形式的弹塑性解<sup>[21]</sup>, 这也是弹塑性裂纹问题第一个封闭形式的弹塑性解. 在裂纹尖端极坐标系下, Hult 和 McClintock 建议的裂纹塑性应力场的形式为

$$\tau_{xz} = -k \sin \theta, \quad \tau_{yz} = k \cos \theta, \quad (53)$$

其中  $\theta = \arctan(y/x)$ . 将式(53)式沿裂纹线展开得

$$\tau_{xz} = -k\theta + O(\theta^3), \quad \tau_{yz} = k - \frac{1}{2}k\theta^2 + O(\theta^4). \quad (54a, b)$$

显然, Hult 和 McClintock 给出的塑性应力场(53)或(54)仅仅为满足偏微分方程(1)和(2)的无数解中的一个特解而并非通解, 但是, 本文得出的塑性场(10)却是裂纹线附近塑性应力场的通解. 将式(54)与式(10)比较发现, 式(10)自然多出一积分常数  $L$ , 如果删除积分常数  $L$ , 式(10)将与式(54)一致. 可见, Hult- McClintock 存在遗憾. 如果将 Hult- McClintock 解(53)或其裂纹线附近的展开式(54)与裂纹线附近的弹塑性场匹配, 被本文所放弃的小范围屈服条件则必须保留, 其结果的适应性受到限制且存在问题.

Hutchinson<sup>[22]</sup>也对 II 型裂纹问题进行了分析, 但他构造的塑性场本质上仍然是 Hult- McClintock 场, 所以其结果没有实质性突破.

Achenbach<sup>[23]</sup>等人和作者<sup>[18]</sup>早期也采用线场分析方法对 II 型裂纹问题进行了分析, 但所采用的塑性场解仍然以 Hult- McClintock 解为基础, 所以结果仍然受到小范围屈服条件限制且解存在不合理性.

作者在文献[1]和[2]中首次采用塑性场在裂纹线附近幂级数形成的通解与弹性场在裂纹线附近的精确解匹配, 完全突破了小范围屈服条件. 线场分析方法对裂纹的弹塑性分析十分有效, 本文将任一边界条件下的 II 型理想弹塑性裂纹问题归纳为求解 4 个匹配方程, 高度凝练了线场分析方法求解 II 型裂纹的一般步骤和方法.

## 6 结 论

本文得出了按线场分析方法求解 II 型裂纹问题的匹配方程的一般形式, 问题归结为由 4 个匹配方程确定 4 个待定常数, 归纳了求解的一般步骤, 可以得出如下结论:

1) II 型裂纹的塑性场具有统一的表达式(10)和(11), 裂纹线附近的弹塑性边界及其单位法向量的表达式(14)和(15)也有统一的表达式, 求解时, 可以直接给出这些表达式.

2) II 型裂纹的弹性场(12)和(13)中的各幂次项是不确定的. 因此, II 型裂纹求解的关键是针对具体问题, 给出裂纹线附近的不受屈服范围大小限制的弹性场. 将 II 型裂纹的塑性场的幂级数形式的通解(10)和(11)与不受屈服范围限制的弹性场在裂纹线附近的弹塑性边界

(14) 上匹配, 所得出的解不受传统的小范围屈服条件的限制。

3) 按线场分析方法求解时, 不同条件下的 II 型裂纹问题归结为由 4 个匹配方程确定 4 个待定常数, 4 个匹配方程的一般形式为方程 (32) ~ (35), 待定常数为  $r_0, r_2, L, C$ 。一旦构造出了弹性场, 就可以直接求解方程 (32) ~ (35), 一旦求解了方程 (32) ~ (35), 裂纹线附近的弹塑性场和弹塑性边界就得到了完全求解。

### [参 考 文 献]

- [1] YI Zhi-jian. The most recent solutions of near crack line fields for mode III cracks[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(1): 147- 155.
- [2] 易志坚, 王士杰, 王向坚. II 型平面应力裂纹线场的弹塑性精确解[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(10): 909- 916.
- [3] YI Zhi-jian, WANG Xiang-jian, WANG Shi-jie. Elastic-plastic crack line fields for a growing crack in a center cracked plate with finite dimensions[J]. International Journal of Fracture, 1995, 73(2): R27- R31.
- [4] 易志坚, 王士杰. 理想弹性 I 型平面应力裂纹线场的精确解[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(4): 335- 342.
- [5] YI Zhi-jian, WANG Shi-jie, WU Heng-li. Precise elastic-plastic analysis of crack line field for mode II plane strain crack[J]. International Journal of Fracture, 1996, 80(4): 353- 363.
- [6] YI Zhi-jian, WANG Shi-jie, WANG Xiang-jian. Precise solutions of elastic-plastic crack line fields for cracked plate loaded by anti-plane point forces[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1997, 57(1): 75- 83.
- [7] 易志坚, 严波. I 型平面应力裂纹弹塑性场在裂纹线附近匹配方程的一般形式[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(10): 1058- 1066.
- [8] 王成, 吴承平. 偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面点力的弹塑性解析解[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(7): 691- 698.
- [9] 王成, 张录坤. 有限宽板裂纹在裂纹面受两对反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(6): 513- 520.
- [10] 张培源, 张晓敏, 严波, 等. 裂尖曲率对裂纹前缘塑性区的影响[J]. 应用力学学报, 2004, 21(4): 93- 96.
- [11] WANG Jian-hua, ZHOU Xiao-ping. Near crack line elastic-plastic analysis for a infinite plate loaded by two pairs of point tensile forces[J]. Mechanics Research Communication, 2004, 31(4): 415- 420.
- [12] 周小平, 张永兴, 朱可善. 偏心裂纹板在裂纹面受一对集中拉应力作用时弹塑性解析解[J]. 固体力学学报, 2005, 26(3): 267- 272.
- [13] 王成, 易志坚. 断续节理在 II 型受载下的弹塑性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(2): 153- 158.
- [14] 王成, 邓安福. 岩体节理内压致裂解析研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(5): 640- 643.
- [15] 王成. 层状岩体边坡锚固的断裂力学原理[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(11): 1900- 1904.
- [16] WANG Qi-zhi. The crack-line (plane) stress field method for estimating SIFs—a review[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55(4): 593- 603.
- [17] WANG Qi-zhi. Simple formulae for the stress concentration factor for two- and three- dimensional holes in finite domains[J]. Journal of Strain Analysis, 2002, 37(3): 259- 264.
- [18] YI Zhi-jian. The new and analytical solution for model III crack in an elastic-perfectly plastic material[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1992, 42(5): 833- 840.

- [19] WANG Qi- zhi. The crack- line stress field method for analysing SIFs of strips illustrated with an eccentrically cracked tension strip[ J]. International Journal of Fracture, 1993, **59**(2): R39- R43.
- [20] Chen D L, Weiss B, Stickler R. A new approach for the determination of stress intensity factors for finite width plate[ J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, **48**(4): 561- 571.
- [21] Hult J A , McClintock F A. Elastic- plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear[ A]. In: Proceedings of the 9th International Congress on Applied Mechanics [ C]. Vol **8**. University of Brussels, 1957, 51- 58.
- [22] Hutchinson J W. A Course on Nonlinear Fracture Mechanics [ M]. University of Denmark, 1979.
- [23] Achenbach J D, Li Z L. Plane stress crack line fields for crack growth in an elastic- perfectly plastic material[ J]. Engineering Fracture Mechanics, 1984, **20**(3): 534- 544.

## General Forms of Elastic- Plastic Matching Equations for Mode- III Cracks Near the Crack Line

YI Zhi- jian<sup>1,2</sup>, ZHAO Chao- hua<sup>2</sup>, YANG Qing- guo<sup>2</sup>,  
PENG Kai<sup>2</sup>, HUANG Zong- ming<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering , Chongqing University ,  
Chongqing 400044, P. R . China ;

2. School of Civil Engineering & Architecture, Chongqing Jiaotong University ,  
Chongqing 400074, P. R . China )

**Abstract** To address mode - III crack problems under elastic - perfectly plastic condition, the matching procedures of the crack line analysis method was summarized and refined to give the general forms and formulation steps of plastic field, elastic- plastic boundary and elastic- plastic matching equations near the crack line. The work unified the different- condition mode- III crack problems as determining 4 integral constants through 4 matching equations. An example was demonstrated to verify the correctness, conciseness and generality of the procedure.

**Key words:** mode- III crack; elastic- perfectly plastic material; crack line analysis method; crack line; plastic zone