

# 考虑表面效应的压电半导体梁的 静态屈曲行为研究\*

詹春晓, 李孝宝, 王美芹

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

**摘要:** 鉴于表面效应和挠曲电效应对纳米材料或结构的力学行为具有显著影响,以纳米尺度压电半导体(PS)梁为研究对象,根据 Hamilton 变分原理,推导建立了考虑 Steigmann-Ogden 表面弹性效应和挠曲电效应的 Euler-Bernoulli 梁理论模型和相应的边界条件.结合电荷守恒方程和线性漂移扩散方程,研究了该梁结构的静态屈曲行为,得到了短路和开路条件下梁结构的等效弹性常数和屈曲临界压力的解析解.详细分析了表面效应、尺寸效应、挠曲电效应以及载流子屏蔽效应等因素对梁结构的等效弹性常数的影响规律和作用机制.该文的研究结果对基于纳米压电半导体梁结构电子器件的设计和应用具有指导作用.

**关键词:** 压电半导体梁; 屈曲; 表面效应; 挠曲电效应

**中图分类号:** O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450200

## Static Buckling Behaviors of Piezoelectric Semiconductor Beams With Steigmann-Ogden Surface Effects

ZHAN Chunxiao, LI Xiaobao, WANG Meiqin

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology,  
Hefei 230009, P.R.China)

**Abstract:** The surface elastic and flexoelectric effects significantly influence the mechanical behaviors of nanoscale materials and structures. The static buckling behaviors of piezoelectric semiconductor (PS) beams were studied through the establishment of an Euler-Bernoulli beam theoretical model in view of the Steigmann-Ogden surface elasticity and flexoelectricity. The governing equations and associated boundary conditions were derived under the Hamiltonian variational principle. In combination with the conservation equations for electrostatics and linear drift-diffusion equations, the analytical solutions of the effective elastic constants and critical buckling loads were obtained under both short and open circuit conditions. Numerical calculations were carried out to explore the effective elastic behaviors of the nanoscale PS beam under the effects of flexoelectricity, surface elasticity and shielding of charge carriers. This work provides a valuable guidance for designing high-performance electronic devices with piezoelectric semiconductor beams.

**Key words:** piezoelectric semiconductor beam; buckling; surface effect; flexoelectric effect

\* 收稿日期: 2024-07-09; 修订日期: 2024-09-15

基金项目: 安徽省自然科学基金(2208085MA17)

作者简介: 詹春晓(1970—),男,副教授,博士(E-mail: zhanchunxiao@hfut.edu.cn);

李孝宝(1985—),男,研究员,博士(通讯作者. E-mail: xiaobaoli@hfut.edu.cn).

引用格式: 詹春晓, 李孝宝, 王美芹. 考虑表面效应的压电半导体梁的静态屈曲行为研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(10): 1300-1312.

## 0 引 言

压电半导体如氧化锌(ZnO)等同时具有压电和半导体性能,是典型的第三代半导体<sup>[1]</sup>。变形、极化和载流子输运行为之间复杂的相互作用使其呈现出崭新的力学、电学和光学等多场耦合特性<sup>[2]</sup>。受拉伸或弯曲载荷作用的压电半导体结构内部会产生极化电势<sup>[3-4]</sup>。该电势进一步作用于载流子并使其重新分布进而影响半导体特性<sup>[5-6]</sup>。载流子的重新分布及其产生的极化电势可削弱压电耦合的刚化效应,并降低振动频率等力学性能<sup>[4,7]</sup>。上述特性使压电半导体纳米线、纳米杆、纳米纤维和纳米梁等可被广泛应用于二极管<sup>[8]</sup>、场效应晶体管<sup>[9-10]</sup>、传感器<sup>[11-13]</sup>、换能器<sup>[14-18]</sup>等功能电子器件中。

前人文献中的工作常将受激发产生挠曲电效应的半导体称为挠曲电半导体<sup>[3,19]</sup>。挠曲电效应是一种非均匀应变或应变梯度破坏局部反演对称结构而产生电极化的现象<sup>[17]</sup>,电极化程度由挠曲电系数与应变梯度的乘积决定<sup>[5]</sup>。室温时宏观尺度固体结构的挠曲电系数约为  $10^{-9} \text{C/m}^2$ <sup>[5]</sup>,相对较弱。然而,当结构尺寸缩小至纳米尺度,应变梯度可达到  $10^6 \text{m}^{-1}$ <sup>[3,5,20-21]</sup>,挠曲电效应所引起的电极化将显著影响其力电响应行为<sup>[22-26]</sup>。关于挠曲电效应的研究成为近年来的热点,包括纳米线的拉伸<sup>[27]</sup>、纳米线的弯曲振动<sup>[28]</sup>、悬臂纳米梁的静态和动态响应<sup>[29]</sup>、挠曲电半导体纳米线弯曲时的静电势<sup>[30]</sup>、载流子非线性漂移时挠曲电半导体纳米线中的静电势<sup>[3]</sup>、压电半导体复合双层弯曲时的压电效应<sup>[5]</sup>、挠曲电介电和半导体复合梁中力场对移动电荷的影响<sup>[31]</sup>,上述研究成果强化了学者们对挠曲电效应的理解。研究表明,挠曲电效应对电势和载流子的分布可产生显著影响<sup>[29]</sup>,因此该效应也可被广泛应用于能量采集<sup>[18]</sup>。Deng 等<sup>[17]</sup>提出了可用于能量采集的 Euler-Bernoulli 梁挠曲电理论模型,计算结果证明,当梁的厚度尺寸由微米尺度缩减至纳米尺度时,输出能量密度和转换效率会显著增强。Majdoub 等<sup>[23]</sup>考虑了用于能量采集的挠曲电悬臂梁模型,发现设计合适的矩形截面梁厚度和横截面形状能极大地增加总采集功率的峰值。Moura 和 Erturk<sup>[18]</sup>基于挠曲电能量采集的 Euler-Bernoulli 梁模型,分析了挠曲电系数与截面厚度的关系。Zhou 等<sup>[24]</sup>研究了悬臂压电纳米梁静态弯曲时的力电耦合行为,得到了开路时由挠曲电效应激发的,可用于传感和能量采集的近乎均匀分布的电势,其与梁的厚度和挠曲电系数有关。

当结构尺寸缩小至纳米尺度,结构表面积与体积的比值急剧增大,经典连续介质理论将无法准确预测结构的力学行为,需考虑表面和尺寸效应等的影响。其中,表面效应包括表面残余应力、表面弹性<sup>[32-33]</sup>和表面弯曲<sup>[34-36]</sup>刚度的贡献。在纳米线的弯曲变形行为中,表面残余应力较表面弹性刚度更为重要<sup>[37]</sup>。表面效应对纳米梁横向振动频率和振型的影响与约束类型有关,在表面残余应力和表面弹性中,表面残余应力对振动频率的影响更为显著<sup>[38]</sup>。纳米尺度接触问题研究表明,最大接触压力和压痕深度强烈依赖表面残余应力<sup>[39]</sup>。表面效应的考虑可一定程度地缓解纳米孔的热应力集中<sup>[40]</sup>,其对纳米孔周边的裂纹应力强度因子的影响则与裂纹孔径比有关<sup>[41]</sup>。表面效应使压电半导体纳米结构的物理和力学性能呈现明显的尺寸依赖性<sup>[25]</sup>。上述研究多基于 Gurtin-Murdoch(GM)表面弹性理论<sup>[32-33]</sup>来解释相应纳米结构力学行为的尺寸依赖现象。笔者调研发现,基于 Steigmann-Ogden(SO)表面弹性理论<sup>[34]</sup>来分析尺寸效应和力电耦合行为的文献工作相对较少。

纳米线、纳米纤维、纳米杆和纳米梁等一维构件是纳米传感器和纳米驱动器等的常用元件。前人研究表明,屈曲是细长纳米杆状构件在服役过程中的主要失效模式之一,屈曲行为受表面效应以及微纳米构件的特征长度影响<sup>[42]</sup>,其中表面效应可改变结构的屈曲临界压力,对细长纳米杆件尤为明显<sup>[43-44]</sup>。屈曲临界压力的增大或减小取决于表面弹性常数和表面残余应力的值<sup>[45]</sup>。另一方面,挠曲电效应对纳米压电一维结构的屈曲也被证明存在一定的影响<sup>[46]</sup>。对受电磁场和不同热载荷作用的纳米压电梁结构,其热屈曲行为呈现出明显的尺寸依赖性<sup>[47-48]</sup>。基于屈曲理论,用压痕法可方便地测量纳米线等构件的弹性模量<sup>[49-50]</sup>。研究发现,通过外电场的施加可调控纳米杆状构件的屈曲行为<sup>[51]</sup>。由屈曲临界电压可测量得到表面弹性常数和表面残余应力<sup>[52]</sup>。目前,针对压电半导体纳米结构屈曲行为的研究有少量报道。例如,Liang 等<sup>[6]</sup>考虑变形、极化和载流子行为的完全耦合,建立了压电半导体纤维静态屈曲的一维模型。Qu 等<sup>[19]</sup>在研究挠曲电半导体简支梁结构的屈曲问题时发现,挠曲电效应可使其临界压力增大。Zhang 等<sup>[53]</sup>得到的受轴压简支压电半导体杆的动态屈曲结果表明,表面效应可显著增大屈曲临界压力。Wang 等<sup>[54]</sup>研究受轴压作用的 ZnO 纳米线的失效时发现相变和屈曲是两种可能的失效模态,具体模态与纳米线的长细比有关。

在上述针对压电半导体屈曲问题的研究中,虽然考虑了压电和半导体性能,但并未完全考虑挠曲电和表面效应的影响,且均未考虑表面弯曲刚度的贡献.本文基于 SO 表面弹性理论<sup>[34]</sup>和 Euler-Bernoulli 梁模型理论研究压电半导体梁的静态屈曲行为,全面考虑压电、挠曲电、半导体性能、表面弹性和表面弯曲刚度的影响规律,着重讨论上述各效应对其屈曲临界压力的作用机制.

## 1 理论模型

考虑如图 1 所示的 n 型矩形截面压电半导体梁结构,其长记为  $l$ ,宽记为  $b$ ,高记为  $h$ ,梁的两端受轴向压力  $F$  作用.本文采用直角坐标系  $Ox_1x_2x_3$ ,假设极化方向沿  $x_3$  方向.

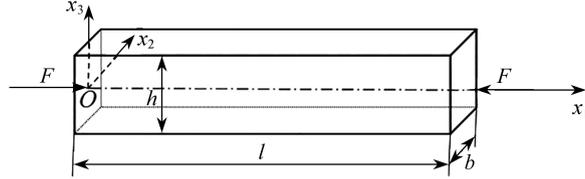


图 1 n 型压电半导体梁结构示意图

Fig. 1 The sketch of an n-type piezoelectric semiconductor beam

压电体的 Gibbs 自由能  $G$  可以表示为<sup>[24]</sup>

$$G = \int g dV = \int \left( \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} a_{ij} E_i E_j - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - f_{ijkl} E_i \varepsilon_{jk,l} \right) dV, \quad (1)$$

式中  $g$  为自由能密度,  $V$  为体积,  $\varepsilon_{ij}$  和  $\varepsilon_{ij,k}$  分别为应变和应变梯度,  $E_i$  表示电场强度,  $c_{ijkl}$ ,  $a_{ij}$ ,  $e_{ijk}$  和  $f_{ijkl}$  分别为弹性、介电、压电和挠曲电系数.下标中字母  $i, j, k$  可取值 1, 2, 3, 逗号表示对其后指标对应坐标的微分, 重复指标遵从 Einstein 求和约定.

由自由能密度  $g$  可进一步推得压电体的本构方程如下:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad \sigma_{ijk} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = -f_{lijk} E_l, \quad D_i = -\frac{\partial g}{\partial E_i} = a_{ij} E_j + e_{ijk} \varepsilon_{jk} + f_{ijkl} \varepsilon_{jk,l}, \quad (2)$$

式中  $\sigma_{ij}$  和  $\sigma_{ijk}$  分别为应力和高阶应力,  $D_i$  为电位移.

在矩形截面梁的上、下表面考虑表面效应,基于 SO 表面弹性理论<sup>[34]</sup>的表面本构方程为

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_0 \delta_{\alpha\beta} + (\lambda_0 + \tau_0) \varepsilon_{\nu\nu} \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu_0 - \tau_0) \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_0 u_{\alpha,\beta}, \quad m_{\alpha\beta} = \xi_0 \kappa_{\nu\nu} \delta_{\alpha\beta} + 2\eta_0 \kappa_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

式中  $\tau_0$  为表面残余应力,  $\lambda_0$  和  $\mu_0$  为表面弹性常数,  $\xi_0$  和  $\eta_0$  为表面弯曲刚度常数,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  和  $\kappa_{\alpha\beta}$  分别为表面的应变和曲率,  $\delta_{\alpha\beta}$  为 Kronecker 符号, 此处下标字母  $\alpha, \beta$  仅取值为 1 或 2. 与 GM 表面弹性理论<sup>[32-33]</sup>相比, SO 表面弹性理论<sup>[34]</sup>额外考虑了表面弯曲刚度影响, 即式(3)中的第二式所表示的关系.

假设 n 型半导体的电子浓度扰动量  $\Delta n$  为微小量, 其漂移扩散方程可线性化表示为<sup>[31]</sup>

$$J_i^n = qn_0 \mu_{ij}^n E_j + qD_{ij}^n (\Delta n)_{,j}, \quad (4)$$

式中  $q$  为基本电荷量, 取值  $1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ ,  $n_0$  为电子初始浓度,  $\mu_{ij}^n$  和  $D_{ij}^n$  分别代表电子漂移和扩散系数.

## 2 压电半导体梁静态屈曲问题的解

### 2.1 控制方程和边界条件

基于 Euler-Bernoulli 梁模型, 非零位移为

$$u_1 = -x_3 \frac{dw}{dx_1}, \quad u_3 = w(x_1). \quad (5)$$

根据几何关系可得应变和应变梯度分别为

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{d^2 w}{dx_1^2}, \quad \varepsilon_{11,3} = -\frac{d^2 w}{dx_1^2} = \kappa_{11}, \quad (6)$$

在 Euler-Bernoulli 梁中,  $\varepsilon_{11,1}$  较  $\varepsilon_{11,3}$  是可以忽略的微小量<sup>[24]</sup>, 因此式(6)中未考虑应变梯度分量  $\varepsilon_{11,1}$ .

已有文献[16,55]研究分析表明,当压电半导体 Euler-Bernoulli 梁受弯曲变形时,除梁的两端外,电势  $\varphi$  沿轴向几乎保持常量,载流子只在横截面内重新分布,因此本文忽略沿轴向的电场强度、电位移<sup>[52]</sup>和电流密度的计算.基于此,由式(2)、(3)、(4)和(6)可得到 n 型压电半导体梁的本构方程、表面本构方程和电流密度方程分别为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\kappa_{11}x_3 - e_{31}E_3, \sigma_{113} = -f_{3113}E_3, D_3 = a_{33}E_3 + e_{31}\kappa_{11}x_3 + f_{3113}\kappa_{11}, \\ \tau_{11} = \tau_0 + (\lambda_0 + 2\mu_0)\kappa_{11}x_3, m_{11} = (\xi_0 + 2\eta_0)\kappa_{11}, \\ J_3^n = qn_0\mu_{33}^n E_3 + qD_{33}^n(\Delta n)_{,3}, \end{cases} \quad (7)$$

$x_3$  方向的电场强度与电势的关系为

$$E_3 = -\varphi_{,3}. \quad (8)$$

假设应力、电位移等力学和电学量不沿梁的宽度变化,考虑表面效应的上述 Euler-Bernoulli 梁的 Gibbs 自由能的变分可具体表达为

$$\delta G = \int (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{113}\delta\varepsilon_{11,3} - D_3\delta E_3) b dx_1 dx_3 + \int (\tau_{11}\delta\varepsilon_{11})^\pm b dx_1 + \int (m_{11}\delta\kappa_{11})^\pm b dx_1, \quad (9)$$

式中括号后的上标+(或-)表示其中的相关量在梁上(下)表面的取值.

外力功  $W$  包含梁端部轴向压力  $F$  做的功和梁内部电子浓度扰动  $\Delta n$  所做的功.其变分为

$$\delta W = \int F \frac{dw}{dx_1} \delta\left(\frac{dw}{dx_1}\right) dx_1 + \int q(\Delta n) \delta\varphi b dx_1 dx_3. \quad (10)$$

根据 Hamilton 变分原理  $\delta(-G + W) = 0$ , 可推导得

$$\frac{d^2 M}{dx_1^2} + F\kappa_{11} = 0, D_{3,3} + q(\Delta n) = 0, \quad (11)$$

$$n_1 M \delta\left(\frac{dw}{dx_1}\right) = 0, n_1 \left(\frac{dM}{dx_1} - F \frac{dw}{dx_1}\right) \delta w = 0, n_3 D_3 \delta\varphi = 0, \quad (12)$$

式中

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11} b dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{113} b dx_3 + \frac{bh}{2}(\tau_{11}^+ - \tau_{11}^-) + b(m_{11}^+ + m_{11}^-). \quad (13)$$

式(12)中的前两式为梁端位移和静力等效边界条件,第三式为梁上、下表面电学边界条件.

如式(7)最后一式所示,电流密度只有  $x_3$  方向的分量.因此,电荷守恒方程可表示为

$$J_{3,3}^n = 0. \quad (14)$$

针对上述控制方程,本文在梁的上、下表面采用电隔离边界条件:

$$n_3 J_3^n = 0. \quad (15)$$

式(11)和式(14)构成压电半导体 Euler-Bernoulli 梁的屈曲问题的控制方程组;式(12)和式(15)为相应的力学和电学边界条件.

由式(14)和式(15)得梁中  $J_3^n = 0$ , 于是由式(7)最后一式可得

$$(\Delta n)_{,3} = -\frac{n_0 \mu_{33}^n}{D_{33}^n} E_3. \quad (16)$$

将式(11)第二式对  $x_3$  微分,并将式(7)第三式和式(16)代入,可得

$$E_{3,33} - \frac{qn_0 \mu_{33}^n}{a_{33} D_{33}^n} E_3 = 0. \quad (17)$$

式(17)的解为

$$E_3 = A(x_1) \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + B(x_1) \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \quad (18)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{a_{33} D_{33}^n}{qn_0 \mu_{33}^n}} = \sqrt{\frac{a_{33} k_B T}{q^2 n_0}}. \quad (19)$$

式(19)应用了 Einstein 关系<sup>[4]</sup>,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K 为 Boltzmann 常数,  $T$  为绝对温度,  $\lambda$  为 Debye-Hückel 长度<sup>[19]</sup>.

将式(18)代入式(16)并积分,假设电子浓度扰动量  $\Delta n$  满足条件  $\int_{-h/2}^{h/2} (\Delta n) dx_3 = 0$ , 可推得

$$\Delta n = -\frac{a_{33}}{q\lambda} \left[ A(x_1) \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + B(x_1) \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) \right] + \frac{2a_{33} \sinh \beta}{qh} B(x_1), \quad \beta = \frac{h}{2\lambda}. \quad (20)$$

由式(19)和式(20)第二式可知,介电常数  $a_{33}$  越小,初始电子浓度  $n_0$  和  $h$  越大,  $\beta$  值越大.

将式(18)代入式(7)第三式,可得

$$D_3 = a_{33} \left[ A(x_1) \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + B(x_1) \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) \right] + e_{31} \kappa_{11} x_3 + f_{3113} \kappa_{11}. \quad (21)$$

将式(20)和式(21)代入式(11)第二式得

$$B(x_1) = -\frac{e_{31} h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta}. \quad (22)$$

于是可解得

$$\begin{cases} E_3 = A(x_1) \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - \frac{e_{31} h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ D_3 = a_{33} A(x_1) \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + e_{31} \kappa_{11} \left[ x_3 - \frac{h}{2 \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) \right] + f_{3113} \kappa_{11}, \\ \Delta n = -\frac{a_{33}}{q\lambda} A(x_1) \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{e_{31} \kappa_{11}}{q} \left[ \frac{\beta}{\sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - 1 \right]. \end{cases} \quad (23)$$

将式(23)第一式代入式(8)并积分,可得电势的通解为

$$\varphi = -\lambda A(x_1) \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{\lambda e_{31} h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + C(x_1), \quad (24)$$

式中  $A(x_1)$  和  $C(x_1)$  是待定函数,由电势边界条件决定.

## 2.2 短路条件屈曲问题的解

若在梁的上、下表面铺有电极且外接电压  $\Phi$ ,则在梁的上、下表面满足短路电学边界条件  $\delta\varphi = 0$ . 短路电学边界条件具体可表示为如下形式:

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{h}{2}, & \varphi = 0, \\ x_3 = \frac{h}{2}, & \varphi = \Phi. \end{cases} \quad (25)$$

将式(24)代入式(25),解得

$$A(x_1) = -\frac{\Phi}{2\lambda \sinh \beta}, \quad C(x_1) = -\frac{\lambda e_{31} h \coth \beta}{2a_{33}} \kappa_{11} + \frac{\Phi}{2}. \quad (26)$$

由此,可进一步求得  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{113}$ ,  $E_3$ ,  $D_3$ ,  $\varphi$  和  $\Delta n$  分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \kappa_{11} x_3 + \frac{e_{31} \Phi}{2\lambda \sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{e_{31}^2 h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ \sigma_{113} &= \frac{f_{3113} \Phi}{2\lambda \sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{f_{3113} e_{31} h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ E_3 &= -\frac{\Phi}{2\lambda \sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - \frac{e_{31} h \kappa_{11}}{2a_{33} \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ D_3 &= -\frac{a_{33} \Phi}{2\lambda \sinh \beta} \cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + e_{31} \kappa_{11} \left[ x_3 - \frac{h}{2 \sinh \beta} \sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) \right] + f_{3113} \kappa_{11}, \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{2} \left[ \frac{1}{\sinh \beta} \sinh \left( \frac{x_3}{\lambda} \right) + 1 \right] + \frac{\lambda e_{31} h \kappa_{11}}{2 a_{33} \sinh \beta} \left[ \cosh \left( \frac{x_3}{\lambda} \right) - \cosh \beta \right],$$

$$\Delta n = \frac{a_{33} \Phi}{2 \lambda^2 q \sinh \beta} \sinh \left( \frac{x_3}{\lambda} \right) + \frac{e_{31} \kappa_{11}}{q} \left[ \frac{\beta}{\sinh \beta} \cosh \left( \frac{x_3}{\lambda} \right) - 1 \right]. \quad (27)$$

将式(7)第四式和第五式、式(27)前两式代入式(13),整理得

$$M = c_{11}^* I \kappa_{11} + b f_{3113} \Phi, \quad (28)$$

式中

$$\begin{cases} \frac{c_{11}^*}{c_{11}} = 1 + \Gamma_1 \frac{e_{31}^2}{c_{11} a_{33}} + \frac{6(\lambda_0 + 2\mu_0)}{c_{11} h} + \frac{24(\xi_0 + 2\eta_0)}{c_{11} h^3}, & \Gamma_1 = \frac{3}{\beta} \left( \coth \beta - \frac{1}{\beta} \right), \\ I = \frac{1}{12} b h^3, \end{cases} \quad (29)$$

其中  $c_{11}^*$  为等效弹性常数,  $c_{11}^* I$  为短路时压电半导体梁的等效抗弯刚度。

当  $\beta \rightarrow 0$ , 则表示短路条件下的介电材料(即材料无半导体性能),由 L'Hôpital 法则得  $\Gamma_1 \rightarrow 1$ , 式(29)第一式可退化为

$$\frac{c_{11}^*}{c_{11}} = 1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11} a_{33}} + \frac{6(\lambda_0 + 2\mu_0)}{c_{11} h} + \frac{24(\xi_0 + 2\eta_0)}{c_{11} h^3}. \quad (30)$$

式(30)即考虑表面效应的介电材料等效弹性常数比的表达式,右端前两项与文献[24,52]中的表达一致,第三项与文献[43]中的表达一致。

此处强调对含简支端和自由端的压电半导体梁,式(28)在端部不能严格满足静力等效边界条件  $M = 0$ , 可做如下处理。

假设在简支端和自由端有如下电学条件:

$$\int_{-h/2}^{h/2} D_3 dx_3 = 0. \quad (31)$$

将式(27)第四式代入上式,得端部的曲率与外加电压  $\Phi$  的关系为

$$\kappa_{11} = \frac{a_{33}}{f_{3113} h} \Phi, \quad (32)$$

端部  $M$  近似为

$$M = c_{11}^* I \kappa_{11} + \frac{12 f_{3113}^2}{a_{33} h^2} I \kappa_{11}, \quad (33)$$

在简支端和自由端,当  $\kappa_{11} = 0$  时,  $M = 0$  近似满足。因此,短路时求含简支端和自由端的压电半导体梁的屈曲临界压力,静力等效边界条件  $M = 0$  可由位移条件  $\kappa_{11} = 0$  替换。

将式(28)代入式(11)第一式,可得

$$c_{11}^* I \frac{d^4 w}{dx_1^4} + F \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0. \quad (34)$$

由式(34)和边界条件式(12)前两式,可得短路时压电半导体梁静态屈曲的临界压力<sup>[56]</sup>为

$$F_{cr} = \zeta \frac{\pi^2 c_{11}^* I}{l^2}, \quad (35)$$

式中  $\zeta$  为由梁两端约束条件确定的无量纲常数,例如悬臂梁  $\zeta = 1/4$ , 简支梁  $\zeta = 1$ , 一端固支一端简支  $\zeta = 2$ , 两端固支  $\zeta = 4$ <sup>[56]</sup>。

### 2.3 开路条件下屈曲问题的解

梁结构在开路条件下的边界条件可表示为

$$x_3 = \pm \frac{h}{2}, D_3 = 0. \quad (36)$$

由式(23)第三式得

$$A(x_1) = -\frac{f_{3113}\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}, \quad (37)$$

于是  $\sigma_{11}, \sigma_{113}, E_3, D_3, \varphi$  和  $\Delta n$  分别为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\kappa_{11}x_3 + \frac{e_{31}f_{3113}\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{e_{31}^2h\kappa_{11}}{2a_{33}\sinh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ \sigma_{113} = \frac{f_{3113}^2\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{e_{31}f_{3113}h\kappa_{11}}{2a_{33}\sinh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ E_3 = -\frac{f_{3113}\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - \frac{e_{31}h\kappa_{11}}{2a_{33}\sinh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right), \\ D_3 = -\frac{f_{3113}\kappa_{11}}{\cosh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + e_{31}\kappa_{11}\left[x_3 - \frac{h}{2\sinh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right)\right] + f_{3113}\kappa_{11}, \\ \varphi = \frac{\lambda f_{3113}\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{\lambda e_{31}h\kappa_{11}}{2a_{33}\sinh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + C(x_1), \\ \Delta n = \frac{f_{3113}\kappa_{11}}{q\lambda\cosh\beta}\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \frac{e_{31}\kappa_{11}}{q}\left[\frac{\beta}{\sinh\beta}\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - 1\right]. \end{cases} \quad (38)$$

若令梁的下表面  $\varphi = 0$ , 由式(38)倒数第二式可求得

$$\varphi = \frac{\lambda f_{3113}\kappa_{11}}{a_{33}\cosh\beta}\left[\sinh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) + \sinh\beta\right] + \frac{\lambda e_{31}h\kappa_{11}}{2a_{33}\sinh\beta}\left[\cosh\left(\frac{x_3}{\lambda}\right) - \cosh\beta\right]. \quad (39)$$

将式(7)第四式和第五式、式(38)前两式代入式(13)得

$$M = c_{11}^{**}I\kappa_{11}, \quad (40)$$

式中

$$\frac{c_{11}^{**}}{c_{11}} = 1 + \Gamma_1 \frac{e_{31}^2}{c_{11}a_{33}} + \Gamma_2 \frac{12f_{3113}^2}{c_{11}a_{33}h^2} + \frac{6(\lambda_0 + 2\mu_0)}{c_{11}h} + \frac{24(\xi_0 + 2\eta_0)}{c_{11}h^3}, \quad \Gamma_2 = \frac{\tanh\beta}{\beta}. \quad (41)$$

式(40)中的  $c_{11}^{**}I$  为开路条件下压电半导体梁的等效抗弯刚度,  $c_{11}^{**}$  则为等效弹性常数. 比较式(41)和式(29)第一式可知, 开路条件下等效弹性常数还受挠曲电效应的影响. 事实上, 已有文献表明, 等效弹性常数(或等效抗弯刚度)是否受挠曲电效应的影响与梁上、下表面的电学条件有关<sup>[24]</sup>. 如式(28)和式(29)所示, 短路时挠曲电效应对  $M$  的贡献由外加电压  $\Phi$  引起, 未对等效弹性常数产生影响, 而开路时挠曲电效应对  $M$  的贡献通过改变曲率  $\kappa_{11}$  实现, 对等效弹性常数的影响如式(41)所示. 短路时若在梁的端部假设如式(31)所表达的电学边界条件, 则有式(33)在端部成立. 结合式(28)、(33)和(41)可看出, 外加电压将会抑制挠曲电效应对等效弹性常数和等效抗弯刚度的影响. 另一方面, 我们注意到在式(29)第一式等号右边的后两项和式(41)第一式等号右边的后三项中, 分母均含有梁结构高度  $h$ , 表明挠曲电效应、表面弹性和表面弯曲刚度对结构等效弹性模量的影响均存在尺寸依赖.

文献[6]的研究表明, 当纳米压电半导体梁两端受压时, 由于压电和挠曲电效应, 自由电子将重新分布, 例如向梁的上下表面聚集. 另一方面, 压电半导体梁结构内自由电子的存在和分布会进一步削弱压电和挠曲电效应所产生的作用, 即产生屏蔽效应. 式(29)和式(41)中的函数  $\Gamma_1$  反映了电子初始浓度分布对压电效应的屏蔽, 而式(41)中的函数  $\Gamma_2$  反映了电子初始浓度和分布对挠曲电效应的屏蔽效应强弱, 这与文献[6, 19]的结论一致. 可观察到  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  均是关于  $\beta$  的单调减函数,  $\beta$  值越大,  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  越小, 屏蔽效应则越强. 由于  $\beta$  与  $h$  成正比, 故  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  也具有尺寸依赖性.

当  $\beta \rightarrow 0$  时, 由 L'Hôpital 法则可求得  $\Gamma_1 \rightarrow 1, \Gamma_2 \rightarrow 1$ , 式(41)第一式可化简为

$$\frac{c_{11}^{**}}{c_{11}} = 1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11}a_{33}} + \frac{12f_{3113}^2}{c_{11}a_{33}h^2} + \frac{6(\lambda_0 + 2\mu_0)}{c_{11}h} + \frac{24(\xi_0 + 2\eta_0)}{c_{11}h^3}. \quad (42)$$

由式(42)等号右端第三项可知,开路时挠曲电效应可使梁的等效弹性常数增大,文献[19]称之为挠曲电刚化.注意到等号右端前三项与文献[24]的运算结果一致.

将式(40)代入式(11)的第一式,可得

$$c_{11}^{**} I \frac{d^4 w}{dx_1^4} + F \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0. \quad (43)$$

由微分方程式(43)和边界条件式(12)前两式,可求得开路时压电半导体梁静态屈曲时的临界压力<sup>[56]</sup>为

$$F_{cr} = \zeta \frac{\pi^2 c_{11}^{**} I}{l^2}. \quad (44)$$

将上述两种条件下所得的压电半导体梁屈曲临界压力(式(35)和式(44))与经典弹性梁的静态屈曲临界压力表达式作对比可见临界压力形式一致,前者可通过将经典弹性梁的临界压力表达式中的弹性常数替换为等效弹性常数得到.临界压力与等效弹性常数成线性关系,因此本文着重分析了等效弹性常数对各因素的依赖性.全面分析了考虑压电、挠曲电、半导体性能和表面效应的等效弹性常数与纯弹性梁的弹性常数的关系,如式(29)第一式和式(41)第一式所示.

### 3 数值分析与讨论

为深入分析压电效应、挠曲电效应、半导体性能和表面效应对压电半导体梁静态屈曲临界压力的影响,以下对式(29)和式(41)的第一式进行详细的数值分析.本文取 ZnO 作为压电半导体梁结构的材料,其物性常数和电子初始浓度分别为  $c_{11} = 207 \text{ GPa}$ ,  $e_{31} = -0.51 \text{ C/m}^2$ ,  $a_{33} = 7.889 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ ,  $\mu_{33} = 0.02 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $D_{33} = 5.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $n_0 = 10^{23} \text{ m}^{-3}$ <sup>[55]</sup>, 挠曲电系数  $f_{3113} = 10^{-9} \text{ C/m}$ <sup>[30]</sup>. 因缺乏实验测量数据,表面弹性常数  $c_{11}^s = \lambda_0 + 2\mu_0$  可由相应体弹性常数  $c_{11}$  与其特征长度  $h_0$  的乘积决定(本文取  $h_0 = 0.4 \text{ nm}$ <sup>[53]</sup>), 因此  $c_{11}^s$  约为  $81.97 \text{ N/m}$ . 根据文献[35],数值模拟所得纳米线结构不同晶向的表面厚度分别取为  $t_{\langle 100 \rangle} = 10.56 \text{ \AA}$  和  $t_{\langle 110 \rangle} = 6.73 \text{ \AA}$ ,故本文取表面层厚度  $t \approx 1 \text{ nm}$ ,表面弯曲常数  $\xi_0 + 2\eta_0$  由以上表面弹性常数  $c_{11}^s$  与表面层厚度  $t$  平方的乘积得到.

首先令梁截面的高度  $h = 50 \text{ nm}$ ,表面弹性常数  $c_{11}^s$  由  $-81.97 \text{ N/m}$  变化到  $81.97 \text{ N/m}$ ,图 2 给出了无量纲等效弹性常数随表面弹性常数的变化规律.从图 2 中可以看出,两种条件下表面弯曲刚度对等效弹性常数的影响几乎可忽略.表面弹性常数对等效弹性常数的影响较为显著,其中表面弹性常数为正值时等效弹性常数增大,反之减小.压电和挠曲电效应的存在均使得等效弹性常数增加.

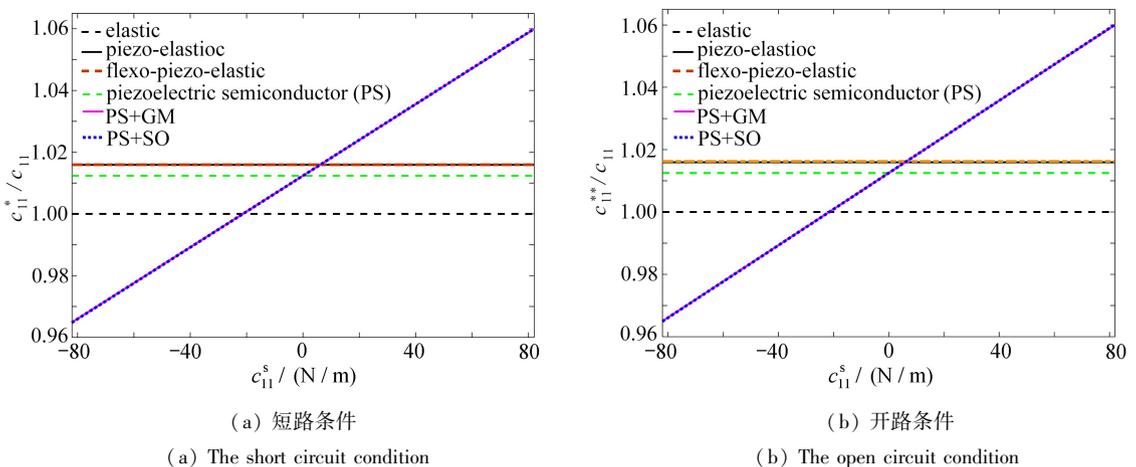


图 2 等效弹性常数对表面弹性常数  $c_{11}^s$  的依赖规律

Fig. 2 The dimensionless effective elastic constants vs. GM surface elastic constant  $c_{11}^s$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

图 3 给出了等效弹性常数随矩形截面梁高度  $h$  的变化规律,图中表面弹性常数取为  $-81.97 \text{ N/m}$ .可观察到,纯弹性和压电弹性梁结构的等效弹性常数均不随高度  $h$  变化,即无尺寸依赖性.考虑挠曲电、表面弹

性和表面弯曲刚度效应时等效弹性常数均随  $h$  变化, 上述因素均使等效弹性常数呈现对尺寸的依赖. 由图 3(b) 可知, 挠曲电效应和表面弯曲刚度均在  $h$  较小时 (约小于 15 nm) 才对等效弹性常数产生显著影响. 横截面高度  $h$  取值在 5 nm 到 50 nm 之间时, 表面弹性对等效弹性常数产生明显影响, 且  $h$  越小, 影响越显著, 特别是当  $h$  小于 15 nm 时, SO 与 GM 表面模型的区别可明显展现.

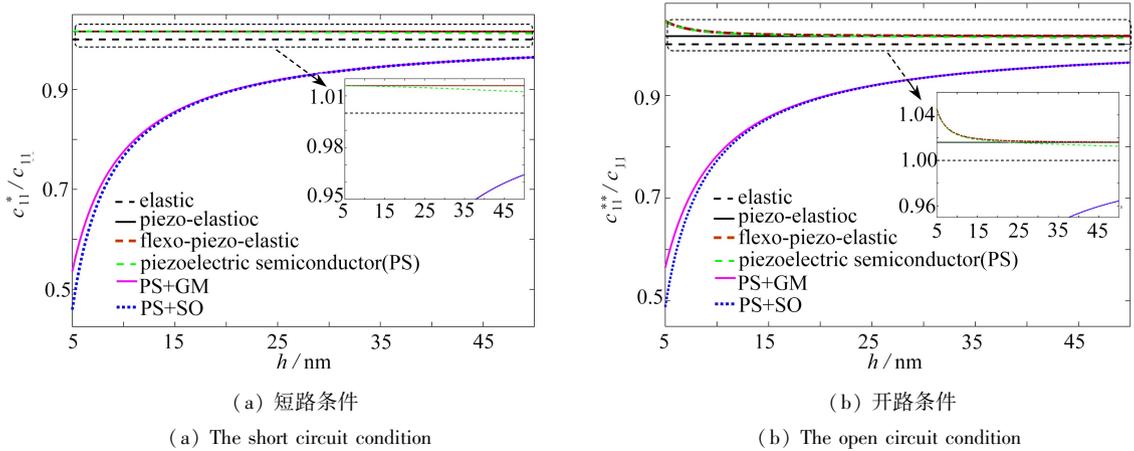


图 3 等效弹性常数随矩形截面梁高度  $h$  的变化

Fig. 3 The dimensionless effective elastic constants vs. height  $h$

进一步地, 由式 (35) 和式 (44) 可得短路和开路条件下屈曲临界应力分别为

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{bh} = \frac{1}{12} \frac{\zeta \pi^2 c_{11}^*}{(l/h)^2}, \tag{45}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{12} \frac{\zeta \pi^2 c_{11}^{**}}{(l/h)^2}. \tag{46}$$

表 1 和表 2 分别列出了短路和开路条件下, 不同长细比 ( $l/h$ ) 对应的屈曲临界应力值. 由表可见, 相同高度时, 纳米压电半导体梁的屈曲临界应力随长细比的增加明显减小. 相同长细比且表面弹性常数为负值时, 屈曲临界应力随高度增加而提升. 然而相同长细比且表面弹性常数为正值时, 屈曲临界应力随高度增加而减小. 由此可见, 屈曲临界应力受表面效应、长细比和尺寸影响显著.

表 1 短路条件下屈曲临界应力 ( $\sigma_{cr}$  /MPa)

Table 1 Critical buckling stresses ( $\sigma_{cr}$  /MPa), for the short circuit condition

$h$ /nm	$c_{11}^s$ / (N/m)	$l/h$			
		10	20	50	100
10	-81.97	1 304.3	326.08	52.173	13.043
	81.97	2 154.2	538.56	86.169	21.542
50	-81.97	1 641.7	410.43	65.669	16.417
	81.97	1 805.4	451.35	72.217	18.054

表 2 开路条件下屈曲临界应力 ( $\sigma_{cr}$  /MPa)

Table 2 Critical buckling stresses ( $\sigma_{cr}$  /MPa), for the open circuit condition

$h$ /nm	$c_{11}^s$ / (N/m)	$l/h$			
		10	20	50	100
10	-81.97	1 316.1	329.02	52.643	13.161
	81.97	2 166.0	541.49	86.639	21.660
50	-81.97	1 641.9	410.48	65.677	16.419
	81.97	1 805.6	451.41	72.225	18.056

如式 (29) 和式 (41) 第二式所示, 压电半导体梁结构中电子的初始浓度对压电和挠曲电效应所产生的作用均产生屏蔽效应, 该效应的强度取决于  $\beta$  的数值,  $\beta$  越大, 屏蔽效应越强. 由图 4 可知,  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  均随  $n_0$  和  $h$

的增加而呈单调递减,且针对相同的  $n_0$  和  $h$ ,  $\Gamma_2$  小于  $\Gamma_1$ .  $\Gamma_2$  的数值较小表明对挠曲电效应的屏蔽更强.图 4 (a) 中,当  $h = 50 \text{ nm}$ ,  $n_0 = 10^{24} \text{ m}^{-3}$  时,约 86% 的挠曲电效应所产生的作用被屏蔽,约 63% 的压电效应产生的作用被屏蔽.图 4(b) 中,当  $h = 200 \text{ nm}$ ,  $n_0 = 10^{23} \text{ m}^{-3}$  时,约 89% 挠曲电效应所产生的作用被屏蔽,约 70% 压电效应所产生的作用被屏蔽. $n_0$  较大或  $h$  较大时,屏蔽效果更加明显.

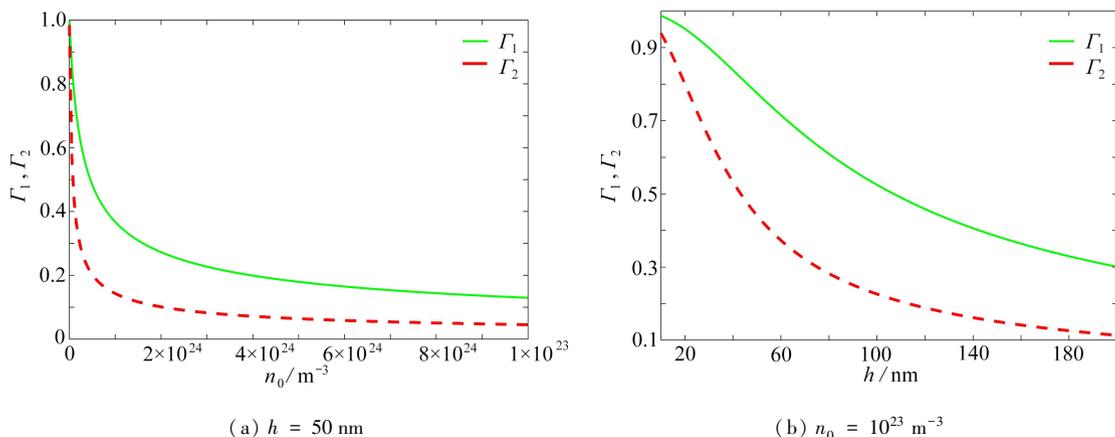


图 4  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  随  $n_0$  和  $h$  的变化

Fig. 4 Dependences of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  on  $n_0$  and  $h$

## 4 结 论

本文对压电半导体梁结构的静态屈曲行为进行了理论分析,分别得到了短路和开路条件下等效弹性常数和屈曲临界压力的解析解.详细的数值分析得到了如下结论:

1) 当梁结构的横截面尺寸缩至纳米尺度时,表面弹性效应对等效弹性常数的影响显著.特别是当横截面尺寸小于  $15 \text{ nm}$  时,表面弯曲刚度的影响不可忽略.等效弹性常数的增大或是减小取决于表面弹性常数和表面弯曲刚度的正负.

2) 压电半导体梁结构的压电效应可使等效弹性常数增大,开路条件下挠曲电效应可进一步提升等效弹性常数.

3) 压电半导体梁结构内部电子的存在会屏蔽压电和挠曲电效应所产生的作用,对挠曲电效应的屏蔽更强.屏蔽效果随电子初始浓度和梁的横截面尺寸的增加而增强.

## 参考文献 (References):

- [1] WANG Z L, WU W, FALCONI C, et al. Piezotronics and piezo-phototronics with third-generation semiconductors[J]. *MRS Bulletin*, 2018, **43**(12): 922-927.
- [2] WANG Z L. Progress in piezotronics and piezo-phototronics[J]. *Advanced Materials*, 2012, **24**(34): 4632-4646.
- [3] ZHANG G, SHEN S. Analysis of electromechanical couplings and nonlinear carrier transport in flexoelectric semiconductors[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2023, **56**(32): 325102.
- [4] WANG G, LIU J, LIU X, et al. Extensional vibration characteristics and screening of polarization charges in a ZnO piezoelectric semiconductor nanofiber[J]. *Journal of Applied Physics*, 2018, **124**(9): 094502.
- [5] SUN L, ZHANG Z, GAO C, et al. Effect of flexoelectricity on piezotronic responses of a piezoelectric semiconductor bilayer[J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, **129**(24): 244102.
- [6] LIANG C, ZHANG C, CHEN W, et al. Static buckling of piezoelectric semiconductor fibers[J]. *Materials Research Express*, 2020, **6**(12): 125919.
- [7] DAI X, ZHU F, QIAN Z, et al. Electric potential and carrier distribution in a piezoelectric semiconductor nanowire in time-harmonic bending vibration[J]. *Nano Energy*, 2018, **43**: 22-28.

- [8] HE J H, HSIN C L, LIU J, et al. Piezoelectric gated diode of a single ZnO nanowire[J]. *Advanced Materials*, 2007, **19**(6): 781-784.
- [9] WANG X, ZHOU J, SONG J, et al. Piezoelectric field effect transistor and nanoforce sensor based on a single ZnO nanowire[J]. *Nano Letters*, 2006, **6**(12): 2768-2772.
- [10] FEI P, YE H P, ZHOU J, et al. Piezoelectric potential gated field-effect transistor based on a free-standing ZnO wire[J]. *Nano Letters*, 2009, **9**(10): 3435-3439.
- [11] ZHOU J, GU Y, FEI P, et al. Flexible piezotronic strain sensor[J]. *Nano Letters*, 2008, **8**(9): 3035-3040.
- [12] ZHANG J, ZHOU J. Humidity-dependent piezopotential properties of zinc oxide nanowires: insights from atomic-scale modelling[J]. *Nano Energy*, 2018, **50**: 298-307.
- [13] LAO C S, KUANG Q, WANG Z L, et al. Polymer functionalized piezoelectric-FET as humidity/chemical nanosensors[J]. *Applied Physics Letters*, 2007, **90**(26): 262107.
- [14] WANG Z L, SONG J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays[J]. *Science*, 2006, **312**(5771): 242-246.
- [15] SONG J, ZHOU J, WANG Z L. Piezoelectric and semiconducting coupled power generating process of a single ZnO belt/wire. A technology for harvesting electricity from the environment[J]. *Nano Letters*, 2006, **6**(8): 1656-1662.
- [16] GAO Y, WANG Z L. Electrostatic potential in a bent piezoelectric nanowire. the fundamental theory of nanogenerator and nanopiezotronics[J]. *Nano Letters*, 2007, **7**(8): 2499-2505.
- [17] DENG Q, KAMMOUN M, ERTURK A, et al. Nanoscale flexoelectric energy harvesting[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(18): 3218-3225.
- [18] MOURA A G, ERTURK A. Electroelastodynamics of flexoelectric energy conversion and harvesting in elastic dielectrics[J]. *Journal of Applied Physics*, 2017, **121**(6): 064110.
- [19] QU Y, JIN F, YANG J. Buckling of flexoelectric semiconductor beams[J]. *Acta Mechanica*, 2021, **232**(7): 2623-2633.
- [20] LEE D, NOH T W. Giant flexoelectric effect through interfacial strain relaxation[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, **370**(1977): 4944-4957.
- [21] LEE D. Flexoelectricity in thin films and membranes of complex oxides[J]. *APL Materials*, 2020, **8**(9): 090901.
- [22] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect[J]. *Physical Review B*, 2008, **77**(12): 125424.
- [23] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Dramatic enhancement in energy harvesting for a narrow range of dimensions in piezoelectric nanostructures[J]. *Physical Review B*, 2008, **78**(12): 121407.
- [24] ZHOU Z D, YANG C P, SU Y X, et al. Electromechanical coupling in piezoelectric nanobeams due to the flexoelectric effect[J]. *Smart Materials and Structures*, 2017, **26**(9): 095025.
- [25] ZHANG Z, JIANG L. Size effects on electromechanical coupling fields of a bending piezoelectric nanoplate due to surface effects and flexoelectricity[J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, **116**(13): 134308.
- [26] 鲁双, 李东波, 陈晶博, 等. 考虑挠曲电与温度效应的 Mindlin-Medick 板理论及其应用[J]. *应用数学和力学*, 2023, **44**(9): 1122-1133. (LU Shuang, LI Dongbo, CHEN Jingbo, et al. The Mindlin-Medick plate theory and its application under flexoelectricity and temperature effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(9): 1122-1133. (in Chinese))
- [27] ZHAO M, LIU X, FAN C, et al. Theoretical analysis on the extension of a piezoelectric semi-conductor nanowire: effects of flexoelectricity and strain gradient[J]. *Journal of Applied Physics*, 2020, **127**(8): 085707.
- [28] ZHAO M, NIU J, LU C, et al. Effects of flexoelectricity and strain gradient on bending vibration characteristics of piezoelectric semiconductor nanowires[J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, **129**(16): 164301.

- [29] FANG K, LI P, QIAN Z. Static and dynamic analysis of a piezoelectric semiconductor cantilever under consideration of flexoelectricity and strain gradient elasticity[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2021, **34**(5): 673-686.
- [30] WANG K F, WANG B L. Electrostatic potential in a bent piezoelectric nanowire with consideration of size-dependent piezoelectricity and semiconducting characterization[J]. *Nanotechnology*, 2018, **29**(25): 255405.
- [31] QU Y, JIN F, YANG J. Effects of mechanical fields on mobile charges in a composite beam of flexoelectric dielectrics and semiconductors[J]. *Journal of Applied Physics*, 2020, **127**(19): 194502.
- [32] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, **57**(4): 291-323.
- [33] GURTIN M E, MURDOCH A I. Surface stress in solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, **14**(6): 431-440.
- [34] STEIGMANN D J, OGDEN R W. Plane deformations of elastic solids with intrinsic boundary elasticity[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1997, **453**(1959): 853-877.
- [35] CHHAPADIA P, MOHAMMADI P, SHARMA P. Curvature-dependent surface energy and implications for nanostructures[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, **59**(10): 2103-2115.
- [36] MOHAMMADI P, SHARMA P. Atomistic elucidation of the effect of surface roughness on curvature-dependent surface energy, surface stress, and elasticity[J]. *Applied Physics Letters*, 2012, **100**(13): 133110-133113.
- [37] LIANG X, HU S, SHEN S. Effects of surface and flexoelectricity on a piezoelectric nanobeam[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, **23**(3): 035020.
- [38] 周强, 张志纯, 龙志林, 等. 考虑表面效应的压电纳米梁的振动研究[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(8): 853-865. (ZHOU Qiang, ZHANG Zhichun, LONG Zhilin, et al. Vibration of piezoelectric nanobeams with surface effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 853-865. (in Chinese))
- [39] WANG G F, FENG X Q. Effects of surface stresses on contact problems at nanoscale[J]. *Journal of Applied Physics*, 2007, **101**(1): 013510.
- [40] 赵婕燕, 杨海兵. 表面效应对热电材料中纳米孔周围热应力的影响[J]. *应用数学和力学*, 2023, **44**(11): 1311-1324. (ZHAO Jieyan, YANG Haibing. Surface effects on thermal stresses around the nanohole in thermoelectric material[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(11): 1311-1324. (in Chinese))
- [41] 冯国益, 肖俊华, 苏梦雨. 考虑表面效应时孔边均布径向多裂纹 III 型断裂力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(4): 376-385. (FENG Guoyi, XIAO Junhua, SU Mengyu. Fracture mechanics analysis of mode-III radial multi cracks on the edge of a hole with surface effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(4): 376-385. (in Chinese))
- [42] YAO Y, CHEN S. Buckling behavior of nanowires predicted by a new surface energy density model[J]. *Acta Mechanica*, 2016, **227**(7): 1799-1811.
- [43] WANG G F, FENG X Q. Timoshenko beam model for buckling and vibration of nanowires with surface effects[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2009, **42**(15): 155411.
- [44] ANSARI R, SAHMANI S. Bending behavior and buckling of nanobeams including surface stress effects corresponding to different beam theories[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2011, **49**(11): 1244-1255.
- [45] CHALLAMEL N, ELISHAKOFF I. Surface stress effects may induce softening: Euler-Bernoulli and Timoshenko buckling solutions[J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2012, **44**(9): 1862-1867.
- [46] LIANG X, HU S, SHEN S. Size-dependent buckling and vibration behaviors of piezoelectric nanostructures due to flexoelectricity[J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, **24**(10): 105012.
- [47] ALIBEIGI B, BENI Y T, MEHRALIAN F. On the thermal buckling of magneto-electro-elastic piezoelectric nanobeams[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2018, **133**(3): 133.

- [48] SAMANI M S E, BENI Y T. Size dependent thermo-mechanical buckling of the flexoelectric nanobeam[J]. *Materials Research Express*, 2018, **5**(8): 085018.
- [49] JI L W, YOUNG S J, FANG T H, et al. Buckling characterization of vertical ZnO nanowires using nanoindentation[J]. *Applied Physics Letters*, 2007, **90**(3): 033109.
- [50] RIAZ M, FULATI A, AMIN G, et al. Buckling and elastic stability of vertical ZnO nanotubes and nanorods[J]. *Journal of Applied Physics*, 2009, **106**(3): 034309.
- [51] ZHANG J, WANG C, ADHIKARI S. Fracture and buckling of piezoelectric nanowires subject to an electric field[J]. *Journal of Applied Physics*, 2013, **114**(17): 174306.
- [52] WANG G F, FENG X Q. Effect of surface stresses on the vibration and buckling of piezoelectric nanowires [J]. *Europhysics Letters*, 2010, **91**(5): 56007.
- [53] ZHANG Z, LIANG C, KONG D, et al. Dynamic buckling and free bending vibration of axially compressed piezoelectric semiconductor rod with surface effect[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, **238**: 107823.
- [54] WANG Z, HU Q, ZHAO J, et al. Failure mode transformation of ZnO nanowires under uniaxial compression: from phase transition to buckling[J]. *Nanotechnology*, 2019, **30**(37): 375702.
- [55] FAN S, LIANG Y, XIE J, et al. Exact solutions to the electromechanical quantities inside a statically-bent circular ZnO nanowire by taking into account both the piezoelectric property and the semiconducting performance, part I : linearized analysis[J]. *Nano Energy*, 2017, **40**: 82-87.
- [56] TIMOSHENKO S. *Theory of Elastic Stability*[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961.