

弹性基底上软物质梁的弹性毛细变形*

俞慧婷, 王雨, 黄再兴

(南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

摘要: 当软物质微/纳米结构表面存在液滴时, 需要考虑由润湿诱导的弹性毛细变形. 该文基于一个新的润湿方程, 推导了液滴铺展半径与其表面曲率的关系, 并得到了无重力影响时液滴保持球冠状的必要条件; 结合 Winkler 地基模型, 计算了弹性基底上软物质微梁的弹性毛细变形, 得到了微梁挠度的解析解. 以聚苯乙烯 (EPS) 和聚乙烯 (PE) 梁为例, 分析并讨论了液滴铺展半径、弹性模量和基底参数对微梁的挠曲变形以及从基底上脱黏的影响.

关键词: 润湿; 弹性毛细变形; Winkler 地基模型; 软物质; 微梁

中图分类号: O343.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450028

Elastocapillary Deformation of Soft Matter Beams on Elastic Substrate

YU Huiting, WANG Yu, HUANG Zaixing

(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China)

Abstract: With droplets on the surface of soft matter or micro/nanostructures, wetting-induced elastocapillary deformation should be considered. Based on a new wetting equation, the relationship between the droplet spreading radius and its surface curvature was determined, and the necessary conditions for the droplet to hold the spherical cap without the influence of gravity were obtained. Combined with the Winkler foundation model, the elastocapillary deformation of soft material microbeam on elastic substrate was calculated. The analytical solution for the deflection of the microbeam was given. With polystyrene and polyethylene beams as examples, the influences of the droplet spreading radius, the beam material elastic modulus and the Winkler foundation parameter on the microbeam deflections and detachments from the substrate, were analyzed and discussed.

Key words: wetting; elastocapillary deformation; Winkler foundation model; soft matter; microbeam

0 引 言

润湿是一种液体与固体表面接触并附着的现象, 在自然界中广泛存在^[1]. 在润湿过程中, 液体和固体通过二者之间的界面相互作用, 不过这种相互作用力的影响一般较弱, 故在大尺寸的硬固体上, 润湿诱导的变

* 收稿日期: 2024-02-02; 修订日期: 2024-03-11

基金项目: 国家自然科学基金 (11172130; 12072145)

作者简介: 俞慧婷 (2000—), 女, 硕士 (E-mail: yuyuyu@nuaa.edu.cn);

黄再兴 (1988—), 男, 教授, 博士 (通讯作者. E-mail: huangzx@nuaa.edu.cn).

引用格式: 俞慧婷, 王雨, 黄再兴. 弹性基底上软物质梁的弹性毛细变形 [J]. 应用数学和力学, 2024, 45 (12): 1530-1540.

形相对较小,一般可以忽略.然而,当材料比较软或者结构的特征尺度接近甚至小于毛细长度时,变形开始变得显著.

润湿诱导的变形被称为弹性毛细变形,相关的研究可以追述到 20 世纪 60 年代初.由于 Young 于 1805 年给出的描述润湿行为的三相线方程仅满足固体表面内的平衡^[2].而在面外未达到平衡,对此 Lester^[3]认为:固体表面必然对三相线施加作用力以保证其平衡,这个力的反作用力(为方便,称之为毛细力)也将导致固体表面产生变形.他将毛细力等效为均匀作用在三相线周围的宽度为 t 的固体基底环形区域上的法向拉力,而在环形区域内的 Laplace 压力是均匀的法向力,这两部分力构成一个平衡力系.利用 Hankel 变换, Lester 得到了由润湿引起的半无限大基底的表面变形,预测在三相线处出现润湿脊,指出此处变形曲率较大所以不可忽略,给出了表面张力与角度的关系,强调对于软材料应该考虑弹性毛细变形的影响. Rusanov^[4] 考虑到实际接触角 θ_l 与 Young 接触角 θ_Y 存在差异,认为在三相接触线上还作用着一个水平毛细力,同样假设 Laplace 压力均匀分布在液气界面上,得到了液滴引起的基底表面的变形. Fortes^[5] 假设三相线处作用的是沿接触线均匀分布的线力,通过热力学原理,得到了类似 Young 接触角和表面张力之间的关系.并以此分别计算了当液滴附着于薄板上、悬垂于薄板下方以及液滴夹在两板之间形成液桥时板的变形. Style 等^[6-7] 将表面张力视为三重接触线上的线力,然后通过理论分析和实验研究了液滴润湿引起的基底变形.他们发现润湿脊的出现是一种普遍现象. Bostwick 等^[8] 根据 Style 的假设使用位移势函数构造了弹性变形的通解,并得到了与 Style 等相似的结果.

很多学者利用能量原理对弹性毛细变形进行了研究. Kern 和 Müller^[9] 利用系统能量最小原理确定固液界面的形状,分析了当液滴位于各向同性薄膜中心时,薄膜的弹性毛细变形.他们还考虑了液滴重力的影响,液滴在无重力时是标准的球冠状,而在重力的牵引下,膜上的液滴将趋于扁平. Olives^[10] 以薄板为例分析了液滴对基底的影响,并对 Young 方程进行了修正. Liu 等根据液滴的能量泛函,推导并求解了液滴形态的控制方程,分析了弹性衬底在毛细力作用下的变形情况^[11],考虑到液滴的表面张力和 Laplace 压差,推导出了不同支撑条件下微梁的弯矩和挠度^[12]. 陶泽、刘少宝和卢天建等^[13] 讨论了充液弹性毛细管内结冰时的冻胀效应及其所导致的毛细管壁中的应力分布. Yu 等^[14] 通过数值模拟的方法得到了 PDMS 制成的膜和微悬臂梁在不同形态液滴润湿下的弹性毛细变形.

虽然对于弹性毛细变形已经有了大量研究,关于毛细力以何种形式作用于基底仍不能确定.到目前为止,通常假定毛细力是一个分布在三相线上的线力,或一个分布在三相线周围的环状区域上的均布力.但第一种假设会使固体位移场出现奇异点^[15],第二种假设中的环状区域的宽度是人为选择的^[3],而且无法测量确定.最近, Huang^[16-17] 基于润湿系统能量最小化,严格推导了弹性毛细变形的控制方程与界面、边界条件,完成了对半无限大基底弹性毛细变形的分析,确定了毛细力在固液界面上的分布.根据新的润湿理论,无需假定固体表面毛细力的分布,不用考虑边界层的厚度,避免了计算固体位移出现奇异点.

利用 Huang 所发展的弹性毛细理论,本文研究了弹性基底上软物质梁因液滴润湿产生的弹性毛细变形.当受到弹性毛细作用的梁放置在基底上时,基底会在梁的作用下产生弹性变形.为了简化分析,本文采用 Winkler 弹性地基模型表征弹性基底,用 Euler-Bernoulli 模型分析梁的挠曲变形. Winkler 地基模型由 Winkler E 于 1867 年提出,由于它形式简单、参数少,并且精度满足工程要求,因此在土木与交通工程领域得到了广泛应用.本文进一步假定 Winkler 地基与梁的相互作用是一个自平衡力系,这是与现有弹性地基上梁模型的一个区别.

本文的主要内容如下:在第 1 节中,我们建立了 Winkler 基底上软物质梁弹性毛细变形的控制方程;第 2 节则讨论了挠度方程的求解;第 3 节重点分析了梁的挠曲变形、脱黏及其影响因素;最后,第 4 节针对本文所得到的新结论进行了一个简短的总结.

1 Winkler 基底上软物质梁的弹性毛细变形

1.1 控制方程

当液滴尺寸小于毛细长度时,可以忽略重力作用.为了凸显物理问题的本质,本文将液滴的表面近似设

定为圆柱面.如图1所示,放置在 Winkler 基底上的软物质梁,长为 $2l$,高为 h ,深度为 d .润湿区域宽度为 $2R$,液滴截面的半径为 r ,接触角为 θ_Y ,基底的基床系数为 k .由于 Winkler 基底只能承受有限的拉力,因此,当软物质梁卷曲时,便可以脱离基底.

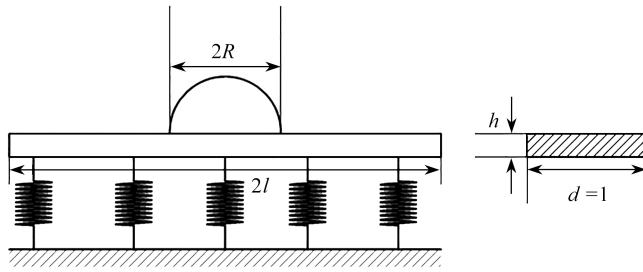


图1 液滴作用在置于弹性基底上的梁

Fig. 1 Droplets acting on a beam placed on elastic foundation

众所周知,梁弯曲的控制方程为

$$EIy'''' = q(x), \quad (1)$$

其中 E 为弹性模量, I 是惯性矩, $q(x)$ 表示梁表面的载荷集度, y 表示梁的挠度,取向上为正,液滴放置在梁的中心位置,取梁中心为坐标原点, x 轴的正方向向右.因为梁两端自由,当润湿引起梁变形时,梁两端可能脱离基底,故假设梁变形后的形态如图2所示.其中梁与基底接触的部分为 $x \in [-l_1, l_1]$ 段,润湿部分为 $x \in [-R, R]$ 段,两端部分处于脱黏状态.

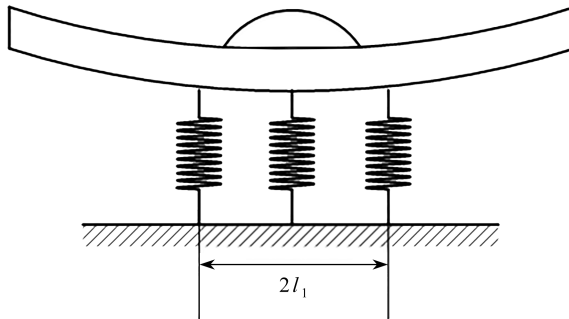


图2 润湿引起弹性基底上梁的变形

Fig. 2 Wetting induced deformation of a beam on elastic foundation

由文献[13]可以知道,在润湿部分, $q(x)$ 包括固液界面的 Laplace 压力 $(2\gamma_{sl}H_{sl} - 2\gamma_{lv}H_{lv})d$,当梁与基底接触时,还有基底对梁的反作用力 $-kdy$.因此,式(1)可具体表示为

$$EIy'''' = \begin{cases} -kdy + (2\gamma_{sl}H_{sl} - 2\gamma_{lv}H_{lv})d, & 0 \leq x \leq R, \\ -kdy, & R < x \leq l_1, \\ 0, & l_1 < x \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

式中 γ_{lv} 表示液滴表面张力, γ_{sl} 表示固液界面张力, H_{lv} 与 H_{sl} 分别表示液气和固液界面的平均曲率,其中 $H_{lv} = 1/(2r) = \sin \theta_Y / (2R)$,当梁的弯曲半径远大于厚度 h 时,有 $H_{sl} \approx y''/2$.

式(2)中第一个方程(式(2)₁,后同)可以表示为

$$EIy'''' - \gamma_{sl}dy'' + kdy = -2\gamma_{lv}H_{lv}d, \quad (3)$$

其中, $-\gamma_{sl}dy''$ 与 kdy 与梁的挠曲变形相关,右边的非齐次项 $-2\gamma_{lv}H_{lv}d$ 相当于导致梁弯曲的外力.因为液滴处于平衡状态,因此,固/液界面上的相互作用力 $(2\gamma_{sl}H_{sl} - 2\gamma_{lv}H_{lv})d$ 必定是一个自平衡力系,从而导致基底对梁的作用力也是一个自平衡力系.由于基底有一个承拉的限制,即可假设在 $x \in [R, l_1]$ 段,梁受到基底的拉力,至 $x = l_1$ 处梁完全脱离基底.

设 $0 \leq x \leq R$ 段的挠度为 y_1 , $R < x \leq l_1$ 段的挠度为 y_2 , $l_1 < x \leq l$ 段的挠度为 y_3 .为了便于求解与讨论,引入相关参数

$$a = \frac{kd}{EI}, \quad b = \frac{\gamma_{sl}d}{EI}, \quad c = \frac{\gamma_{lv}d}{Elr}, \quad (4)$$

于是方程(2)简化为

$$\begin{cases} y_1'''' - by_1'' + ay_1 = -c, & 0 \leq x \leq R, \\ y_2'''' + ay_2 = 0, & R < x \leq l_1, \\ y_3'''' = 0, & l_1 < x \leq l. \end{cases} \quad (5)$$

1.2 控制方程的通解

式(5)是一组常系数四阶线性常微分方程,其解可以由解析式表达.首先求解方程(5)₁,其齐次方程的特征方程为

$$u^4 - bu^2 + a = 0. \quad (6)$$

它的解可表示为

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm i\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}, \quad u_{3,4} = \frac{-\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm i\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}. \quad (7)$$

讨论

① 若 $2\sqrt{a} - b > 0$, 则特征方程存在 2 对单复根:

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm i\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}, \quad u_{3,4} = \frac{-\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm i\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}.$$

方程(5)₁的齐次通解为

$$y_1^{\#}(x) = e^{\sqrt{2\sqrt{a}+b}x/2} \left[c_{11} \cos\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}x\right) + c_{12} \sin\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}x\right) \right] + e^{-\sqrt{2\sqrt{a}+b}x/2} \left[c_{13} \cos\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}x\right) + c_{14} \sin\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{a}-b}}{2}x\right) \right]. \quad (8)$$

② 若 $2\sqrt{a} - b = 0$, 则特征方程有一对 2 重复根 $s = \pm i\sqrt[4]{a}$, 方程(5)₁的齐次通解为

$$y_1^{\#}(x) = (c_{11} + c_{12}x) \cos(\sqrt[4]{a}x) + (c_{13} + c_{14}x) \sin(\sqrt[4]{a}x). \quad (9)$$

③ 若 $2\sqrt{a} - b < 0$, 则特征方程有 4 个实根:

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm \sqrt{b-2\sqrt{a}}}{2}, \quad u_{3,4} = \frac{-\sqrt{2\sqrt{a}+b} \pm \sqrt{b-2\sqrt{a}}}{2}. \quad (10)$$

方程(5)₁的齐次通解为

$$y_1^{\#}(x) = c_{11}e^{(\sqrt{2\sqrt{a}+b} + \sqrt{b-2\sqrt{a}})x/2} + c_{12}e^{(\sqrt{2\sqrt{a}+b} - \sqrt{b-2\sqrt{a}})x/2} + c_{13}e^{(-\sqrt{2\sqrt{a}+b} + \sqrt{b-2\sqrt{a}})x/2} + c_{14}e^{(-\sqrt{2\sqrt{a}+b} - \sqrt{b-2\sqrt{a}})x/2}. \quad (11)$$

设方程(5)₁的特解形式为 $y_1^0(x) = b_0x + b_1$, 代入方程(5)₁, 解得 $b_0 = 0, b_1 = -c/a$. 所以方程(5)₁的通解可以表示为

$$y_1(x) = y_1^{\#}(x) + y_1^0(x). \quad (12)$$

同理,可以得到方程(5)₂的通解

$$y_2 = e^{\sqrt[4]{ax}/\sqrt{2}} \left(c_{21} \cos\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{2}}x\right) + c_{22} \sin\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{2}}x\right) \right) + e^{-\sqrt[4]{ax}/\sqrt{2}} \left(c_{23} \cos\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{2}}x\right) + c_{24} \sin\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{2}}x\right) \right), \quad (13)$$

以及方程(5)₃的通解

$$y_3 = c_{31}x^3 + c_{32}x^2 + c_{33}x + c_{34}. \quad (14)$$

综上,可以得到梁的挠度曲线通解:

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{c}{a} + y_1^{\#}(x), & 0 \leq x \leq R, \\ y_2(x) = e^{\frac{4\sqrt{a}x}{\sqrt{2}}} \left(c_{21} \cos\left(\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2}}x\right) + c_{22} \sin\left(\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2}}x\right) \right) + \\ e^{-\frac{4\sqrt{a}x}{\sqrt{2}}} \left(c_{23} \cos\left(\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2}}x\right) + c_{24} \sin\left(\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2}}x\right) \right), & R < x \leq l_1, \\ y_3(x) = c_{31}x^3 + c_{32}x^2 + c_{33}x + c_{34}, & l_1 < x \leq l. \end{cases} \quad (15)$$

2 挠度方程的求解

2.1 定解条件

在方程(15)中有待定参数 c_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2,3,4$), 它们需要结合梁的边界条件、对称性条件、梁段在 l_1 和 R 处的连续性条件才能最终求出. 接下来讨论 c_{ij} 的求解.

在边界 $x=l$ 处, 由于梁两端处于自由状态, 其剪力、弯矩为 0. 边界条件可以写作

$$\begin{cases} y_3''(l) = 0, \\ y_3'''(l) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

由于梁的变形对称, 在 $x=0$ 处, 梁的转角、剪力为 0, 写作

$$\begin{cases} y_1'(0) = 0, \\ y_1'''(0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

在梁的分段处由于挠度、弯矩和剪力均不会突变, 因此连续性条件可表示为

$$\begin{cases} y_1(l_1) = y_2(l_1), \\ y_1'(l_1) = y_2'(l_1), \\ y_1''(l_1) = y_2''(l_1), \\ y_1'''(l_1) = y_2'''(l_1), \end{cases} \quad (18a)$$

$$\begin{cases} y_3(R) = y_2(R), \\ y_3'(R) = y_2'(R), \\ y_3''(R) = y_2''(R), \\ y_3'''(R) = y_2'''(R). \end{cases} \quad (18b)$$

方程(15)中总共包含待定系数 12 个, 而方程(16)——(18)提供了 12 个等式, 可知联立方程组有唯一解.

在上述求解过程中, 假定 l_1 是已知的, 解得的系数 c_{ij} 中包含 l_1 . 如前所述, 由于基底对梁的作用力也是一个自平衡力系, 故 l_1 可以由下面的平衡方程确定, 即

$$f(l_1) = -\int_0^R k dy_1(x) dx - \int_R^{l_1} k dy_2(x) dx = 0. \quad (19)$$

2.2 模型计算参数的确定方法

常数 $\gamma_{sl}, \gamma_{lv}, \gamma_{sv}$ 只与固、液和气体的热力学性质有关. 根据 Good-Girifalco 理论,

$$\gamma_{sl} = \gamma_{sv} + \gamma_{lv} - 2\phi\sqrt{\gamma_{sv}\gamma_{lv}}, \quad (20)$$

ϕ 为校正因子, 依赖于体系的组成, 一般 $\phi \leq 1$.

梁在液滴诱导下产生的变形可以简化为图 3. 根据文献[13], 三相接触线的平衡需要满足

$$\gamma_{sl}t_{sl} + \gamma_{lv}t_{lv} = \gamma_{slv}k_m m, \quad (21)$$

即

$$\begin{cases} \gamma_{lv} \sin \theta = \gamma_{sl} \sin \alpha, \\ \gamma_{lv} \cos \theta + \gamma_{sl} \cos \alpha = \frac{\gamma_{slv}}{R}, \end{cases} \quad (22)$$

式中 α, θ 表示 $\mathbf{t}_{sl}, \mathbf{t}_{lv}$ 与 \mathbf{m} 之间的夹角, 消除式(22)中的 α , 可得

$$\gamma_{sl}^2 = \gamma_{lv}^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{\gamma_{slv}}{R} - \gamma_{lv} \cos \theta \right)^2. \quad (23)$$

因为液滴为球冠状, 式(23)可以简化为

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{R^2}{r^2} = \frac{((\gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2)R^2 + \gamma_{slv}^2)^2}{4\gamma_{lv}^2 \gamma_{slv}^2 R^2}, \quad (24)$$

其中 $\gamma_{lv}, \gamma_{sl}, \gamma_{slv}$ 与材料有关, 给定铺展半径 R 则可以得到此时液滴表面的曲率半径 r .

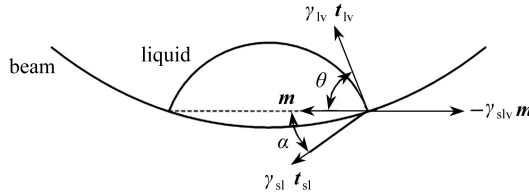


图 3 梁的变形简化图

Fig. 3 Simplified deformation diagram of the beam

观察式(24), 接触角 θ 的取值在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之内, 故有

$$0 < \frac{((\gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2)R^2 + \gamma_{slv}^2)^2}{4\gamma_{lv}^2 \gamma_{slv}^2 R^2} < 1. \quad (25)$$

令

$$A = \gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2, \quad B = \gamma_{slv}^2, \quad C = 4\gamma_{lv}^2 \gamma_{slv}^2, \quad (26)$$

仅考虑 $\gamma_{lv} > \gamma_{sl}$ 的情况, 因此 $A > 0$. 利用式(26), 式(25)可改写为

$$0 < \frac{(AR^2 + B)^2}{CR^2} < 1, \quad (27)$$

解得

$$\frac{1}{A} \left[\frac{C}{2A} - B - \sqrt{\frac{C}{A} \left(\frac{C}{4A} - B \right)} \right] < R^2 < \frac{1}{A} \left[\frac{C}{2A} - B + \sqrt{\frac{C}{A} \left(\frac{C}{4A} - B \right)} \right]. \quad (28)$$

将式(26)代入式(28), 化简得到

$$\frac{\gamma_{slv}^2 (\gamma_{lv} - \gamma_{sl})^2}{(\gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2)^2} < R^2 < \frac{\gamma_{slv}^2 (\gamma_{lv} + \gamma_{sl})^2}{(\gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2)^2}, \quad (29)$$

即 R 满足

$$\frac{\gamma_{slv}}{\gamma_{lv} + \gamma_{sl}} < R < \frac{\gamma_{slv}}{\gamma_{lv} - \gamma_{sl}}. \quad (30)$$

从数学角度看, 式(21)可以看成由 $\gamma_{sl} \mathbf{t}_{sl}, \gamma_{lv} \mathbf{t}_{lv}, \gamma_{slv} k_m \mathbf{m}$ 组成的矢量三角形, 式(30)体现了该三角形第三边 $\gamma_{slv} k_m$ 必须介于另外两边 $\gamma_{sl} \mathbf{t}_{sl}$ 与 $\gamma_{lv} \mathbf{t}_{lv}$ 的和与差之间. 从物理角度解释: $\sin \theta = R/r$ 只在假设液滴为球冠状条件下成立, 即不计液滴重力情况下, 当液滴的铺展半径满足式(30), 它才能保持球冠状. 若 R 不满足式(30), 则液滴表面不能保持球冠状, 其平均曲率形式不能表示为 $1/r$. 此时, 本模型失效, 需要建立新的分析模型.

在式(30)中, 毛细参数 γ_{sl}, γ_{lv} 和 γ_{slv} 本质上都应通过试验测得, 但除了 γ_{lv} , 目前还较难测量 γ_{sl} 与 γ_{slv} . Drelich^[18] 推导 γ_{slv} 在 $0 \sim 10^{-9}$ N 范围内, 文献[19]通过理论和实验得到了一些材料的 γ_{slv} , 但其依据是 Young 方程, 而 Young 方程没有考虑固体的变形, 得到的 γ_{slv} 值偏小^[20]. 当材料的固体表面张力 γ_{sv} 已知时, 固液界面张力 γ_{sl} 可由式(20)确定. 在得到这些参数后, 给定球冠状液滴的作用半径 R , 根据式(24)可得

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\gamma_{lv}^2 + \gamma_{sl}^2}{2\gamma_{lv}^2} - \frac{\gamma_{lv}^2 - \gamma_{sl}^2}{4\gamma_{lv}^2 \gamma_{slv}^2} - \frac{1}{R^4} \frac{\gamma_{slv}^2}{\gamma_{lv}^2}. \quad (31)$$

将式(31)代入式(4), 并结合第 2 节的解, 就可以确定梁的挠度曲线.

3 结果与讨论

3.1 挠度曲线

以聚苯乙烯(EPS)制作的微梁为例,来分析由水滴导致的微梁的弹性毛细变形.通常,水的表面张力取 $\gamma_{lv} = 7.2 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$, EPS 的表面张力为 $\gamma_{sv} = 3.5 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$.取 ϕ 为 0.5,则由式(20)可得 $\gamma_{sl} = 5.8 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$.根据文献[21]中的结果,EPS/水润湿体系的三相接触线的线张力取值范围为 $\gamma_{slv} = 1.4 \times 10^{-7} \sim 1.4 \times 10^{-5} \text{ N}$,本文中取 $\gamma_{slv} = 1.4 \times 10^{-7} \text{ N}$.设液滴作用在微梁的中心位置,微梁的尺寸和材料参数参见表 1.

表 1 EPS 微梁的材料参数与几何参数

Table 1 Material and geometric parameters of the EPS micro-beam

l/mm	E/MPa	d/mm	h/mm	I/mm^4
5	1.8	1	0.05	1/96 000

Winkler 模型参数取为 $k = 1 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^3$ 时,水滴铺展半径 $R = 0.01 \text{ mm}$.根据式(19),可得到 $f(l_1)$ 随 l_1 的变化情况,如图 4 所示.在图 4 中,有极值点 $x = 0.82 \text{ mm}$, f 的数量级为 10^{-7} ,这可能是由计算误差导致的,可以认为此时的 f 趋于 0,即在 $x = 0.82 \text{ mm}$ 处,微梁的右端脱离了弹性基底.

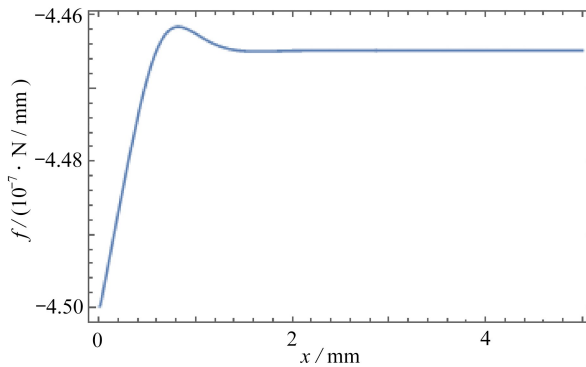


图 4 液滴半径 $R = 0.01 \text{ mm}$, $0 \sim l_1$ 段梁所受合力 $f(l_1)$

Fig. 4 For droplet radius $R = 0.01 \text{ mm}$, resultant force $f(l_1)$ of the beam in the $0 \sim l_1$ section

在确定 l_1 后,即可由式(15)—(18)计算得到微梁的挠度曲线,如图 5 所示.区别于半无限大固体受液滴润湿诱导变形^[17],没有出现“脊”的形状,这与理论分析是一致的.由式(2)可以看出,梁 $0 \sim R$ 段由液滴和基底共同作用,此时液滴对梁的毛细力为常数,体现为纯压力,如在梁 $R \sim l_1$ 段只有基底反力作用,而 $l_1 \sim l$ 段无作用力,故此段无弯曲变形,但因 $0 \sim l_1$ 段的弯曲而产生刚性旋转.因此, $l_1 \sim l$ 段越长,梁末端偏转就越大.

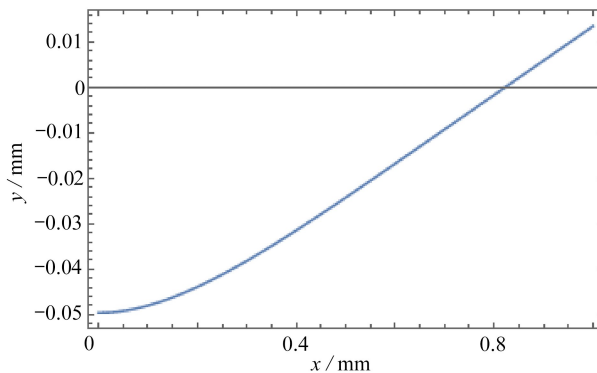


图 5 微梁的挠度曲线

Fig. 5 The deflection curve of the micro-beam

3.2 液滴大小对微梁挠度曲线的影响

根据式(15),微梁的挠度受液滴尺寸影响,取不同的铺展半径 R ,即改变微梁上液滴的大小能够得到不同的挠度曲线,如图 6—8 所示.

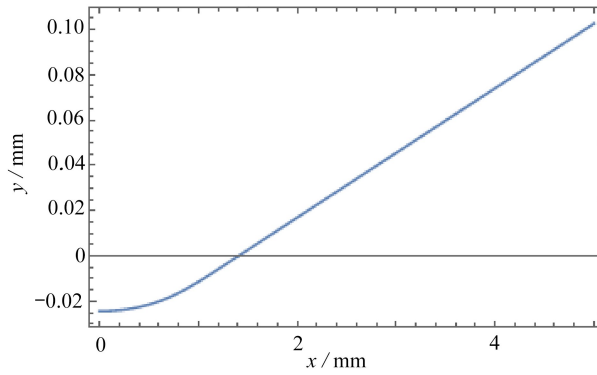


图 6 半径为 1 mm 的液滴润湿导致的微梁弯曲

Fig. 6 The deflection curve of the micro-beam wetted by a droplet with a radius of 1 mm

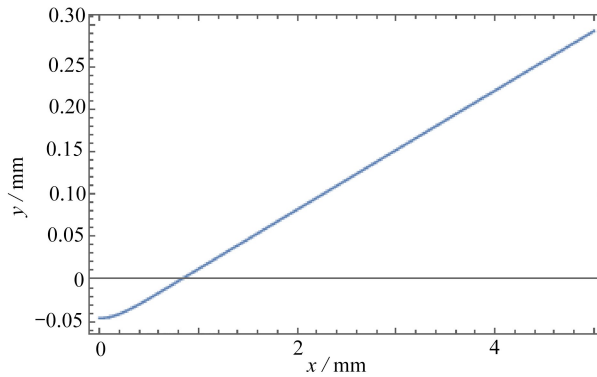


图 7 半径为 0.1 mm 的液滴润湿导致的微梁弯曲

Fig. 7 The deflection curve of the micro-beam wetted by a droplet with a radius of 0.1 mm

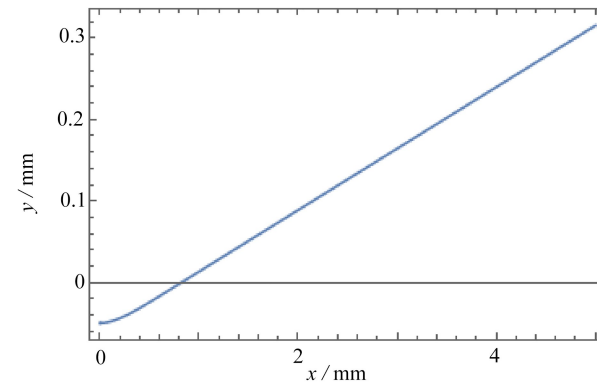


图 8 半径为 0.01 mm 的液滴润湿导致的微梁弯曲

Fig. 8 The deflection curve of the micro-beam wetted by a droplet with a radius of 0.01 mm

从图 6—8 中可以看出,在不同大小的液滴诱导下微梁的变形模式相同,但液滴越小,微梁的最大挠度越大,与基底黏附的长度也越小,微梁两侧越容易脱黏.其原因在于液滴半径越小,液滴表面的平均曲率越大,导致了式(3)右端的作用力增大.表 2 给出了三种不同半径的液滴对应的微梁最大挠度及黏附长度.

表 2 微梁最大挠度及黏附长度与液滴半径的对应关系

Table 2 Maximum deflections and adhesive lengths of the micro-beam vs. droplet radii

parameter	R / mm		
	1	0.1	0.01
$y(0) / \text{mm}$	0.024 2	0.046 2	0.049 6
l_1 / mm	1.4	0.83	0.82

3.3 弹性毛细性能对微梁挠度曲线的影响

为了解微梁的材料性能对挠度曲线的影响,我们分别计算聚乙烯(PE)和EPS微梁在 $R = 0.01 \text{ mm}$ 液滴作用下的挠度曲线. PE弹性模量在 $150 \sim 250 \text{ MPa}$ 范围内,取 $E = 180 \text{ MPa}$,其固液界面张力 $\gamma_{sl} = 6.8 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$,三相线张力 $\gamma_{slv} = (9 \pm 32) \times 10^{-9} \text{ N}^{[22]}$,取 $\gamma_{slv} = 4 \times 10^{-8} \text{ N}$.

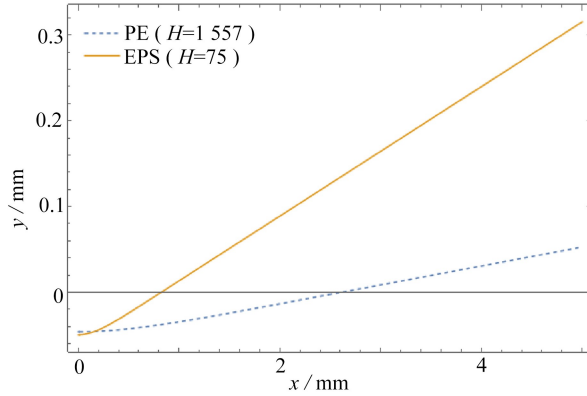
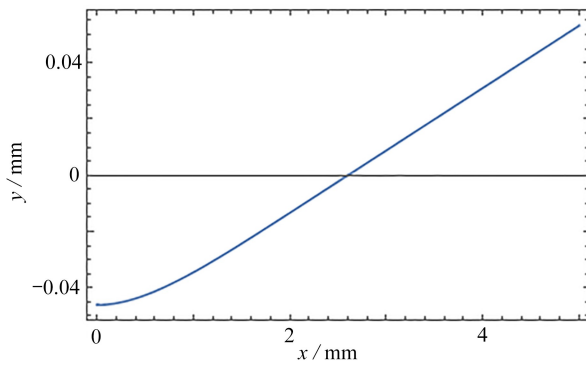


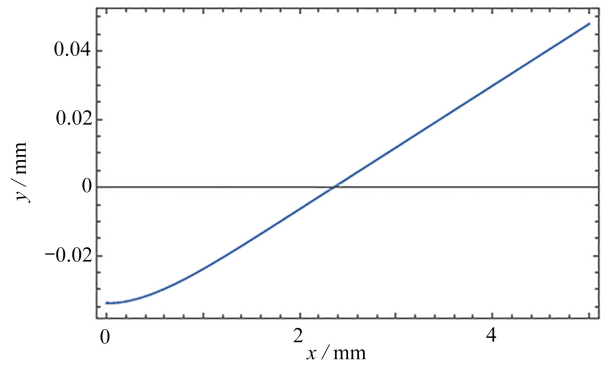
图9 PE和EPS微梁在半径为 0.01 mm 液滴作用下的弹性毛细弯曲

Fig. 9 Elastocapillary bending of PE and EPS microbeams subjected to droplet action with a radius of 0.01 mm

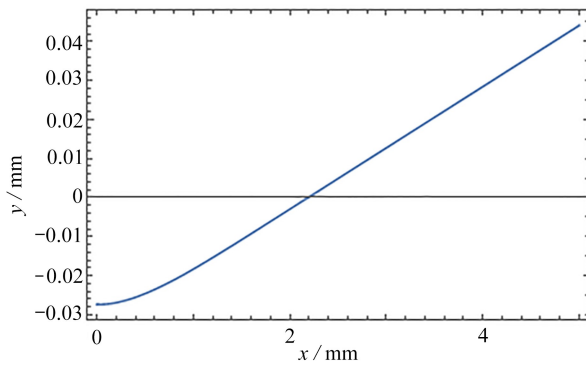
图9展示了由同样大小的液滴引起的PE和EPS微梁的弹性毛细弯曲.由于PE和EPS的弹性模量、两者与水的界面张力、三相线张力都不同,我们利用这三个参数定义一个无量纲因子 $H = \gamma_{slv} E / \gamma_{sl}^2$ 来表征固体/液滴体系的弹性毛细性能.计算发现, H 因子越大,微梁与基底的黏附长度越大,但最大挠度几乎不变,如图9所示.



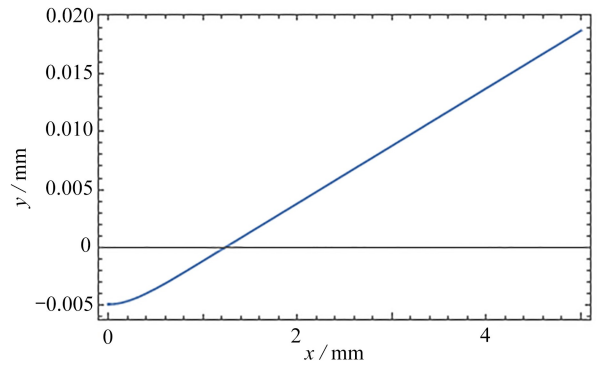
(a) $k_1 = 1 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^3$



(b) $k_2 = 1.5 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^3$



(c) $k_3 = 2 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^3$



(d) $k_4 = 2 \times 10^{-2} \text{ N/mm}^3$

图10 不同弹性基底上的液滴引起的微梁的弯曲变形($R=0.01 \text{ mm}$)

Fig. 10 Deflection curves of microbeams caused by droplets on different elastic substrates ($R=0.01 \text{ mm}$)

当基底的软硬程度不同时,微梁在基底上发生弹性毛细变形的程度也将不同.图 10 给出了微梁挠度随基床系数的变化.从图中可以看出,梁在不同基床系数的基底上的弯曲形式大致相同:在液滴中心处梁挠度最大,在逐渐远离液滴的位置向上偏转,然后脱离基底.表 3 列出了图 10(a)—10(d)中对应的最大挠度 $y(0)$ 与黏附长度 l_1 . 容易发现,最大挠度与黏附长度随着基床系数的增加而减小,这意味着在硬基底上微梁更容易脱黏.

表 3 微梁的最大挠度及黏附长度随基床系数的变化

Table 3 Maximum deflections and adhesive lengths of the micro-beam vs. the bedding coefficient

parameter	$k / (10^{-3} \cdot \text{N}/\text{mm}^3)$			
	1	1.5	2	20
$y(0) / \text{mm}$	0.046 1	0.034 0	0.027 4	0.004 9
l_1 / mm	2.60	2.35	2.19	1.23

4 小 结

本文基于新的润湿方程,建立了弹性基底上软物质梁的弹性毛细变形模型,进而获得了解析解,确定了在无重力条件下浸润液滴保持为球冠的临界尺寸,定义了表征固体/液滴体系的弹性毛细性能的无量纲因子,并分析了在弹性毛细力作用下软物质梁脱黏的条件与影响因素.计算发现:

1) 润湿时液滴铺展半径在一定范围内,才能保持球冠状,铺展半径的范围由液体表面张力、固液界面张力和三相线张力的平衡决定.

2) 放置在弹性基底上的梁因弹性毛细变形会脱离基底,其脱离基底的位置与液滴的大小和基底的基床系数都有关,也依赖无量纲因子 $\gamma_{slv} E / \gamma_{sl}^2$.

参考文献 (References):

- [1] FENG S L, DELANNOY J, MALOD A, et al. Tip-induced flipping of droplets on Janus pillars: from local reconfiguration to global transport[J]. *Science Advances*, 2020, **6**(28): eabb4540.
- [2] 余迎松. 液气界面张力垂直分量引起的基底弹性变形[J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(9): 1025-1042. (YU Ying-song. Substrate elastic deformation due to vertical component of liquid-vapor interfacial tension[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(9): 1025-1042. (in Chinese))
- [3] LESTER G R. Contact angles of liquids at deformable solid surfaces[J]. *Journal of Colloid Science*, 1961, **16**(4): 315-326.
- [4] RUSANOV A I. Theory of the wetting of elastically deformed bodies, 1: deformation with a finite contact angle[J]. *Colloid Journal of the USSR*, 1975, **37**: 614-622.
- [5] FORTES M A. Deformation of solid surfaces due to capillary forces[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1984, **100**(1): 17-26.
- [6] STYLE R W, DUFRESNE E R. Static wetting on deformable substrates, from liquids to soft solids[J]. *Soft Matter*, 2012, **8**(27): 7177-7184.
- [7] STYLE R W, BOLTYANSKIY R, CHE Y L, et al. Universal deformation of soft substrates near a contact line and the direct measurement of solid surface stresses[J]. *Physical Review Letters*, 2013, **110**(6): 066103.
- [8] BOSTWICK J B, SHEARER M, DANIELS K E. Elastocapillary deformations on partially-wetting substrates: rival contact-line models[J]. *Soft Matter*, 2014, **10**(37): 7361-7369.
- [9] KERN R, MÜLLER P. Deformation of an elastic thin solid induced by a liquid droplet[J]. *Surface Science*, 1992, **264**(3): 467-494.
- [10] OLIVES J. Capillarity and elasticity. The example of the thin plate[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1993, **5**: 2081-2094.

- [11] LIU J L, NIE Z X, JIANG W G. Deformation field of the soft substrate induced by capillary force[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2009, **404**(8/11): 1195-1199.
- [12] LIU J L, XIA R, MEI Y, et al. Droplet-induced abnormal bending of micro-beams[J]. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2013, **27**(13): 1418-1431.
- [13] 陶泽, 李墨筱, 提飞, 等. 充液弹性毛细管低温相变的力学分析[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(10): 1045-1061. (TAO Ze, LI Moxiao, TI Fei, et al. Mechanics of low-temperature phase transition in liquid-filled elastic capillary tubes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(10): 1045-1061. (in Chinese))
- [14] YU Y S, ZHAO Y P. Deformation of PDMS membrane and microcantilever by a water droplet: comparison between Mooney-Rivlin and linear elastic constitutive models[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2009, **332**(2): 467-476.
- [15] LIU J L, XIA R, ZHOU X H. A new look on wetting models: continuum analysis[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2012, **55**(11): 2158-2166.
- [16] HUANG Z X. New equations of wetting[J]. *Philosophical Magazine Letters*, 2020, **100**(4): 181-188.
- [17] HUANG Z X. Formulation and a new solving approach to the problem of the wetting-induced deformation[J]. *Philosophical Magazine*, 2021, **101**(24): 2560-2583.
- [18] DRELICH J. The significance and magnitude of the line tension in three-phase (solid-liquid-fluid) systems[J]. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 1996, **116**(1/2): 43-54.
- [19] OKUBO T. Surface tension of structured colloidal suspensions of polystyrene and silica spheres at the air-water interface[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1995, **171**(1): 55-62.
- [20] VERA-GRAZIANO R, MUHL S, RIVERA-TORRES F. The effect of illumination on contact angles of pure water on crystalline silicon[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1995, **170**(2): 591-597.
- [21] DRELICH J, MILLER J D. The line/pseudo-line tension in three-phase systems[J]. *Particulate Science and Technology*, 1992, **10**(1): 1-20.
- [22] DRELICH J, MILLER J D. The effect of solid surface heterogeneity and roughness on the contact angle/drop (bubble) size relationship[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1994, **164**(1): 252-259.