

考虑挠曲电效应的薄板声学超材料隔声特性研究*

杨莎莎^{1,2,3}, 彭聪^{2,4}, 孟晗^{2,4}, 沈承^{2,4}

- (1. 南京工业职业技术大学 机械工程学院, 南京 210023;
2. 南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016;
3. 江苏省精密制造技术工程研发中心, 南京 210023;
4. 南京航空航天大学 多功能轻量化材料与结构工信部重点实验室, 南京 210016)

(我刊青年编委孟晗来稿)

摘要: 区别于传统的压电效应, 当结构尺寸减小到微纳米尺度时, 一种新的机电耦合效应——挠曲电效应将无法被忽略. 该文利用变分原理推导了考虑挠曲电效应的薄板声学超材料结构隔声问题的控制方程和边界条件, 基于 Kirchhoff 薄板理论预测了薄板质量块结构的隔声曲线, 系统讨论了挠曲电效应、几何尺寸、质量密度等参数对结构隔声性能的影响. 结果表明, 当结构尺寸减小到微纳米尺度时, 挠曲电效应显著增加了隔声曲线的隔声谷值和峰值频率, 因此考虑挠曲电效应是十分有必要的. 该文的工作有望为微机电系统的噪声控制研究提供理论基础.

关键词: 挠曲电效应; 薄板超材料; 隔声特性

中图分类号: O32 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450115

Study on Sound Insulation Characteristics of Thin Plate Acoustic Metamaterials With Flexoelectric Effects

YANG Shasha^{1,2,3}, PENG Cong^{2,4}, MENG Han^{2,4}, SHEN Cheng^{2,4}

- (1. School of Mechanical Engineering, Nanjing Vocational University of Industry Technology, Nanjing 210023, P.R.China;
2. State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;
3. Jiangsu Province Precision Manufacturing Engineering and Technology Research Center, Nanjing 210023, P.R.China;
4. MIIT Key Laboratory of Multifunctional Lightweight Materials and Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China)

(Contributed by MENG Han, M.AMM Youth Editorial Board)

Abstract: When the structure size is reduced to the micro- and nano-scale, a new mechanoelectric coupling effect, the flexoelectric effect, cannot be ignored. The governing equations and boundary conditions for the sound insulation problem of thin plate acoustic metamaterial structure with the flexoelectric effects were de-

* 收稿日期: 2024-04-25; 修订日期: 2024-06-05

基金项目: 国家自然科学基金(12202183); 国家重点研发计划(2023YFB4604800)

作者简介: 杨莎莎(1986—), 女, 讲师, 博士(E-mail: 2016100849@niit.edu.cn);

沈承(1986—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: cshen@nuaa.edu.cn).

引用格式: 杨莎莎, 彭聪, 孟晗, 沈承. 考虑挠曲电效应的薄板声学超材料隔声特性研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(8): 1070-1081.

rived by means of the variational principle. The sound insulation curves of thin plate mass blocks were predicted based on the Kirchhoff theory. The effects of flexural effects, geometric sizes and mass densities on the sound insulation performances of the structure were systematically discussed. The results show that, for the micro- and nano-scale structure sizes, the flexoelectric effect significantly increases the sound insulation valley values and peak frequencies of the sound insulation curves, so it is necessary to consider the flexoelectric effects. This work provides a theoretical basis for the research of noise control in MEMS.

Key words: flexoelectric effect; thin plate metamaterial; sound insulation characteristic

0 引 言

近年来,声学超材料由于结构简单、具有特别的声波调控能力得到了广泛关注。从噪声控制角度看,声学超材料主要分为三种类型^[1]:反射型、透射型以及吸收型。其中工程上对隔声罩有价值的主要是反射型和吸收型两种,分别对应高的隔声量和吸声系数。举例来说,在反射型超材料方面,2013年,Ma等^[2]在附加质量块的薄膜超材料中开了一个孔,发现开孔之后仍然可以获得较高的隔声量,而开孔的同时可以保证气流的通过,因此实现了兼具隔声和通风的功能。2021年,Park等^[3]结合理论与实验,实现了由质量块、弹簧和薄膜组成的超高密度声学超表面。Yao等^[4]揭示了薄膜结构实现 Drude 效应的关键因素是薄膜外边界的约束条件,实验和数值结果均证实了截止频率下(一阶弯曲共振频率)负质量密度的存在。在吸收型超材料方面,Mei等^[5]通过在固定边界的薄膜上放置两个半圆形的质量块,设计得到了一种薄板质量块结构,具有很好的吸声性能。超材料本质上是通过材料进行新的结构设计而人工制造的一种复合材料,突破了传统的材料设计思想,具有天然材料所不具备的超常物理性质。

从结构尺度来看,当结构或材料的尺寸减小到微纳米级别时,结构的物理性质和力学响应与宏观尺度上的完全不同,不能用经典的连续体理论预测纳米结构的实验结果^[6-7]。举例来说,由于其存在高的机电耦合效应和纳米尺度的独特特性,微纳米结构和微纳米器件在传感器和各种微/纳米机电系统等潜在应用领域引起了研究界的浓厚兴趣,纳米结构已应用于纳米发电机^[8]、纳米力传感器^[9]、机械设备等领域。此外,区别于传统的压电材料,普通材料表现出的尺寸依赖特性可以用挠曲电效应来解释。挠曲电效应作为一种新型的力电耦合效应,描述了与极化和应变梯度^[10]之间的特殊的机电耦合现象。对于弹性纳米介质,非均匀应变场如应变梯度会局部打破介质中的反转对称,进而引起极化。挠曲电现象学描述了应变梯度诱导弹性固体介电晶体中的电极化。与压电效应相比,挠曲电效应具有两个显著特征:首先,挠曲电常数为四阶张量,意味着挠曲电效应普遍存在于晶体结构中;其次,挠曲电效应与应变梯度成正比,应变梯度与结构的特征尺寸成反比,挠曲电效应具有明显的尺度依赖特征。随着纳米结构材料尺寸的减小,挠曲电提供了一种固有的尺寸效应。Zhang和Jiang^[11]研究了压电纳米板在挠曲电效应作用下的弯曲行为。Shen和Hu^[12]发展了纳米介质的电焓变原理,在考虑挠曲电、表面和静电的影响时,为机电问题的分析和计算提供了理论支持。在微纳米尺度下,挠曲电效应对结构力学特性的影响不可忽略。此外,从工程应用的角度看,振动和噪声问题已经成为影响微纳米尺度结构工作特性的一个重要因素^[13],微纳米尺度结构的隔声特性已经引起了学者的关注^[14]。然而,目前关于微纳米尺度的结构声振耦合研究工作都未曾考虑挠曲电的影响,对尺度效应的认识还不够完善^[15]。

本文的主要目的是建立一个可以考虑微纳米尺度挠曲电效应的薄板质量块声振耦合模型。主要思路为基于挠曲电效应的基本理论,得到挠曲电材料的物理方程,利用 Kirchhoff 薄板理论,推导考虑挠曲电效应的薄板质量块结构的控制方程。最后分析讨论了挠曲电系数、结构参数对薄板质量块结构隔声曲线的影响规律。

1 模型与理论方法

1.1 结构模型

薄板质量块结构如图 1 所示,由矩形薄板及附加在薄板中心的质量块组成。薄板四周为固定边界,厚度

方向为 z 轴,薄板厚度为 h_s , 质量块厚度为 h_{mass} . 对于薄板的振动分析,采用 Kirchhoff 薄板理论,忽略了薄板沿厚度方向的剪切变形.

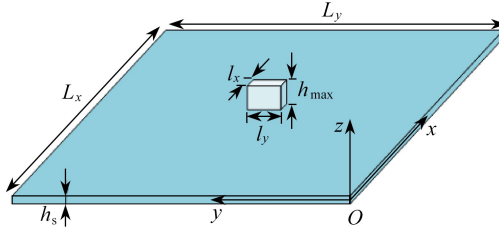


图1 附加薄板质量块结构示意图

Fig. 1 The additional sheet mass block structure diagram

1.2 考虑挠曲电效应的薄板振动方程

根据 Shen 和 Hu 的本构理论^[12],对于非中心对称电介质,电 Gibbs 自由能密度可写成

$$U_b = -\frac{1}{2} a_{ij} E_i E_j - \frac{1}{2} b_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - f_{ijkl} E_i \eta_{jkl}, \quad (1)$$

式中, a_{ij} 为二阶压电常数; b_{ijkl} 为高阶介电常数,表征电场梯度之间的耦合; c_{ijkl} 为四阶弹性常数; e_{ijk} 为三阶压电常数,对于非压电电介质, $e_{ijk} \equiv 0$; f_{ijkl} 为四阶挠曲电常数; ε_{ij} 为应变分量, E_i 为电场分量, η_{ijk} 为应变梯度分量,它们分别定义为

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ E_i = -\phi_{,i}, \\ \eta_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik}), \end{cases} \quad (2)$$

式中, u 代表位移,三维情况下包含 u_1, u_2, u_3 三个分量, ϕ 代表静电势.

根据定义,应变和应变梯度之间的关系式应该满足 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\eta_{ijk} = \eta_{jik} = \varepsilon_{ij,k}$.

在无穷小变形假设下,考虑挠曲电效应的纳米电介质的本构方程可以写成

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{\partial U_b}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \\ \tau_{ijk} = \frac{\partial U_b}{\partial \eta_{ij}} = -f_{ijkl} E_l, \\ D_i = -\frac{\partial U_b}{\partial E_i} = a_{ij} E_j + e_{ijk} \varepsilon_{jk} + f_{ijkl} \eta_{jkl}, \end{cases} \quad (3)$$

式中, σ_{ij} 是应力张量,等同于经典弹性理论中的应力张量; τ_{ijk} 是高级应力张量; D_i 是电位移向量.

基于薄板理论建立纳米电介质结构模型,根据 Kirchhoff 薄板理论的位移假设为

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t), \end{cases} \quad (4)$$

式中, u, v, w 为中平面在 x, y 和 z 方向的位移分量.

根据应变和应变梯度的定义,由式(3)求得非零应变和应变梯度为

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \eta_{xxx} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{xxx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \eta_{yyy} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad \eta_{yyy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \eta_{xyx} &= \frac{2\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = -2z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad \eta_{xyy} = -2z \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}, \quad \eta_{xyz} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

对于厚度远小于长度或宽度的薄板,膜中沿长度或宽度方向的应变梯度远小于沿厚度方向的应变梯度,因此为了简便计算,可以忽略长度或宽度方向的应变梯度。

对于薄板问题,采用压电中关于电场的假设,即电场沿膜的厚度分布,其他方向的电场分量忽略不计,此时电位移表达式为

$$D_3 = a_{33} E_3 + e_{311} \varepsilon_{11} + e_{322} \varepsilon_{22} + f_{3113} \eta_{113} + f_{3223} \eta_{223}. \quad (6)$$

在开环电学条件下,表面电位移为零,根据静电学中 Gauss 定义 $D_{3,3} = 0$, 可知极化电荷产生的电场为

$$E_3 = -\frac{e_{311}}{a_{33}} \varepsilon_{11} - \frac{e_{322}}{a_{33}} \varepsilon_{22} - \frac{f_{3113}}{a_{33}} \eta_{113} - \frac{f_{3223}}{a_{33}} \eta_{223}. \quad (7)$$

将式(7)代入本构方程(3)可以得到

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \varepsilon_{11} + c_{12} \varepsilon_{22} + e_{311} (-E_3), \\ \sigma_{22} &= c_{12} \varepsilon_{11} + c_{22} \varepsilon_{22} + e_{322} (-E_3), \\ \sigma_{12} &= 2c_{66} \varepsilon_{12}, \\ \tau_{223} &= f_{3223} (-E_3), \\ \tau_{113} &= f_{3113} (-E_3). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

接下来基于变分原理推导考虑挠曲电效应的薄板振动问题的控制方程和相应的边界条件.在开环电学条件下,电学平衡方程自动满足,电学 Gibbs 自由能密度表达式为

$$u_b = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ijk} \eta_{ijk}. \quad (9)$$

由于所选取的模型是自由振动的薄板,无外力作用,那么考虑挠曲电效应的薄板的控制方程可以通过 Hamilton 原理推导出来:

$$\delta \int_0^T (K - U) dt = 0, \quad (10)$$

此时的动能密度为

$$k = \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2, \quad (11)$$

其中, K 为动能, U 为弹性势能, ρ 为质量密度.

分别对动能以及弹性势能进行变分运算,详细的计算过程如下:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T K dt &= \delta \int_0^T \int_V \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt dv = \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{V_0} dt - \int_0^T \int_V \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dv dt. \end{aligned} \quad (12)$$

对弹性势能进行计算:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T U dt &= \delta \int_0^T \int_V u_b dv dt = \\ &= \frac{1}{2} \delta \int_0^T \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \tau_{113} \eta_{113} + \tau_{223} \eta_{223}) dv dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta \int_0^T \int_S \left(G_{11} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_{22} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2G_{12} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy dt = \\
& \frac{1}{2} \int_0^T G_{11} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{s_0} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial G_{11}}{\partial x} \delta w \Big|_{s_0} dt + \frac{1}{2} \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} \delta w dx dy dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T G_{22} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{s_0} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial G_{22}}{\partial y} \delta w \Big|_{s_0} dt + \frac{1}{2} \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} \delta w dx dy dt + \\
& \int_0^T G_{12} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{s_0} dt - \int_0^T \frac{\partial G_{12}}{\partial x} \delta w \Big|_{s_0} dt + \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} \delta w dx dy dt, \tag{13}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}
G_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 c_{11} + (ze_{311} + f_{3113}) \left(\frac{e_{311}}{a_{33}} z + \frac{f_{3113}}{a_{33}} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dh + \\
\int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 c_{12} + (ze_{311} + f_{3113}) \left(\frac{e_{322}}{a_{33}} z + \frac{f_{3223}}{a_{33}} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dh, \\
G_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 c_{12} + (ze_{322} + f_{3223}) \left(\frac{e_{311}}{a_{33}} z + \frac{f_{3113}}{a_{33}} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dh + \\
\int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 c_{22} + (ze_{322} + f_{3223}) \left(\frac{e_{322}}{a_{33}} z + \frac{f_{3223}}{a_{33}} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dh, \\
G_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} 2c_{66} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dh.
\end{cases} \tag{14}$$

将式(12)和式(13)代入总能量的变分方程:

$$\begin{aligned}
\delta \int_0^T (K - U) dt &= \int_0^T \frac{1}{2} \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{s_0} dt - \int_0^T \int_S \frac{1}{2} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dy dt \\
& \frac{1}{2} \int_0^T G_{11} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{s_0} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial G_{11}}{\partial x} \delta w \Big|_{s_0} dt + \frac{1}{2} \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} \delta w dx dy dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T G_{22} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{s_0} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial G_{22}}{\partial y} \delta w \Big|_{s_0} dt + \frac{1}{2} \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} \delta w dx dy dt + \\
& \int_0^T G_{12} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{s_0} dt - \int_0^T \frac{\partial G_{12}}{\partial x} \delta w \Big|_{s_0} dt + \int_S \int_0^T \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} \delta w dx dy dt. \tag{15}
\end{aligned}$$

令总能量的变分方程为零, 可以从中得到板自由弯曲振动时的控制方程.

在 $x = 0, L_x$ 和 $y = 0, L_y$ 时, 由于板作自由弯曲振动, 此时相应的边界条件可以表示为如下形式:

$$\begin{cases}
w(x, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = 0, \\
\frac{\partial w(x, t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial y^2} = 0.
\end{cases} \tag{16}$$

结合总能量的变分方程以及边界条件, 进一步推导出考虑挠曲电效应的薄板控制方程, 具体形式如下:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} = 0, \tag{17}$$

可整理为

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2N_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} N_{11} = Ic_{11} + I \frac{e_{311}e_{311}}{a_{33}} + h^2 \frac{f_{3113}e_{311}}{a_{33}} + h \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}}, \\ N_{22} = Ic_{22} + I \frac{e_{322}e_{322}}{a_{33}} + h^2 \frac{f_{3223}e_{322}}{a_{33}} + h \frac{f_{3223}f_{3223}}{a_{33}}, \\ N_{12} = Ic_{12} + I \frac{e_{311}e_{322}}{a_{33}} + h^2 \left(\frac{f_{3113}e_{322}}{a_{33}} + \frac{f_{3223}e_{311}}{a_{33}} \right) + h \frac{f_{3113}f_{3223}}{a_{33}} + 2Ic_{66}, \\ I = \frac{1}{12} h^3. \end{cases} \quad (19)$$

若薄板四周受拉力作用,其控制方程为

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2N_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - T \nabla^2 w = 0, \quad (20)$$

其中, T 为单位长度上板所受拉力,单位为 N/m ; ∇^2 为 Laplace 算子.

相应地,挠曲电薄板的固有频率为

$$\omega_{m_1 m_2} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{m_1 \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{L_y}\right)^2} + \sqrt{\frac{N_{11}}{\rho} \left(\frac{m_1 \pi}{L_x}\right)^4 + \frac{N_{22}}{\rho} \left(\frac{m_2 \pi}{L_y}\right)^4 + 2 \frac{N_{12}}{\rho} \left(\frac{m_1 \pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{m_2 \pi}{L_y}\right)^2}, \quad (21)$$

其中, m_1 和 m_2 分别代表 x 和 y 方向的阶数.

1.3 薄板质量块结构隔声计算

对如图 2 所示的挠曲电薄板质量块结构,质量块位于薄板中心,坐标系原点为薄板左下角,质量块左下角坐标为 (x_0, y_0) .薄板密度为 ρ_s , 质量块密度为 ρ_{mass} .

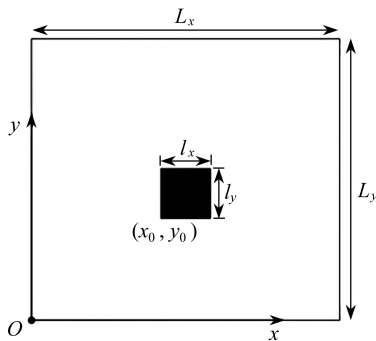


图 2 薄板质量块结构平面示意图

Fig. 2 Structural plane diagram of the sheet mass block

当薄板不受外力作自由振动时,板的运动方程为

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{\text{mass}} h_{\text{mass}} \bar{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} - T \nabla^2 w = 0, \quad (22)$$

其中, (x_0, y_0) 是质量块左下角的位置坐标,方程假定质量块不影响质量块所处位置的薄板变形. $\bar{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y)$ 表示四个阶跃函数的结合方程:

$$\begin{aligned} \bar{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) = & H(x - x_0, y - y_0) - H(x - x_0, y - y_0 - l_y) - \\ & H(x - x_0 - l_x, y - y_0) + H(x - x_0 - l_x, y - y_0 - l_y), \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$H(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \text{ or } y < y_0, \\ 1, & x \geq x_0 \text{ or } y \geq y_0. \end{cases} \quad (24)$$

对尺寸为 $L_x \times L_y$ 的矩形薄板,应用简支边界条件,即薄板四周固定,相应的边界条件为

$$\begin{cases} w(0, y) = 0, w(L_x, y) = 0, \\ w(x, 0) = 0, w(x, L_y) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

利用分离变量法,可以得到矩形薄板结构的各阶正则模态为

$$\phi_m(x, y) = 2 \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi y}{L_y}\right), \quad (26)$$

x 和 y 方向的波数 k_x 和 k_y 分别为

$$k_x = m_1 \pi / L_x, k_y = m_2 \pi / L_y. \quad (27)$$

接下来,我们考虑声场对薄板质量块结构运动的影响.假设频率为 ω 的平面声波垂直入射到薄板表面,即

$$p_i = A e^{j(\omega t - kz)}, \quad (28)$$

式中, k 为波数, A 为入射声压幅值.

薄板在声压作用下作受迫振动,在式(22)中增加声压作用力,得到挠曲电薄板质量块结构的受迫振动方程:

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{\text{mass}} h_{\text{mass}} \bar{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} = p_i + p_r - p_t. \quad (29)$$

板结构振动时,会向周围介质辐射声场,同时板结构也处在自身的辐射声场中.当考虑到声源辐射时,声场对声源的反作用力的计算较为复杂.为了计算的简便,我们忽略了有限板结构驻波效应对声压的影响.假设板结构附近反射声压与透射声压为

$$\begin{cases} p_r(x, y, t) = B(x, y) e^{j(\omega t + kz)}, \\ p_t(x, y, t) = C(x, y) e^{j(\omega t - kz)}, \end{cases} \quad (30)$$

式中, $B(x, y)$ 和 $C(x, y)$ 为 (x, y) 处的反射和透射声压幅值.

由声学边界条件可知,两种介质在分界面上的法向质点速度连续,即薄板结构法向振动速度等于薄板表面流体介质质点的运动速度.可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial(p_i + p_r)}{\partial z} = -j\omega\rho_a \frac{\partial w}{\partial t}, & z = 0^-, \\ \frac{\partial p_t}{\partial z} = -j\omega\rho_a \frac{\partial w}{\partial t}, & z = 0^+. \end{cases} \quad (31)$$

将式(28)、式(30)代入式(31),得到

$$\begin{cases} p_i - p_r = \rho_a c_a \frac{\partial w}{\partial t}, & z = 0^-, \\ p_t = \rho_a c_a \frac{\partial w}{\partial t}, & z = 0^+, \end{cases} \quad (32)$$

其中, $\rho_a c_a$ 为空气的特性阻抗.

将式(32)代入到挠曲电薄板质量块结构的受迫振动方程式(29)中,整理后得

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{\text{mass}} h_{\text{mass}} \bar{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x \partial y} = 2p_i - 2\rho_a c_a \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (33)$$

采用模态叠加法求解挠曲电薄板振动方程,薄板的横向振动位移可写为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \phi_m(x, y) q_m(t), \quad (34)$$

其中, $\phi_m(x, y)$ 为四周固定边界条件下薄板自由振动的各阶模态型函数; $q_m(t)$ 对应于各阶模态型函数的各阶广义坐标,

$$\begin{cases} \phi_m(x,y) = 2\sin\left(\frac{m_1\pi}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{m_2\pi}{L_y}y\right), \\ q_m(t) = \tilde{q}_m e^{j\omega t}. \end{cases} \quad (35)$$

将式(34)代入挠曲电薄板振动方程式(33),方程两边同时乘以一个正交模态函数 $\phi_n(x,y)$,并在整个薄板表面 ($0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$) 进行积分,可以得到

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho_s h_s M_{mn} \tilde{q}_n - \omega^2 \rho_{\text{mass}} h_{\text{mass}} \sum_{n=1}^N Q_{m,n} \tilde{q}_n + TK_{mn} \tilde{q}_n + R_{mn} \tilde{q}_n = \\ & 2\tilde{p}_i H_m - 2j\omega \rho_a c_a C_{mn} \tilde{q}_n. \end{aligned} \quad (36)$$

上式可以写成矩阵表达形式:

$$-\omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{Q})\tilde{\mathbf{q}} + j\omega\mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{q}} = 2p_i\mathbf{H}, \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \rho_s h_s \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{21} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = 2\rho_a c_a \begin{bmatrix} C_{11} & & & 0 \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_{NN} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q} = \rho_{\text{mass}} h_{\text{mass}} \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & \cdots & I_{1,N} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & \cdots & I_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{N,1} & I_{N,2} & \cdots & I_{N,N} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = T \begin{bmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{NN} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & & & 0 \\ & R_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_N \end{bmatrix}, \\ \begin{cases} M_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy, Q_{m,n} = \int_x^{x+L_x} \int_y^{y+L_y} \phi_n \phi_m dx dy, \\ C_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy, K_{mn} = -\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \nabla^2 \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy, \\ R_{mn} = \left(Ic_{11} + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} h \right) \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^4 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy + \\ \left(Ic_{22} + \frac{f_{3223}f_{3223}}{a_{33}} h \right) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy + \\ 2 \left(Ic_{12} + \frac{f_{3113}f_{3223}}{a_{33}} h + 2Ic_{66} \right) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n \sum_{m=1}^M \phi_m dx dy, \\ H_m = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_n dx dy. \end{cases} \end{cases} \quad (39)$$

由式(37)可得薄板的模态系数为

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{2p_i\mathbf{H}}{-\omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{Q}) + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{R}}. \quad (40)$$

薄板任意位置 (x,y) 的挠度为

$$\tilde{w}(x,y) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{q}_{mn} \phi_{mn}(x,y) = \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\mathbf{q}}. \quad (41)$$

模态迁移矩阵为

$$\mathbf{Y} = \frac{j\omega}{-\omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{Q}) + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{R}}. \quad (42)$$

薄板结构表面的振动速度幅值为

$$V = Yg_p. \quad (43)$$

从任意角度入射的平面波引起的广义模态力为

$$g_{p,m} = 2 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p_i \phi_m dy dx. \quad (44)$$

对于垂直入射的平面波,上式可简化为

$$g_{p,m} = 2p_i H_m. \quad (45)$$

结构的平均振动速度为

$$\bar{v} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} v(x, y) dy dx = \frac{1}{L_x L_y} \mathbf{H}^T \mathbf{V}. \quad (46)$$

定义薄板的声功率透射系数为透射强度与入射强度之比:

$$\tau = \left| \frac{\rho_0 c_0 \bar{v}}{p_i} \right|^2 = \left| \frac{j\omega \rho_0 c_0}{p_i L_x L_y} \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{q}} \right|^2. \quad (47)$$

由此,薄板的传输损失(transmission loss, 简称 TL)为

$$\varepsilon_{TL} = 10 \lg(1/\tau). \quad (48)$$

2 参数讨论

根据上文所述的理论方法计算得到薄板质量块结构的隔声曲线,并对其中的参数进行分析,以探究挠曲电薄板质量块结构隔声特性的一般规律,为后续的结构设计提供基础.选取挠曲电效应、薄板和质量块的材料参数和结构参数作为变量.采用 PZT-5H 材料作为薄板材料进行附加质量块薄板结构的理论分析.需要注意的是, PZT-5H 为压电材料,需要考虑其压电系数.将质量块放于薄板中心,并且不考虑薄板张力的影响.具体的材料和结构参数如表 1 所示.

表 1 薄板质量块材料参数和结构参数^[16]

Table 1 Material and structural parameters of the sheet mass block^[16]

parameter	value
plate length	$L_x = 500 \text{ nm}$
plate width	$L_y = 500 \text{ nm}$
plate density	$\rho_s = 7500 \text{ kg/m}^3$
plate thickness	$h_s = 10 \text{ nm}$
mass block length	$l_x = 50 \text{ nm}$
mass block width	$l_y = 50 \text{ nm}$
mass block density	$\rho_{\text{mass}} = 7550 \text{ kg/m}^3$
mass block thickness	$h_{\text{mass}} = 100 \text{ nm}$
elasticity modulus	$c_{11} = c_{22} = 1.26 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, c_{12} = 7.95 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, c_{66} = 2.325 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
piezoelectric coefficient	$e_{311} = e_{322} = -6.5 \text{ C/m}^2$
flexoelectricity coefficient	$f_{3113} = f_{3223} = 1 \times 10^{-7} \text{ C/m}$
dielectric constant	$a_{33} = 1.302 \times 10^{-8} \text{ C}/(\text{V}\cdot\text{m})$

2.1 薄板质量块结构隔声计算

首先研究挠曲电效应对薄板质量块结构隔声曲线的影响.如图 3 所示,采用表 1 的材料参数和结构参数,绘制了考虑挠曲电效应和经典理论的隔声曲线.其中,圆点为考虑挠曲电效应的薄板质量块结构的隔声曲线,方块为经典理论下薄板质量块结构的隔声曲线.

从图 3 中可以看出,相比于经典模型,考虑挠曲电效应后,隔声峰值和谷值频率向高频偏移,薄板质量块结构的隔声量并没有明显变化.其物理机理在于,挠曲电效应改变了薄板的等效抗弯刚度.具体来说,考虑挠

曲电效应后,薄板的抗弯刚度增大,根据薄板共振频率式(21),当考虑挠曲电效应后,板的抗弯刚度增大,共振频率会向高频移动.由于挠曲电效应具有明显的尺寸效应,对于结构几何参数越小的薄板质量块模型,挠曲电效应越明显,板的抗弯刚度变化将会更大,隔声曲线将继续向高频移动.

为了更清楚地描述在何种尺寸下,挠曲电效应起主导作用,分别绘制了图 4(a)和图 4(b).图 4(a)描述了经典薄板结构与考虑挠曲电效应的薄板结构第一隔声谷/峰值随薄板边长的变化曲线,采用矩形薄板,取薄板宽度等于薄板长度.由图 4(a)可知,相较于经典理论,考虑挠曲电效应后,薄板结构第一隔声谷和第一隔声峰整体呈现上升趋势,即隔声谷和隔声峰频率更高.可以发现,在薄板边长为 $0.4 \mu\text{m}$ 及以下时,挠曲电效应的存在都会导致隔声谷值和峰值的变化,因此可以认为,在边长为 $0.4 \mu\text{m}$ 以下的薄板结构中,挠曲电效应就无法忽略.同时,图 4(b)绘制了经典薄板结构与考虑挠曲电效应的薄板结构第一隔声谷/峰值随薄板厚度的变化曲线.可以发现,相较于经典薄板理论,考虑挠曲电效应后,薄板结构第一隔声谷和第一隔声峰整体向高频偏移.但挠曲电效应对隔声谷值和隔声峰值的影响,并没有随厚度的变化而变化,整体上是一个固定的偏移,与薄板厚度关系不大.

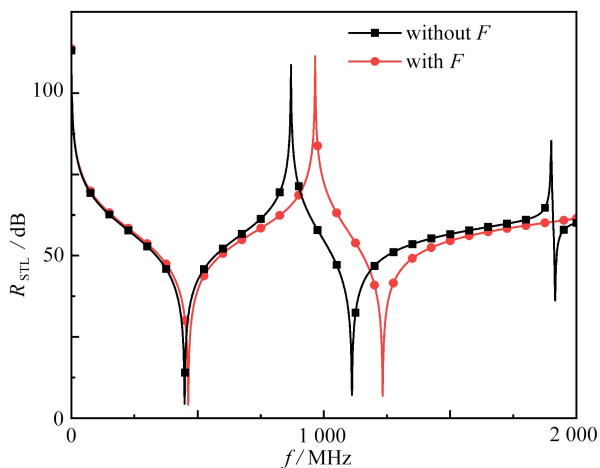
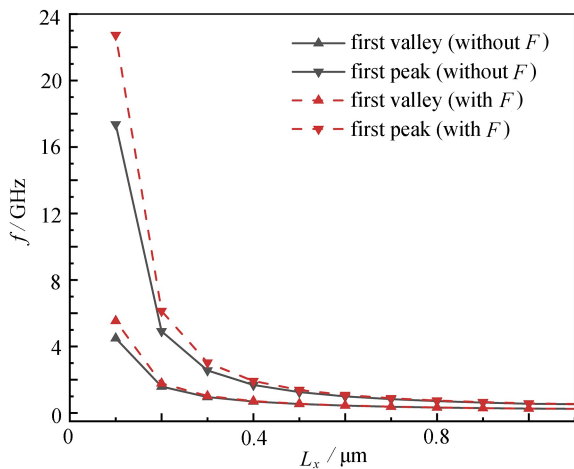
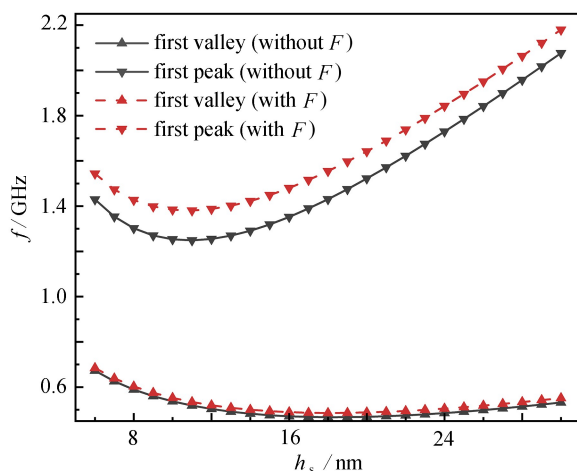


图 3 考虑挠曲电效应与经典理论的隔声曲线对比
Fig. 3 The sound insulation curve of the flexural effect is compared with that of the classical theory



(a) 薄板边长

(a) The sheet length



(b) 薄板厚度

(b) The sheet thickness

图 4 第一隔声谷/峰值频率随薄板边长/厚度的变化曲线

Fig. 4 The 1st sound insulation valley/peak frequency curves with the sheet side length/thickness

2.2 薄板大小对隔声曲线的影响

保持其他参数不变,分别将薄板尺寸扩大到 $400 \text{ nm} \times 400 \text{ nm}$, $500 \text{ nm} \times 500 \text{ nm}$, $600 \text{ nm} \times 600 \text{ nm}$,由图 5 可知,隔声谷值和峰值频率向低频发生偏移.物理上来说,根据挠曲电薄板的共振频率公式,当其他条件不变,薄板尺寸增大时,共振频率向低频偏移,与隔声曲线结果一致.此外,隔声峰值对应的是结构的反共振频率,随着薄板尺寸的增加,反共振频率也向低频偏移,从而导致隔声曲线整体的偏移.

2.3 薄板密度对隔声曲线的影响

根据挠曲电薄板共振频率公式,共振隔声频率应随着面密度的增大向低频移动.随着薄板面密度的增加,图 6 所示的隔声谷值和峰值频率确实向低频方向移动.相较于第一隔声谷和第一隔声峰,改变薄板密度对第二隔声谷产生的影响更大.这是因为第一隔声谷主要受到质量块和质量块与薄板接触部分的影响,第二

隔声谷主要由非接触部分的薄板振动导致,所以增加薄板密度主要影响第二隔声谷。

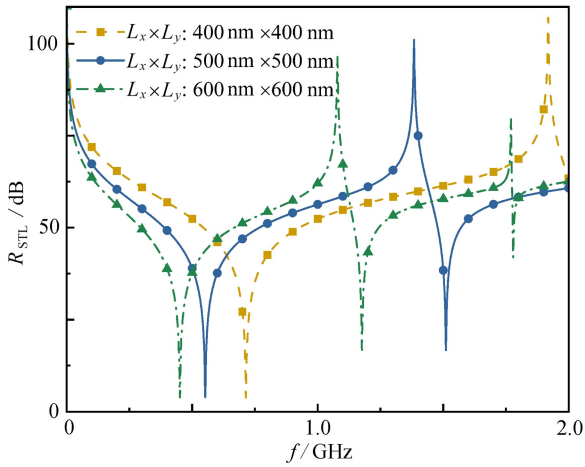


图5 薄板尺寸对隔声曲线的影响

Fig. 5 Influences of sheet sizes on sound insulation curves

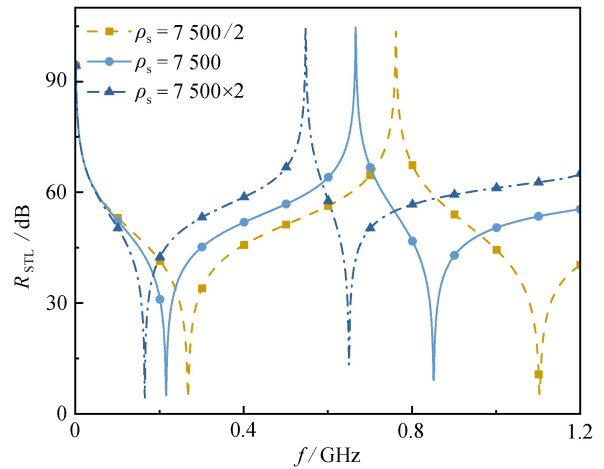


图6 薄板面密度对隔声曲线的影响

Fig. 6 Effects of thin plate surface densities on sound insulation curves

2.4 质量块面密度对隔声曲线的影响

对于薄板质量块结构,分析质量块对振动的影响时,将其等效为集中参数系统.将质量块的质量等效为 M_2 ,薄板质量等效为 M_1 ,薄板质量块的振动等效为集中质量 $M_1 + M_2$ 在等效弹簧 K_1 的作用下的振动.此时,系统振动的固有频率为 $f_0 = \sqrt{K_1 / (M_1 + M_2)} / (2\pi)$.质量块的面密度由质量块的高度和密度决定,保持质量块高度不变.根据集中参数系统的固有频率及图7可知,当质量块密度增加时,隔声谷值与峰值均向低频移动.相较于薄板面密度,质量块面密度增大后,质量块对薄板的调控能力增强,对第一隔声峰产生较大影响。

2.5 质量块大小对隔声曲线的影响

其他条件不变,分别改变质量块尺寸为 $25 \text{ nm} \times 25 \text{ nm}$, $50 \text{ nm} \times 50 \text{ nm}$ 和 $100 \text{ nm} \times 100 \text{ nm}$.薄板质量块结构隔声曲线的变化规律与改变质量块面密度时的变化规律相似,隔声曲线整体向低频移动(图8).当增加质量块大小时,质量块的质量也随之增加,由等效参数系统共振频率的计算公式可知,曲线应向低频移动。

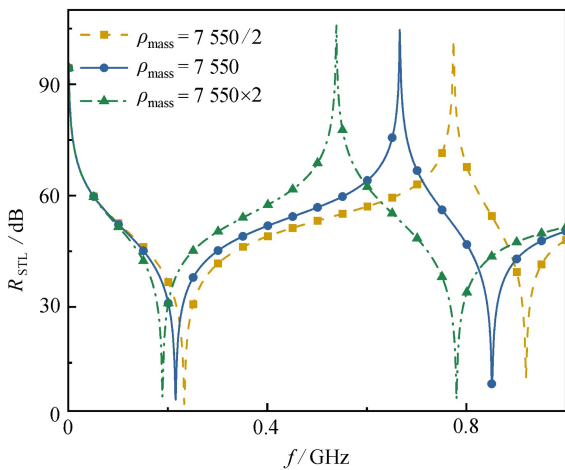


图7 质量块面密度对隔声曲线的影响

Fig. 7 Influences of mass block surface densities on sound insulation curves

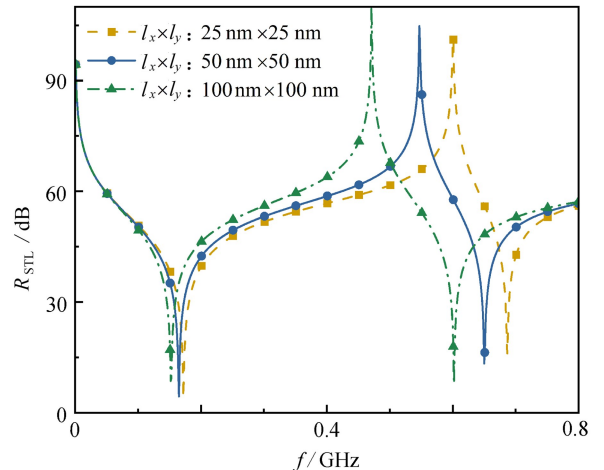


图8 质量块大小对隔声曲线的影响

Fig. 8 Influences of mass block sizes on sound insulation curves

3 总结

本文基于挠曲电效应的变分理论框架,推导得到了电介质材料的本构方程.进一步基于 Kirchhoff 薄板理论,推导了考虑挠曲电效应的薄板控制方程.基于声学理论,计算了考虑挠曲电效应的薄板的隔声曲线,分析

了挠曲电效应、薄板大小、薄板面密度、质量块大小、质量块面密度等参数对隔声曲线的影响。结果表明,挠曲电效应显著增加了隔声曲线的隔声谷值和峰值频率,可通过改变结构参数获得特定的隔声曲线。当结构的尺寸为微纳米级别时,考虑挠曲电效应是十分有必要的。本文揭示了微纳米尺度下薄板质量块结构具有的隔声特点,为今后在微纳高频器件的设计和应用提供了理论依据。

致谢 本文作者衷心感谢江苏省精密制造技术工程研发中心项目(JSPMET2024)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] 田源,葛浩,卢明辉,等.声学超构材料及其物理效应的研究进展[J].物理学报,2019,68(19):194301.(TIAN Yuan, GE Hao, LU Minghui, et al. Research advances in acoustic metamaterials[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(19): 194301. (in Chinese))
- [2] MA G, YANG M, YANG Z, et al. Low-frequency narrow-band acoustic filter with large orifice[J]. *Applied Physics Letters*, 2013, 103(1): 011903.
- [3] PARK J J, KWAK J H, SONG K. Ultraslow medium with an acoustic membrane-like undamped dynamic vibration absorber for low-frequency isolation[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2021, 43: 101203.
- [4] YAO S, ZHOU X, HU G. Investigation of the negative-mass behaviors occurring below a cut-off frequency[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(10): 103025.
- [5] MEI J, MA G, YANG M, et al. Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound[J]. *Nature Communications*, 2012, 3: 756.
- [6] KALAEI M, MIRHOSSEINI M, DIETERLE P B, et al. Quantum electromechanics of a hypersonic crystal[J]. *Nature Nanotechnology*, 2019, 14(4): 334-339.
- [7] CUENOT S, FRÉTIGNY C, DEMOUSTIER-CHAMPAGNE S, et al. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy[J]. *Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics*, 2004, 69(16): 165410.
- [8] WANG Z L, SONG J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays[J]. *Science*, 2006, 312(5771): 242-246.
- [9] WANG X, ZHOU J, SONG J, et al. Piezoelectric field effect transistor and nanoforce sensor based on a single ZnO nanowire[J]. *Nano Letters*, 2006, 6(12): 2768-2772.
- [10] JIANG X, HUANG W, ZHANG S. Flexoelectric nano-generator: materials, structures and devices[J]. *Nano Energy*, 2013, 2(6): 1079.
- [11] ZHANG Z, JIANG L. Size effects on electromechanical coupling fields of a bending piezoelectric nanoplate due to surface effects and flexoelectricity[J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, 116: 134308.
- [12] SHEN S, HU S. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, 2010, 58(5): 665-677.
- [13] 王平,黄庆安,于虹.纳机电系统阻尼及噪声研究进展[J].电子器件,2004,27(3):527-532.(WANG Ping, HUANG Qing'an, YU Hong. Research and progress of damping and noise in NEMS[J]. *Chinese Journal of Electron Devices*, 2004, 27(3): 527-532. (in Chinese))
- [14] 任树伟,辛锋先,卢天健.考虑尺度效应的微平板声振耦合特性研究[J].中国科学:技术科学,2014,44(2):201-208.(REN Shuwei, XIN Fengxian, LU Tianjian. Vibroacoustic characteristics of micro-plates considering scale effect[J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2014, 44(2): 201-208. (in Chinese))
- [15] 原庆丹,郭俊宏.一维纳米准晶层合梁的非局部振动、屈曲与弯曲研究[J].应用数学和力学,2024,45(2):208-219.(YUAN Qingdan, GUO Junhong. Nonlocal vibration, buckling and bending of 1D layered quasicrystal nanobeam[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, 45(2): 208-219. (in Chinese))
- [16] GHORBANPOUR A A, SOLTAN A A H, HAGHPARAST E. Flexoelectric and surface effects on vibration frequencies of annular nanoplate[J]. *Indian Journal of Physics*, 2021, 95(10): 2063-2083.