

基于偶应力理论的压电材料轴对称接触问题*

吕鑫, 柯燎亮, 苏洁

(天津大学 机械工程学院, 天津 300350)

摘要: 基于偶应力理论,研究了刚性绝缘球压头与横观各向同性压电半空间尺度依赖的轴对称接触问题.利用 Hankel 积分变换和积分最小二乘法,获得了接触压力.讨论了特征材料长度对接触压力分布、接触半径和压痕深度的影响.结果表明,基于偶应力理论获得的接触压力结果明显大于经典结果.

关键词: 轴对称接触; 压电材料; 尺度效应; 偶应力理论

中图分类号: O34 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.450190

An Axisymmetric Contact Problem of Piezoelectric Materials Based on the Couple Stress Theory

LÜ Xin, KE Liaoliang, SU Jie

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University,
Tianjin 300350, P.R.China)

Abstract: Based on the couple stress theory, the axisymmetric contact problem between a rigid insulating spherical punch and a transversely isotropic piezoelectric half-space was studied. With the Hankel integral transform and the integral least squares approach, the analytical solutions of the contact pressure were obtained. The effects of the characteristic material length on the contact pressure distribution, the contact radius and the indentation depth were discussed. The results indicate that, the contact pressure obtained based on the couple-stress theory is significantly greater than the classical results.

Key words: axisymmetric contact; piezoelectric material; size effect; couple stress theory

0 引言

经典连续介质力学是一种基于物质连续分布假设的近似分析方法,这一理论为分析宏观尺度上材料的力学行为提供了合理的依据.在经典连续介质力学中,小变形假设下旋转运动不造成形变,所以位移梯度全部用对称的应力张量表示是合理的.然而实验表明,当材料的尺度减小到微米量级时,材料内禀性能及应用规律和原理表现出与宏观尺度明显的不同^[1-3].为了建立更完整的连续介质理论,需要引入新的形变度量来

* 收稿日期: 2024-07-01; 修订日期: 2024-08-13

基金项目: 国家自然科学基金(12332006;12021002)

作者简介: 吕鑫(1993—),女,博士生(E-mail: lvxin@tju.edu.cn);

柯燎亮(1979—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: llke@tju.edu.cn);

苏洁(1988—),女,副教授,博士(E-mail: jiesu@tju.edu.cn).

引用格式: 吕鑫,柯燎亮,苏洁.基于偶应力理论的压电材料轴对称接触问题[J].应用数学和力学,2024,45(10): 1268-1278.

描述介质内部存在的微观结构(裂纹、孔洞、位错或晶格缺陷)所导致的力学不对称,例如曲率张量。在这样的理论框架下就引入了偶应力这一概念。偶应力弹性理论是最基本的梯度型广义连续介质力学理论,其他理论方法分支多是在偶应力理论的基础上建立起来的。

尺度效应是微/纳米材料的一个普遍特征,它导致了各种与尺寸有关的行为、特性和现象。随着接触尺寸的减小,材料内部的特征长度对宏观响应的影响变得越来越明显。基于偶应力理论,Zisis 课题组^[4-8]系统地研究了材料的接触行为,他们研究的结果表明,经典接触理论预测的结果与在偶应力理论框架下得到的结果有很大的差异。Karuriya 和 Bhandakkar^[9]研究了有限厚度弹性层与不同形状压头的尺度依赖的压痕问题。基于偶应力理论,Song 等^[10-11]考虑了均匀弹性半平面的滑动摩擦和均匀涂层半平面的无摩擦接触问题。Wang 等^[12]分析了尺度依赖的部分滑移接触问题。Çömez 和 El-Borgi^[13]探究了尺度依赖的层状结构的滑动摩擦接触问题。总而言之,偶应力理论在接触问题中得到了广泛应用^[14-18]。

随着智能器件的日益小型化,压电材料被广泛应用于各种微型设备中,如微型发电机、制动器和传感器等^[19-21]。这些压电微型设备在实际使用中通常会遭受集中的力电载荷,因而会不可避免地产生接触、摩擦和磨损。在偶应力理论框架下,关于压电材料中波的传播^[22]、弯曲^[23]、自由振动^[24]和断裂^[25]等问题得到了较多关注。但是关于压电材料尺度依赖接触问题的研究非常有限,目前仅见 Sun 等^[26]对压电材料的二维尺度依赖接触问题进行了讨论。轴对称接触问题在工业生产活动中广泛存在,同时轴对称接触可以消除只考虑二维近似时带来的边界效应,然而目前还没有发现关于压电材料尺度依赖轴对称接触问题的相关文献报道。

接触问题是一个混合边值问题,目前涌现出几种具有代表性的处理方法:第一种方法是利用积分变换,将混合边值问题转化为奇异积分方程,再将积分方程离散化为代数方程后进行数值求解^[27-28]。第二种方法是用近似的边界条件代替精确的边界条件,然后使用基函数迭代求解弹性接触问题^[29-30]。这两种方法都可以获得满意的结果^[27-30]。第二种方法能够给出接触压力的显式表达式,通常需要数量较少的基函数就能获得较为精确的结果,因此本文选择第二种方法来研究接触问题。

本文利用偶应力理论,对压电半空间与球压头尺度依赖的无摩擦接触问题进行了理论分析。利用材料的特征材料长度来描述尺度效应。利用 Hankel 积分变换和积分最小二乘法,得到了接触压力的解析解。最后,讨论了特征材料长度对接触压力分布、接触半径和压痕深度的影响。

本文研究工作的创新点如下:1) 基于偶应力理论,建立了压电材料尺度依赖轴对称无摩擦接触模型,系统地分析了压电材料尺度依赖轴对称无摩擦接触行为。2) 研究发现,利用偶应力理论可以有效地描述微尺度压电材料的尺度依赖接触力学行为,研究结果为改善微型智能压电器件的力电接触损伤以及压电材料的优化设计和工程应用提供了理论依据。

1 偶应力理论下的压电材料接触问题

图 1 描述了横观各向同性压电半空间与刚性绝缘球压头的尺度依赖的轴对称接触模型。球压头的半径为 R , 球压头上表面承受集中载荷 F , 圆形接触区域的半径为 a 。压电材料的极化方向沿着 z 轴方向。

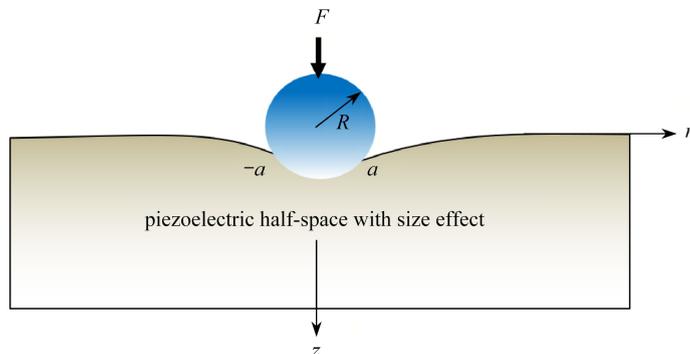


图 1 球压头与压电半空间尺度依赖的轴对称接触

Fig. 1 Size-dependent axisymmetric contact between the spherical punch and the piezoelectric half-space

1.1 基本方程

在偶应力弹性理论中,考虑轴对称问题,几何方程表示为^[8]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$D_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad D_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$k_{\theta r} = -\frac{\omega_\theta}{r}, \quad k_{r\theta} = \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r}, \quad k_{z\theta} = \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \quad (4)$$

其中, $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ 和 ε_{rz} 为应变分量; u_r 和 u_z 为位移分量; D_r 和 D_z 为电位移分量; ϕ 为电势; ω_θ 为旋转分量; $k_{\theta r}, k_{r\theta}$ 和 $k_{z\theta}$ 为曲率张量的分量.

平衡方程表示为^[8, 31]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial m_{z\theta}}{\partial z} + \frac{m_{r\theta} + m_{\theta r}}{r} + \sigma_{rz} - \sigma_{rz} = 0, \quad (8)$$

其中, $m_{r\theta}, m_{\theta r}, m_{z\theta}$ 和 $m_{\theta z}$ 为偶应力分量.在偶应力理论中,应力分量 σ_{rz} 和 σ_{rz} 是非对称的,可以写作^[17]

$$\sigma_{rz} = \tau_{rz} + \alpha_{rz}, \quad \sigma_{rz} = \tau_{rz} + \alpha_{rz}, \quad (9)$$

其中

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}, \quad \alpha_{rz} = -\alpha_{rz}, \quad (10)$$

这里, τ_{rz} 和 τ_{rz} 是应力的对称部分; α_{rz} 和 α_{rz} 是应力的反对称部分.

将方程(9)、(10)代入方程(8),可以得到

$$\tau_{rz} = -\tau_{rz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial r} + \frac{m_{r\theta} + m_{\theta r}}{r} + \frac{\partial m_{z\theta}}{\partial z} \right). \quad (11)$$

Wang等^[32]提出了具有偶应力的横观各向同性压电材料的本构方程.对于横观各向同性材料,特征材料长度和剪切模量在不同方向上是不同的^[33-34].在横观各向同性压电材料的尺度依赖接触问题的研究中应考虑这一效应.然而,由于难以通过实验方法测量不同方向上的特征材料长度和剪切模量,目前还没有发现相关的报道.为了得到解析解,我们假设不同方向上的特征材料长度和剪切模量相同.压电半空间的本构方程表示为^[8, 31]

$$\sigma_{zz} = C_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\sigma_{rz} + \sigma_{rz} = 2C_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + 2e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (13)$$

$$D_z = e_{31} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (14)$$

$$m_{r\theta} = 4Gl^2 \left(\frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \omega_\theta \right), \quad m_{\theta r} = 4Gl^2 \left(\beta \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \omega_\theta \right), \quad (15)$$

$$m_{z\theta} = 4Gl^2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \quad m_{\theta z} = \beta m_{z\theta}, \quad (16)$$

其中, C_{jk} 为弹性常数; e_{jk} 为压电常数; ε_{jk} 为介电常数; l 为特征材料长度, 与材料的微观结构有关, 包括微裂缝、空隙、位错或晶格缺陷等^[10]; 这里, $G = C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ ^[26]; β 是一个无量纲参数^[8], 且 $-1 < \beta < 1$.

把本构方程(12)–(16)代入到平衡方程(5)–(8), 并利用几何方程(1)–(4), 得到如下的位移控制方程:

$$C_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + C_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + Gl^2 \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial^3 u_r}{\partial r \partial z^2} \right) - \frac{\partial^4 u_r}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial r \partial z^3} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial r^3 \partial z} \right] = 0, \quad (17)$$

$$C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + C_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Gl^2 \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 u_r}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 u_z}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^2 \partial z} - 2 \frac{\partial^3 u_z}{\partial r^3} \right) + \frac{\partial^4 u_r}{\partial r \partial z^3} + \frac{\partial^4 u_r}{\partial r^3 \partial z} - \frac{\partial^4 u_z}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 u_z}{\partial r^4} \right] = 0, \quad (18)$$

$$e_{15} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (19)$$

注意, 当 $l = 0$ 时, 方程(17)–(19)可以退化为不考虑尺度效应的经典轴对称接触问题的控制方程.

定义 Hankel 积分变换为

$$\hat{H}(s) = \int_0^\infty H(r) r J_m(sr) dr, \quad (20)$$

则其逆变换为

$$H(r) = \int_0^\infty \hat{H}(s) s J_m(sr) ds, \quad (21)$$

其中, $J_m(\cdot)$ 是 m 阶第一类 Bessel 函数; s 是积分变换的变量.

对方程(17)–(19)应用 Hankel 积分变换, 方程(17)–(19)变为

$$C_{44} \frac{d^2 \hat{u}_r}{dz^2} - s^2 C_{11} \hat{u}_r - s(C_{13} + C_{44}) \frac{d\hat{u}_z}{dz} - s(e_{31} + e_{15}) \frac{d\hat{\phi}}{dz} + Gl^2 \left(s^2 \frac{d^2 \hat{u}_r}{dz^2} + s^3 \frac{d\hat{u}_z}{dz} - \frac{d^4 \hat{u}_r}{dz^4} - s \frac{d^3 \hat{u}_z}{dz^3} \right) = 0, \quad (22)$$

$$s(C_{13} + C_{44}) \frac{d\hat{u}_r}{dz} + C_{33} \frac{d^2 \hat{u}_z}{dz^2} - s^2 C_{44} \hat{u}_z + e_{33} \frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} - s^2 e_{15} \hat{\phi} + Gl^2 \left(s \frac{d^3 \hat{u}_r}{dz^3} - s^4 \hat{u}_z + s^2 \frac{d^2 \hat{u}_z}{dz^2} - s^3 \frac{d\hat{u}_r}{dz} \right) = 0, \quad (23)$$

$$s(e_{15} + e_{31}) \frac{d\hat{u}_r}{dz} + e_{33} \frac{d^2 \hat{u}_z}{dz^2} - s^2 e_{15} \hat{u}_z - \varepsilon_{33} \frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} + s^2 \varepsilon_{11} \hat{\phi} = 0. \quad (24)$$

方程(22)–(24)的一般解为

$$[\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{\phi}] = \sum_{i=1}^4 [1, a_i(s), b_i(s)] A_i(s) e^{n_i z}, \quad (25)$$

这里 $A_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是未知的常数, n_i 是下列特征方程具有正实部的特征根

$$\det[\bar{h}_{ij}(s, n_i)] = 0, \quad (26)$$

其中

$$[\bar{h}_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{44}n^2 - C_{11}s^2 + Gl^2s^2n^2 - Gl^2n^4 & -sn(C_{13} + C_{44}) + Gl^2s^3n - Gl^2sn^3 & -s(e_{31} + e_{15})n \\ sn(C_{13} + C_{44}) + Gl^2sn^3 - Gl^2s^3n & C_{33}n^2 - C_{44}s^2 - Gl^2s^4 + Gl^2s^2n^2 & e_{33}n^2 - e_{15}s^2 \\ sn(e_{31} + e_{15}) & e_{33}n^2 - e_{15}s^2 & \varepsilon_{11}s^2 - \varepsilon_{33}n^2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

这里, $a_i(s)$ 和 $b_i(s)$ 的表达式为

$$a_i(s) = \frac{\bar{h}_{21}\bar{h}_{13} - \bar{h}_{11}\bar{h}_{23}}{\bar{h}_{12}\bar{h}_{23} - \bar{h}_{13}\bar{h}_{22}}, \quad b_i(s) = \frac{\bar{h}_{21}\bar{h}_{12} - \bar{h}_{11}\bar{h}_{22}}{\bar{h}_{13}\bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}\bar{h}_{23}}, \quad (28)$$

其中, \bar{h}_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 代表矩阵 $[\bar{h}_{ij}]$ 第 i 行 j 列的元素.

1.2 接触压力分布

本小节中,我们将给出压电半空间与球压头尺度依赖的轴对称无摩擦接触问题的接触压力分布.假设 $p(r)$ 是真实的接触压力分布,那么表面法向位移满足如下的方程:

$$u_z(r, 0) - u_z(0, 0) - f(r) = 0, \quad (29)$$

其中, $f(r)$ 是变形前压头的表面轮廓函数.对于球压头来说,当接触区远小于压头半径时, $f(r)$ 可以用抛物面近似表示,即

$$f(r) = \frac{r^2}{2R}. \quad (30)$$

如果 $p(r)$ 是近似的接触压力分布,那么

$$u_z(r, 0) - u_z(0, 0) - f(r) \neq 0. \quad (31)$$

由于近似带来的误差记作^[30]

$$e = \int_0^a [u_z(r, 0) - u_z(0, 0) - f(r)]^2 r dr. \quad (32)$$

接触压力分布的近似表达式可以写成级数的形式,即

$$p(r) = \sum_{i=1}^M q_i p_i(r), \quad (33)$$

其中 q_i 是权重; M 是基函数的个数; $p_i(r)$ 是基函数,可以表示为

$$p_1(r) = \sqrt{1 - r^2/a^2}, \quad (34)$$

$$p_i(r) = J_0(\eta_{i-1}r), \quad i > 1, \quad (35)$$

这里, $J_0(\cdot)$ 是第一类零阶 Bessel 函数; η_i 是 $J_0(\eta a) = 0$ 的第 i 个零点.

将 $p_i(r)$ 单独作用导致的相对法向表面位移记作 $\delta V_i(r) = u_z^i(r, 0) - u_z^i(0, 0)$, 根据式(33),表面相对位移为

$$\delta V(r) = \sum_{i=1}^M q_i \delta V_i(r). \quad (36)$$

未知数 q_i 需要通过积分最小二乘误差法确定,即

$$\frac{\partial e}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (37)$$

将式(37)表示为矩阵的形式,即

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{M1} & \cdots & K_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix}, \tag{38}$$

其中

$$K_{ij} = \int_0^a \delta V_i \delta V_j r dr, \quad i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M, \tag{39}$$

$$f_i = \int_0^a \delta V_i f(r) r dr. \tag{40}$$

注意到,接触半径 a 和权重 q_i 由上面的迭代过程确定,接触半径的初始值取经典弹性接触下的结果,即 $a_c = \sqrt[3]{3FRf_{21}/8}$, f_{21} 是与压电材料常数相关的系数.相对误差取作 0.001,即收敛准则为 $\varepsilon_{err} \leq 0.001$, 其中

$$\varepsilon_{err} = |F - P'|/F, \tag{41}$$

这里

$$P' = \int_0^a 2\pi r p(r) dr. \tag{42}$$

至此,接触压力分布的式(33)中包含的系数 $A_i(s)$ 仍然未知,所以需要通过边界条件进一步确定.

1.3 边界条件

在变换域中,接触表面的边界条件为

$$\hat{\sigma}_{zz} = -\hat{p}(s), \hat{\sigma}_{rz} = 0, \hat{D}_z = 0, \hat{m}_{z\theta} = 0, \tag{43}$$

其中

$$\hat{p}(s) = \hat{p}_1(s) + \sum_{j=2}^m \hat{p}_j(s), \tag{44}$$

并且

$$\hat{p}_1(s) = q_1 \frac{\sin(as) - as \cos(as)}{as^3}, \hat{p}_j(s) = q_j \frac{a[\eta_j J_0(as) J_1(as) - s J_0(as) J_1(as)]}{\eta_j^2 - s^2}.$$

1.4 接触问题的解

根据式(12)—(16)和(25),在变换域中,我们有

$$[\hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{rz}, \hat{D}_z, \hat{m}_{z\theta}]^T = \mathbf{T}(s, z) \mathbf{A}(s), \tag{45}$$

其中

$$\mathbf{A}(s) = [A_1(s), A_2(s), A_3(s), A_4(s)]^T, \tag{46}$$

$$\mathbf{T}(s, z) = [T_{1i}(s, z), T_{2i}(s, z), T_{3i}(s, z), T_{4i}(s, z)]^T, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{47}$$

这里

$$\begin{aligned} T_{1i} &= (C_{13}s + C_{33}n_i a_i + e_{33}n_i b_i) e^{n_i z}, \\ T_{2i} &= [C_{44}n_i - C_{44}s - e_{15}s - Gl^2(-s^2 n_i + n_i^3 - s^3 a_i + sn_i^2 a_i)] e^{n_i z}, \\ T_{3i} &= (e_{31}s + e_{33}n_i a_i - \varepsilon_{33}n_i b_i) e^{n_i z}, \quad T_{4i} = (2Gn_i^2 l^2 + 2Gsa_i n_i l^2) e^{n_i z}. \end{aligned}$$

根据边界条件(43),有

$$\mathbf{T}(s, h) \mathbf{A}(s) = \mathbf{L}, \tag{48}$$

其中

$$\mathbf{L} = [-\hat{p}(s), 0, 0, 0]^T, \tag{49}$$

那么,未知系数的表达式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L}. \tag{50}$$

因此,根据式(50)并对式(45)进行 Hankel 积分逆变换,我们就可以得到该接触问题应力场和偶应力场的解.

2 结果与讨论

本文研究了刚性绝缘球压头和横观各向同性压电半空间尺度依赖的轴对称接触问题.选择的压电材料

的材料属性列于表1中^[31].除非特别说明,材料选用PZT-4,法向加载力、球压头半径和无量纲特征材料长度分别取 $F = 10 \text{ N}$, $R = 500 \text{ }\mu\text{m}$, $l/a = 1$.

表1 压电材料的材料参数^[31]Table 1 The electro-mechanical properties of piezoelectric materials^[31]

	C_{11}/GPa	C_{12}/GPa	C_{13}/GPa	C_{33}/GPa	C_{44}/GPa	$e_{13}/(\text{C}/\text{m}^2)$	$e_{33}/(\text{C}/\text{m}^2)$	$e_{15}/(\text{C}/\text{m}^2)$
PZT-4	139	77.8	74.3	115	25.6	-5.2	15.1	12.7
BaTiO ₃	150	6.6	6.6	14.6	4.4	-17.3	17.5	11.4
	$\varepsilon_{11}/(10^{-10}\cdot\text{C}/(\text{V}\cdot\text{m}))$		$\varepsilon_{33}/(10^{-10}\cdot\text{C}/(\text{V}\cdot\text{m}))$			$f_{21}/(10^{-11}\cdot\text{Pa}^{-1})$		
PZT-4	64.61		56.2			1.772 8		
BaTiO ₃	98.7		112			1.376 6		

2.1 收敛性分析

表2给出了接触半径 a 的收敛性分析.在规定的误差范围内($\varepsilon_{\text{err}} \leq 0.001$),当 $M = 3$ 时,接触半径 a 的值不再发生变化,故取基函数的个数为3.

表2 接触半径 a 的收敛性分析Table 2 Convergence analysis of contact radius a

M	2	3	4
$a/\mu\text{m}$	23.671	23.665	23.665

2.2 对比例例

为了验证结果的有效性,首先将压电材料简化为各向同性弹性材料,当前的接触问题可以化简为一个刚性球压头和弹性半空间之间尺度依赖的轴对称无摩擦接触问题,Gourgiotis等^[8]对该接触问题进行了研究.取 $F = 10 \text{ N}$, $R = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\mu = 27.3 \text{ GPa}$ 和 $\nu = 0.3$ 时,图2给出了该问题的接触压力分布.通过对比发现,利用本文方法得到的结果与Gourgiotis等^[8]的研究结果一致,说明本文的分析方法是正确的.

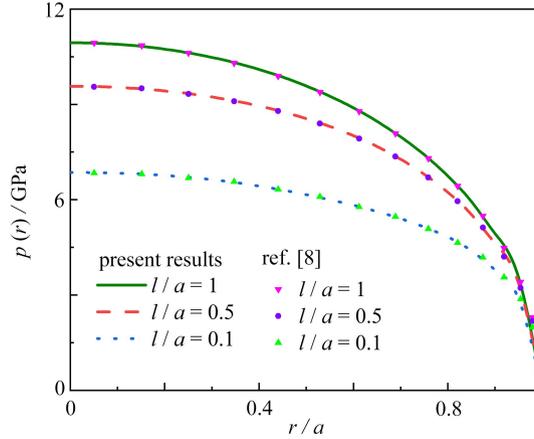
图2 当 $F = 10 \text{ N}$, $R = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\mu = 27.3 \text{ GPa}$ 和 $\nu = 0.3$ 时,本文的结果与文献[8]的结果比较

Fig. 2 Comparison of the present results with the results obtained by ref. [8] with

$F = 10 \text{ N}$, $R = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\mu = 27.3 \text{ GPa}$ and $\nu = 0.3$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

2.3 特征材料长度的影响

图3给出了特征材料长度对接触压力分布的影响.从图中可以看出,在偶应力理论的框架内,球压头作用下的接触压力分布是光滑的,无奇异性出现,其最大值出现在接触区域的中心.考虑了偶应力的接触压力结果明显大于经典弹性理论的结果($l/a = 0$).并且随着特征材料长度的增加,接触压力显著增大,但是增加的速率减小.

图4给出了不同特征材料长度下,法向加载 F 对最大接触压力的影响.对于给定的最大接触压力,随着特征材料长度的增加,所对应的法向加载减小.图5描述了不同特征材料长度下,法向加载 F 对压痕深度的

影响,可以看到力-位移曲线是非线性的.在微纳米压痕实验中,通过分析加载和卸载过程中的力-位移曲线,可以确定材料的微机械特性,如硬度和弹性模量.这些数据对于了解材料的抗压强度、耐磨性和其他重要特性至关重要.从图中可以看出,对于较大的特征材料长度,需要更大的法向载荷才能产生相同的压入深度.

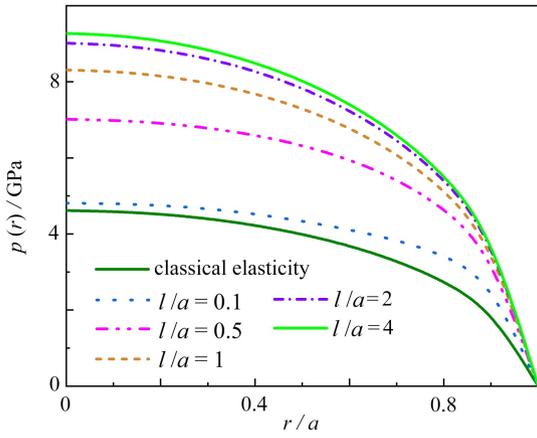


图 3 特征材料长度对接触压力分布的影响

Fig. 3 The effects of the characteristic material length on the contact pressure distribution

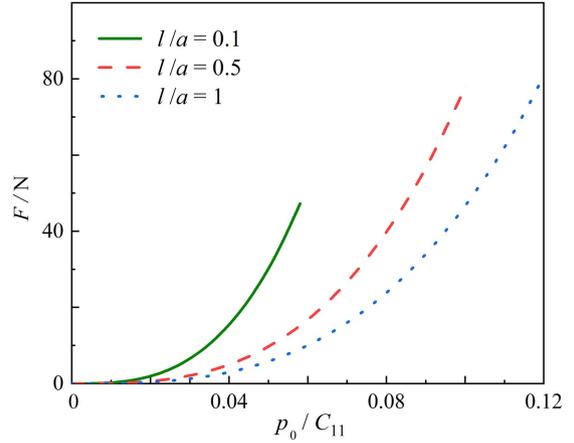


图 4 法向加载 F 对最大接触压力的影响

Fig. 4 The effects of normal loading F on the maximum contact pressure

图 6 描述了球压头作用下接触区内不同位置上,特征材料长度对法向接触压力比值 $p(r)/p_c(r)$ 的影响,其中, $p_c(r)$ 表示没有尺度效应的经典无摩擦接触问题的接触压力.不同接触点处这一比值与 1 的偏差程度可以说明这一接触点处尺度效应对接触压力的影响.从图中我们发现比值 $p(r)/p_c(r)$ 始终大于 1,也就是说,在接触区内,经典弹性理论下的法向接触压力始终小于考虑了尺度效应的结果.随着特征材料长度的增加, $p(r)/p_c(r)$ 显著增大,最终趋近于一个常数,这个常数只与材料参数有关.对于弹性材料尺度依赖的接触问题,也得到了类似的结论^[4].

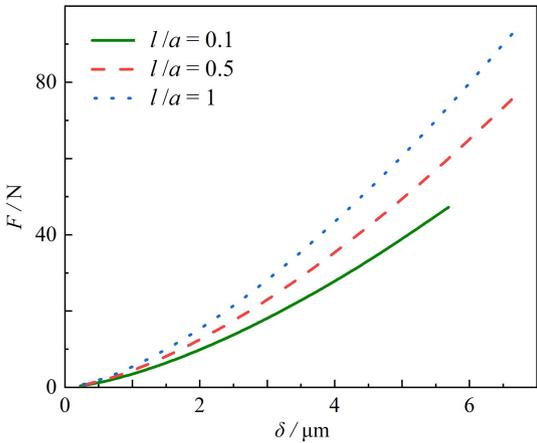


图 5 法向加载 F 对压痕深度的影响

Fig. 5 The effects of normal loading F on the indentation depth

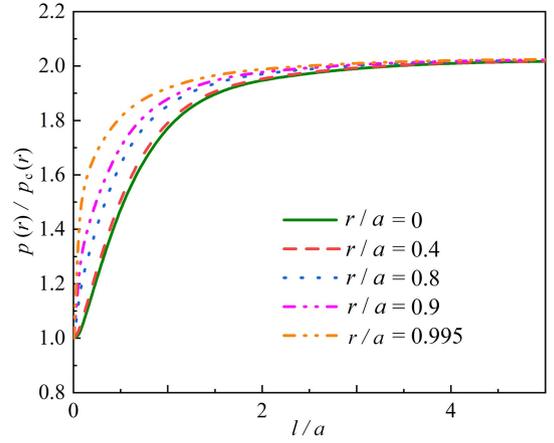


图 6 特征材料长度对 $p(r)/p_c(r)$ 的影响

Fig. 6 The effects of the characteristic material length on $p(r)/p_c(r)$

PZT-4 和 BaTiO₃ 是典型的压电陶瓷,其压电参数列于表 1 中.PZT-4 的压电效应显著;BaTiO₃ 具有高介电常数,既有压电性也有铁电性.选用这两种材料,当 $F = 10 \text{ N}$, $R = 500 \mu\text{m}$ 时,图 7 讨论了特征材料长度对接触半径 a/a_c 、最大接触压力 p_0/p_{0c} 和压痕深度 δ/δ_c 的影响.其中, a_c , p_{0c} 和 δ_c 是经典弹性理论中的接触半径、最大接触压力和压痕深度.从图中可以看到,经典弹性理论的接触半径和最大压入深度始终大于考虑了尺度效应的解,而经典弹性理论的最大接触压力始终小于考虑了尺度效应的解.当法向载荷不变时,随着特征材料长度的增加,接触半径和压痕深度减小,最大接触压力增加.接触半径、最大接触压力和压痕深度开始随特征材料长度的增加而发生明显变化,随着特征材料长度增加到一定程度时,接触半径、最大接触压力和

压痕深度的变化趋于平缓.当特征材料长度一定时,PZT-4 所对应的 a/a_c 和 δ/δ_c 的值要小于 BaTiO₃,但是 PZT-4 所对应的 p_0/p_{0c} 要大于 BaTiO₃.

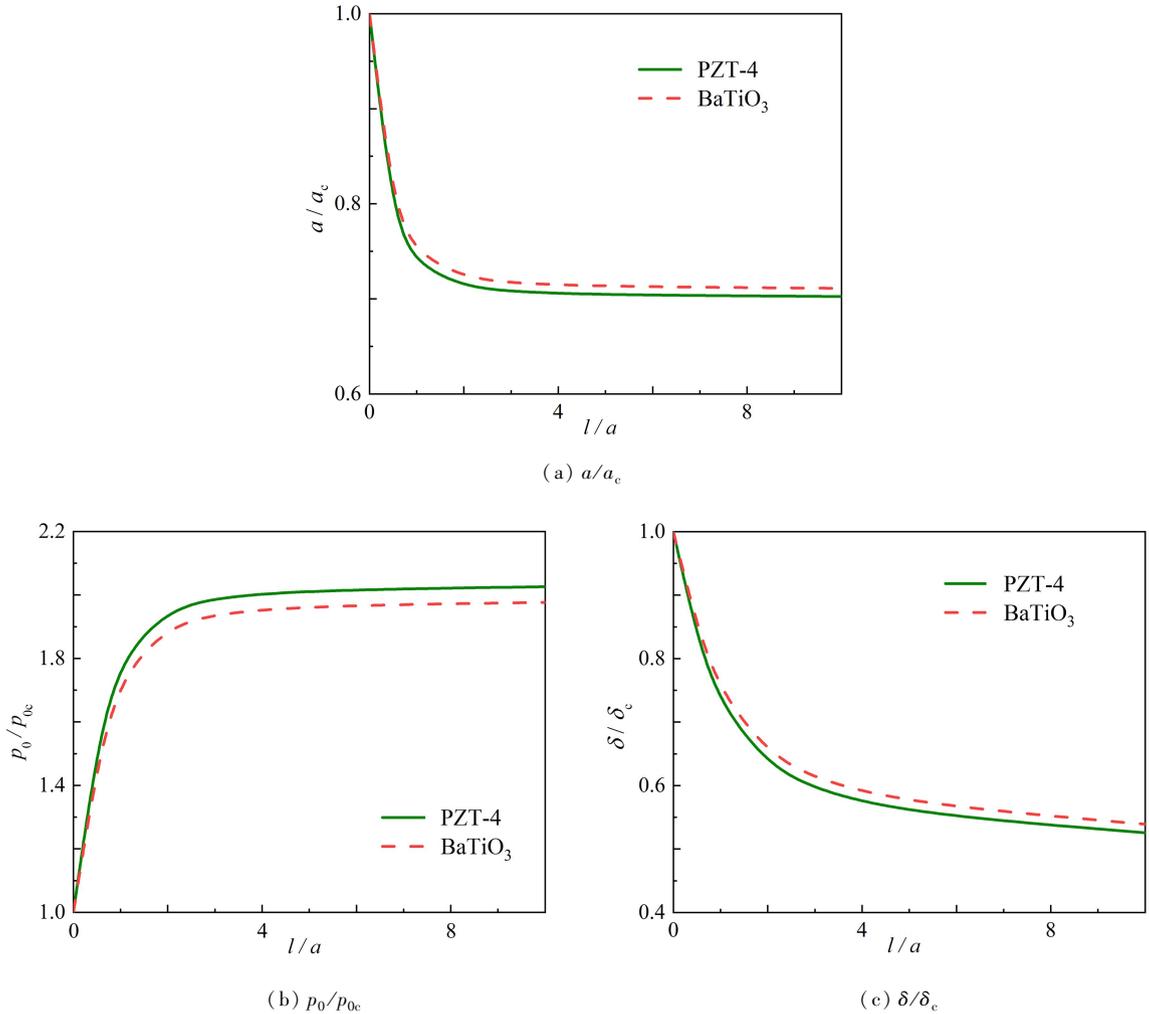


图7 特征材料长度对 a/a_c , p_0/p_{0c} , δ/δ_c 的影响

Fig. 7 The effects of the characteristic material length on a/a_c , p_0/p_{0c} , δ/δ_c

3 结 论

利用偶应力理论,本文研究了压电半空间和刚性绝缘球压头的尺度依赖的轴对称无摩擦接触问题.利用 Hankel 积分变换和积分最小二乘法,得到了接触压力分布,获得了如下的结论:

- 1) 经典弹性理论下的接触压力始终小于考虑了尺度效应的解,而经典弹性理论下的接触半径和压痕深度始终大于考虑了尺度效应的解;
- 2) 随着特征材料长度的增加,法向接触压力分布明显增加,但增加速率减缓;
- 3) 法向载荷一定时,随着特征材料长度的增加,最大法向接触压力显著增加,接触半径和压痕深度显著减小.

参考文献 (References):

- [1] STELMASHENKO N A, WALLS M G, BROWN L M, et al. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study[J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1993, **41**(10): 2855-2865.
- [2] NIX W D, GAO H. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(3): 411-425.

- [3] MILLER R E, SHENOY V B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements[J]. *Nanotechnology*, 2000, **11**(3): 139-147.
- [4] ZISIS T, GOURGIOTIS P A, BAXEVANAKIS K P, et al. Some basic contact problems in couple stress elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(11/12): 2084-2095.
- [5] GOURGIOTIS P, ZISIS T. Two-dimensional indentation of microstructured solids characterized by couple-stress elasticity[J]. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2016, **51**(4): 318-331.
- [6] ZISIS T. Anti-plane loading of microstructured materials in the context of couple stress theory of elasticity: half-planes and layers[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, **88**(1): 97-110.
- [7] ZISIS T. Burmister's problem extended to a microstructured layer[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2018, **13**(2): 203-223.
- [8] GOURGIOTIS P A, ZISIS T, GIANNAKOPOULOS A E, et al. The Hertz contact problem in couple-stress elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, **168**: 228-237.
- [9] KARURIYA A N, BHANAKKAR T K. Plane strain indentation on finite thickness bonded layer in couple stress elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, **108**: 275-288.
- [10] SONG H X, KE L L, WANG Y S. Sliding frictional contact analysis of an elastic solid with couple stresses[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **133**: 804-816.
- [11] SONG H X, KE L, WANG Y, et al. Two-dimensional frictionless contact of a coated half-plane based on couple stress theory[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2018, **10**(5): 1850049.
- [12] WANG Y, SHEN H, ZHANG X, et al. Semi-analytical study of microscopic two-dimensional partial slip contact problem within the framework of couple stress elasticity: cylindrical indenter[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, **138**: 76-86.
- [13] ÇÖMEZ I, EL-BORGI S. Sliding frictional contact problem of a layer indented by a rigid punch in couple stress elasticity[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2023, **28**(3): 730-747.
- [14] NABHANI M, EL KHLIFI M, GBEHE O S T, et al. Coupled couple stress and surface roughness effects on elasto-hydrodynamic contact[J]. *Lubrication Science*, 2014, **26**(4): 251-271.
- [15] WANG Y X, ZHANG X, SHEN H, et al. Three-dimensional contact analysis with couple stress elasticity[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, **153**: 369-379.
- [16] WANG Y X, ZHANG X, SHEN H, et al. Couple stress-based 3D contact of elastic films[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, **191**: 449-463.
- [17] LI P X, LIU T J. Axisymmetric adhesive contact of multi-layer couple-stress elastic structures involving graded nanostructured materials[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, **111**: 501-520.
- [18] ZHOU Y T, TIAN X J, DING S H. Microstructure size-dependent contact behavior of a thermoelectric film bonded to an elastic substrate with couple stress theory[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, **256**: 111982.
- [19] LU R, LI M H, YANG Y, et al. Accurate extraction of large electromechanical coupling in piezoelectric MEMS resonators[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2019, **28**(2): 209-218.
- [20] WANG Z L, SONG J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays[J]. *Science*, 2006, **312**(5771): 242-246.
- [21] MIRZAEI A, LEE J H, MAJHI S M, et al. Resistive gas sensors based on metal-oxide nanowires[J]. *Journal of Applied Physics*, 2019, **126**(24): 241102.
- [22] SAHU S A, SINGHAL A, CHAUDHARY S. Surface wave propagation in functionally graded piezoelectric material: an analytical solution[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, **29**(3): 423-437.
- [23] LI Y S, PAN E. Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2015, **97**: 40-59.
- [24] RAZAVI H, BABADI A F, BENI Y T. Free vibration analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshell based on consistent couple stress theory[J]. *Composite Structures*, 2017, **160**: 1299-1309.

- [25] WANG X, PAN E, FENG W J. Anti-plane Green's functions and cracks for piezoelectric material with couple stress and electric field gradient effects[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2008, **27**(3): 478-486.
- [26] SUN Y Y, SU J, SONG H X, et al. The size-dependent frictionless contact of piezoelectric materials[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, **261**: 108685.
- [27] KE L L, YANG J, KITIPORNCHAI S, et al. Electro-mechanical frictionless contact behavior of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a rigid punch[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(11/12): 3313-3333.
- [28] SU J, KE L L, WANG Y S. Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **90**: 45-59.
- [29] CHEN W T, ENGEL P A. Impact and contact stress analysis in multilayer media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1972, **8**(11): 1257-1281.
- [30] O' SULLIVAN T C, KING R B. Sliding contact stress field due to a spherical indenter on a layered elastic half-space[J]. *Journal of Tribology*, 1988, **110**(2): 235-240.
- [31] LV X, KE L L, SU J, et al. Axisymmetric contact vibration analysis of a rigid spherical punch on a piezoelectric half-space[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, **210**: 224-236.
- [32] WANG G F, YU S W, FENG X Q. A piezoelectric constitutive theory with rotation gradient effects[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2004, **23**(3): 455-466.
- [33] MINDLIN R D. Influence of couple-stresses on stress concentrations[J]. *Experimental Mechanics*, 1963, **3**(1): 1-7.
- [34] LIU C, YU J, ZHANG B, et al. Reflection and transmission of elastic waves in the multilayered orthotropic couple-stressed plates sandwiched between two elastic half-spaces[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **75**: 52-72.