ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887
http://www.applmathmech.cn

钱伟长讲座及学术交流会特邀论文

非饱和土干缩开裂分析的近场动力学模拟*

刘攀勇，　顾　鑫，　章　青

（河海大学 力学与工程科学学院，南京 211100）

（我刊编委章青来稿）

摘要： 非饱和土失水收缩变形是一种水力耦合现象,其诱发的开裂问题严重削弱了土体的水力和力学特性,造成各种潜在的自然灾害.相对于饱和土体,非饱和土的失水收缩机制更为复杂,受到广泛关注.为此,提出了一种考虑水-力耦合作用效应的键型近场动力学(PD)模型,探究由于水分变化引起的非饱和土体变形开裂特征.在该模型中,非饱和土扩散方程由近场动力学微分算子进行重构,键型近场动力学运动方程采用改进的微弹性模量.然后提出了一种显-隐式混合算法,扩散方程采用显式差分格式求解,运动方程采用隐式整体格式求解,有效避免了两类方程在同一显式格式下时间步不协调的问题.通过非饱和土块干燥收缩变形和三维土盘干燥开裂的算例分析,验证了模型和算法的有效性.研究结果表明,所建立的模型和算法能较好地捕捉非饱和土失水收缩开裂的过程.

关　键　词： 非饱和土；　水-力耦合；　干缩开裂；　近场动力学

中图分类号： P642.3　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.450002

Peridynamics for Moisture Diffusion and Crack Propagation in Unsaturated Soil Desiccation

LIU Panyong,　GU Xin,　ZHANG Qing

(*College of Mechanics and Engineering Science*, *Hohai University*, *Nanjing* 211100, *P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Qing, M.AMM Editorial Board)

Abstract: Unsaturated soil desiccation cracking is a coupled hydro-mechanical problem. It seriously weakens the hydraulic and mechanical characteristics of soil, causing various natural disasters potentially. For the unsaturated soil, the mechanism of moisture diffusion and deformation is more complicated compared with saturated soil, attracting wide attention. Thus, a coupled hydro-mechanical bond-based peridynamic (BB PD) model was proposed to explore the moisture diffusion and crack propagation in unsaturated soil. Specifically, the moisture diffusion equation for unsaturated soil was recast with the peridynamic differential operator, and an improved micro-modulus was adopted to revise the bond force density in the BB PD. In addition, a hybrid algorithm com-

* **收稿日期：** 2024-01-02；**修订日期：** 2024-03-11

基金项目： 国家自然科学基金(12172121;12002118;11932006);湖南省水利科技项目(XSKJ2023059-16);上海市青年科技英才扬帆计划(21YF1419000)

作者简介： 刘攀勇(1995—),男,博士(E-mail: panyong_mechanics@163.com);
顾鑫(1991—),男,副教授(E-mail: xingu@hhu.edu.cn);
章青(1963—),男,教授(通讯作者. E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

引用格式： 刘攀勇, 顾鑫, 章青. 非饱和土干缩开裂分析的近场动力学模拟[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(7): 823-834.

bining the explicit difference scheme for solving the diffusion equation and the implicit scheme for solving the motion equation was adopted, to avoid the incongruity of time steps for two types equations under the same explicit scheme. The validity of the proposed model and algorithm was verified by the examples on the desiccation of an unsaturated soil block and the desiccation cracking of a 3D unsaturated soil plate. The results show the potential of peridynamics in capturing desiccation cracks of unsaturated soil.

Key words: unsaturated soil; hydro-mechanical coupling; desiccation cracking; peridynamics

0 引 言

随着全球气温的不断升高,越来越多的地区受到干旱或半干旱的影响,干燥裂缝普遍存在于这些地区的近地表土壤中(图 1).干燥裂缝的产生破坏了土体结构的完整性,影响了土壤的力学和水力行为,给农业工程、水利工程、环境工程和交通工程等许多工程领域带来了困扰,并受到了地质学、地球物理学和行星学等相关学科的广泛关注.在农业工程领域,土壤开裂加速了土壤水分的蒸发,并改变了雨水的渗流路径和营养物质的迁移规律,易导致土壤养分的流失,甚至会直接破坏农作物根系[1-2].在水利工程方面,干燥裂缝是导致边坡滑坡和泥石流的潜在因素之一[3-4];土石材料构筑的土石坝在出现裂缝后,其整体性能和稳定性会受到严重影响,从而诱发险情[2].在环境工程中,黏性土常被用于填埋场衬垫系统或作为核废料处置库的天然屏障,其开裂易导致污染物或核废料的泄露,留下环境安全隐患[5].对于交通工程,公路地基或路肩由于干旱会产生不同程度的收缩变形,甚至造成土壤开裂,引起地表水径流侵入公路地下土层,严重威胁交通运输安全[6-7].此外,干燥裂缝的形状和特征能够反映干旱程度和干燥过程,据此可追溯该地区的历史气候条件[8],Glennie 发现干燥裂缝的形态能成功保存在地下沉积岩中,对气候演化过程的研究具有重大意义[9].有趣的是,通过其他行星裂缝模式与地球土壤裂缝模式的对比,还可探知该行星的历史气候和矿物质成分,如 El-Maarry 等认为干燥裂缝的形态是识别火星上的古代盐湖环境的有效依据,对火星探索任务具有很高的地质和生物学意义[10].

图 1 地表土壤干燥裂缝

Fig. 1 Desiccation cracks of soil surface

数值模拟是研究土体干缩裂缝形成和发展的重要手段,常用的网格类方法有有限单元法[11-13]、扩展有限单元法[14-15]、内聚力有限单元法[16-19]和断裂相场法[20-21]等,这一类方法更多聚焦于裂纹的形成和扩展,对土壤失水收缩开裂的机制研究不足.无网格粒子类方法如光滑粒子动力学、分子动力学、晶格弹簧模型、物质点法、离散元法和近场动力学等在模拟土体大变形和裂纹扩展方面具有一定优势.光滑粒子动力学[22-24]和物质点法[25]更适合土体的大变形计算,对裂纹的捕捉效果并不理想;晶格弹簧模型[26-27]的裂纹形态对晶格形状和空间分布具有依赖性;分子动力学方法因尺寸限制常用来捕捉纳米尺度下黏土的开裂过程[28-29];离散元法被广泛用于土体的开裂分析[5,30-32],但一些参数具有人为性,对计算结果有较大影响.

近场动力学[33-35]能够考虑材料的非局部效应,方便处理结构的损伤演化和裂纹扩展等非连续变形特征,适用于求解多物理场耦合和多尺度问题.Jabakhanji 首次将近场动力学用于土体干缩开裂问题,建立了水-力耦合键型近场动力学模型[33].Menon 等进一步推广至态型近场动力学模型,但在计算中忽略了水分的传输过程[36].Yan 等和 Liu 等以 Fick 第二定律作为扩散方程的基础,重构了饱和土体的水-力耦合近场动力

学框架[37-38],但该模型没有考虑土体变形对扩散方程的影响,也不包括饱和度、基质吸力和孔隙率等土体的特性参数,并不适用于非饱和土体的分析.本文针对以上不足建立了非饱和土体完全水-力耦合的近场动力学模型,提出了相应的显式-隐式混合算法,成功捕捉了三维土盘干燥开裂的全过程.

1　水-力耦合问题的近场动力学模型

1.1　非饱和土的水分扩散方程及其近场动力学形式

基于多孔介质力学水分流动的质量守恒原理,可以导出考虑土体变形效应的非饱和土方程为[39-40]

$$\left(\frac{\partial S_{\mathrm{w}}}{\partial p}+\frac{S_{\mathrm{w}}}{\phi M}\right)\phi\frac{\partial p}{\partial t}+S_{\mathrm{w}}b\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t}=\nabla\cdot\left[\frac{k_{\mathrm{r}}(S_{\mathrm{w}})k}{\mu}(\nabla p+\rho g\boldsymbol{n}_z)\right],\tag{1}$$

式中, S_{w} 为饱和度; p 为孔隙水压力; ϕ 为孔隙率; M 为 Biot 模量,可由 Biot 骨架模量 N 与土体的体积模量 K 表示, $1/M=1/N+\phi_0/K$, ϕ_0 是初始孔隙率, Biot 骨架模量 N 由骨架体积模量 K_{s} 和 Biot 系数 b 给出, $N=K_{\mathrm{s}}/(b-\phi_0)$; ∇ 为 Hamilton 算子, $k_{\mathrm{r}}(S_{\mathrm{w}})$, k 和 μ 分别为相对渗透率、绝对渗透率和水的动力黏度, $k_{\mathrm{r}}(S_{\mathrm{w}})k$ 为水分的有效渗透率; ρg 为水的容重; $\boldsymbol{n}_z$ 表示重力方向的单位矢量; $\partial\varepsilon_{\mathrm{v}}/\partial t$ 为体积应变率,反映了土体变形的影响.

式(1)的基本未知函数是孔隙水压力,在非饱和土体中,孔隙水压力与基质吸力 s_{u} 密切相关,基质吸力为空气压力和孔隙水压力的差,当空气压力设为 0 时,基质吸力等于负的孔隙水压力,即 $s_{\mathrm{u}}=-p$.基质吸力与土体含水量的关系可以根据 Van Genuchten 提出的土水特征曲线[41]确定,即

$$\theta=\theta_{\mathrm{r}}+\frac{\theta_{\mathrm{s}}-\theta_{\mathrm{r}}}{(1+(as_{\mathrm{u}})^n)^m},\tag{2}$$

式中, θ_{r} 为残余含水量, θ_{s} 为饱和含水量; a, n 和 m 为 Van Genuchten 参数,可通过实验给定.将饱和度与含水量间的关系 $\theta=\phi S_{\mathrm{w}}$、式(2)均代入式(1),并假设孔隙率与空间坐标位置无关,可以得到用含水量作为未知函数的非饱和土水分扩散方程:

$$\left(L(\theta)+\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{1}{M}-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\varphi(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\theta b}{\phi}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t}=\nabla\cdot\left[\frac{k_{\mathrm{r}}(\theta)k}{\mu}(\varphi(\theta)\nabla\theta+\rho g\boldsymbol{n}_z)\right],\tag{3}$$

式中, $L(\theta)$ 和 $\varphi(\theta)$ 为水分含量的函数,具体为

$$L(\theta)=\frac{mna^n s_{\mathrm{u}}^{n-1}\theta}{1+(as_{\mathrm{u}})^n},\ \varphi(\theta)=\frac{1}{amn}\frac{(\theta_{\mathrm{e}}-1)^{(1/n)-1}\theta_{\mathrm{e}}}{\theta-\theta_{\mathrm{r}}},\tag{4}$$

其中, $\theta_{\mathrm{e}}=[(\theta_{\mathrm{s}}-\theta_{\mathrm{r}})/(\theta-\theta_{\mathrm{r}})]^{1/m}$, s_{u} 可通过式(2)表示为 θ 的函数.

式(3)等号右端的散度项可展开为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left[\frac{k_{\mathrm{r}}(\theta)k}{\mu}(\varphi(\theta)\nabla\theta+\rho g\boldsymbol{n}_z)\right]=\\&\quad\psi(\theta)\nabla^2\theta+\nabla\psi(\theta)\cdot\nabla\theta+\rho g\hat{k}(\theta)\nabla\cdot\boldsymbol{n}_z+\rho g\nabla\hat{k}(\theta)\cdot\boldsymbol{n}_z,\end{aligned}\tag{5}$$

式中, $\psi(\theta)=\hat{k}(\theta)\varphi(\theta)$, $\hat{k}(\theta)=kk_{\mathrm{r}}(\theta)/\mu$.

注意到水分含量是粒子坐标位置和时间的函数,根据近场动力学微分算子[42],可将式(5)中的微分项表示成积分项,得到

$$\nabla^2\theta(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\theta(\boldsymbol{x}',t)-\theta(\boldsymbol{x},t))\operatorname{tr}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'},\tag{6}$$

$$\nabla\theta=\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\theta(\boldsymbol{x}',t)-\theta(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'},\tag{7}$$

$$\nabla\psi(\theta)=\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\psi(\boldsymbol{x}',t)-\psi(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'},\tag{8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{n}_z=0,\tag{9}$$

$$\nabla\hat{k}(\theta)\cdot\boldsymbol{n}_z=\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\hat{k}(\boldsymbol{x}',t)-\hat{k}(\boldsymbol{x},t))g^{001}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}.\tag{10}$$

于是,可以将式(3)所示的水分扩散方程表示成近场动力学的形式:

$$\left(L(\theta)+\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{1}{M}-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right)\varphi(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\theta b}{\phi}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t}=\psi(\theta)\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\theta(\boldsymbol{x}',t)-\theta(\boldsymbol{x},t))\operatorname{tr}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}+$$
$$\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\psi(\boldsymbol{x}',t)-\psi(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}\cdot\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\theta(\boldsymbol{x}',t)-\theta(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}+$$
$$\rho(\boldsymbol{x})g\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(\hat{k}(\boldsymbol{x}',t)-\hat{k}(\boldsymbol{x},t))g^{001}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'},\tag{11}$$

式中,$\boldsymbol{x}'$ 是物质点 $\boldsymbol{x}$ 近场域 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ 范围内的其他点,其间的距离矢量由 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$ 表示,$V_{\boldsymbol{x}'}$ 为物质点的体积,标量 $g^{001}(\boldsymbol{\xi})$、矢量 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})$ 和矩阵 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 由近场动力学函数构成[43].

1.2 近场动力学水-力耦合运动方程

键型近场动力学水-力耦合运动方程为[38]

$$\rho(\boldsymbol{x},t)\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)c(s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)-\alpha\Delta\bar{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t))\boldsymbol{n}\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t),\tag{12}$$

式中,$\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ 为加速度;$\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 为损伤函数;c 为近场动力学微弹性模量;$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 为键的伸长率;α 为收缩系数,$\Delta\bar{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 为两物质点间的平均含水量的变化量,以反映物体水分含量的变化对键变形的影响,可表示成 $\Delta\bar{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=[\theta(\boldsymbol{x},t)+\theta(\boldsymbol{x}',t)]/2-[\theta(\boldsymbol{x},0)+\theta(\boldsymbol{x}',0)]/2$,其中 $\theta(\boldsymbol{x},0)$ 和 $\theta(\boldsymbol{x}',0)$ 分别是两物质点的初始含水量.

为反映物质点间相互作用力随空间距离增加而衰减的效应,采用微弹性模量函数 $c(\boldsymbol{\xi},\delta)$[44] 替代式(12)中的常微弹性模量 c,得到

$$c(\boldsymbol{\xi},\delta)=\begin{cases}\left(1-\left(\dfrac{|\boldsymbol{\xi}|}{\delta}\right)^2\right)^2\cdot\dfrac{36E}{\pi\delta^4(1-2\mu)}, & \text{3D},\\[2ex] \left(1-\left(\dfrac{|\boldsymbol{\xi}|}{\delta}\right)^2\right)^2\cdot\dfrac{105E}{4\pi h\delta^3(1+\mu)(1-2\mu)}, & \text{plane strain},\\[2ex] \left(1-\left(\dfrac{|\boldsymbol{\xi}|}{\delta}\right)^2\right)^2\cdot\dfrac{105E}{4\pi h\delta^3(1-\mu)}, & \text{plane stress},\end{cases}\tag{13}$$

式中,δ 为球形或圆形近场域半径,E 为弹性模量,μ 为 Poisson 比,h 为二维问题物体的厚度.为了消除边界效应,边界处的微弹性模量函数可取[44]

$$c(\boldsymbol{\xi},\delta)_{\text{boundary}}=\begin{cases}\dfrac{6E(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2}{(1-2\mu)\displaystyle\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2|\boldsymbol{\xi}|\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}}, & \text{3D},\\[2ex] \dfrac{4E(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2}{(1+\mu)(1-2\mu)\displaystyle\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2|\boldsymbol{\xi}|\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}}, & \text{plane strain},\\[2ex] \dfrac{4E(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2}{(1-\mu)\displaystyle\int_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}}(1-(|\boldsymbol{\xi}|/\delta)^2)^2|\boldsymbol{\xi}|\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'}}, & \text{plane stress}.\end{cases}\tag{14}$$

式(13)和式(14)中,Poisson 比 μ 针对三维问题和平面应变问题为固定值 0.25,平面应力问题为固定值 1/3.式(11)和式(12)便构成了非饱和土体水-力耦合问题的基本方程,结合适当的边界条件,进行空间离散和时间离散后,可以求得各时刻土体的水分含量和变形,进而进行土体开裂演化分析.

2 显-隐式混合算法

对于水-力耦合准静态问题,在显式动力学求解框架下,运动方程的时间步长一般在10^{-5} s 以下,以满足稳定性和收敛性要求.而土体的水分蒸发扩散过程极为缓慢,造成开裂现象往往要经历 20 h 以上,致使运动方程的求解至少要循环几十亿次.添加人工阻尼可以加快运动方程的收敛,减少循环求解的次数,然而不适当的人工阻尼选取可能会使解产生较大偏移,且人工阻尼的存在会限制裂纹的产生和发展,使计算结果失

真.为此,本文构建了求解土体水-力耦合问题的显-隐式混合算法,即采用显式格式计算水分扩散方程,采用隐式格式计算运动方程,时间步长均可在 0.1 s 以上,大大降低了计算负担.

采用正交均匀离散格式进行空间离散,基于显式向前 Euler 差分法进行时间导数的离散,以构造水分扩散方程(11)的求解格式,可表示为

$$\begin{aligned}&\left(L(\theta_i^n)+\frac{\theta_i^n}{\phi^n}\left(\frac{1}{M}-\frac{\phi^n-\phi^{n-1}}{p^n-p^{n-1}}\right)\right)\varphi(\theta_i^n)\frac{\theta_i^{n+1}-\theta_i^n}{\Delta t}+\frac{\theta_i^n b}{\phi^n}\frac{\varepsilon_{vi}^n-\varepsilon_{vi}^{n-1}}{\Delta t}=\\&\psi(\theta_i^n)\sum_{j=1}^{N_i}\mu(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)(\theta^n(\boldsymbol{x}_j,t)-\theta^n(\boldsymbol{x}_i,t))(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}))V_j+\\&\sum_{j=1}^{N_i}\mu(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)(\psi^n(\boldsymbol{x}_j,t)-\psi^n(\boldsymbol{x}_i,t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})V_j\cdot\sum_{j=1}^{N_i}\mu(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)(\theta^n(\boldsymbol{x}_j,t)-\theta^n(\boldsymbol{x}_i,t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})V_j+\\&\rho(\boldsymbol{x}_i)g\sum_{j=1}^{N_i}\mu(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)(\hat{k}^n(\boldsymbol{x}_j,t)-\hat{k}^n(\boldsymbol{x}_i,t))g^{001}(\boldsymbol{\xi})V_j,\end{aligned}\tag{15}$$

式中,下标 i 和 j 表示物质点编号;上标 $n-1$,n 和 $n+1$ 表示时间步;N_i 为 i 粒子近场域内其他粒子的总数.

根据式(12)构建运动方程的矩阵形式:

$$\boldsymbol{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B},\tag{16}$$

式中,$\boldsymbol{\rho}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 分别为密度矩阵和加速度列向量,对于准静态问题,$\boldsymbol{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{u}$ 为位移列向量,$\boldsymbol{u}=[u_{ix},u_{iy},u_{iz},u_{jx},u_{jy},u_{jz}]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{B}$ 为外荷载列向量,$\boldsymbol{r}$ 为两物质点间的刚度矩阵,可导出为[38,45]

$$\boldsymbol{r}=\frac{c(\boldsymbol{\xi},\delta)V_iV_j}{|\boldsymbol{\xi}|}\begin{bmatrix}l^2&&&&&\\lm&m^2&&\mathrm{sym}&&\\ln&mn&n^2&&&\\-l^2&-lm&-ln&l^2&&\\-lm&-m^2&-mn&lm&m^2&\\-ln&-n^2&-n^2&ln&mn&n^2\end{bmatrix}.\tag{17}$$

根据式(16)组装全部物质点的矩阵方程,并通过 Lagrange 乘子法引入边界条件[38],可得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}&\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}\\\boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{all}}\\\boldsymbol{U}_*\end{Bmatrix},\tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{R}$ 为由式(17)组装成的全部物质点刚度矩阵,$\boldsymbol{G}$ 为已知系数矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为全部物质点的位移列向量,$\boldsymbol{\lambda}$ 为 Lagrange 乘子,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{all}}$ 为全部物质点的外荷载列向量,$\boldsymbol{U}_*$ 为已知边界条件.

求得各时刻土体的水分含量和变形后,便可依据物质点近场域内键的失效率判断其损伤特征.当物质点间键的拉伸率 $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 超过临界拉伸率 s_0 时,键便会失效,此时损伤函数 $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 为 0;键未失效时,其值为 1.物质点的局部损伤可定义为

$$\Omega(\boldsymbol{x}_i,t)=1-\frac{\sum_{j=1}^{N_i}\mu(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j,t)V_{\boldsymbol{x}_j}}{\sum_{j=1}^{N_i}V_{\boldsymbol{x}_j}}.\tag{19}$$

局部损伤是物体内部可能形成裂纹的一个指标.初始时, 物质点与其近场域内所有其他物质点都存在相互作用, 局部损伤为 0; 裂纹生成时, 裂纹表面物质点近场域内有接近一半的键失效, 此时局部损伤的值约为 0.5.

3　数值算例与分析

3.1　二维土块的干燥收缩分析

考虑图 2 所示的黏性土块,尺寸为 100 mm×100 mm,设定为平面应变问题.限制土块左、右和下侧面的法

向位移，假设水分从上表面蒸发，蒸发速率为 0.002%/s，研究土块水分蒸发引起的收缩问题.土块的密度为 1 300 kg/m^3，弹性模量为 $E = 0.1$ MPa，收缩系数为 $\alpha = 0.02$，渗透系数为 $k/\mu = 1.0 \times 10^{-4}$ m/s，Poisson 比取 0.25，初始水分含量为 40%.

扩散方程式(11)的部分参数分别取[46]：$a = 1.0\ \mathrm{m}^{-1}$，$\theta_r = 0$，$\theta_s = 0.5$，$\phi_0 = 0.4$，$m = 0.5$，$n = 2$，$k_r(\theta) = 1$，假设流体和固体骨架都不可压缩，则 $b = 1$，$1/M = 0$，孔隙率变化仅与体应变有关.式(11)中的 $\psi(\theta)$ 为[41]

$$\psi(\theta) = \frac{(1-m)k}{\mu a m \theta_s} \cdot \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{0.5-1/m} \cdot \left[\left(1-\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{1/m}\right)^{-m} + \left(1-\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{1/m}\right)^{m} - 2\right]. \tag{20}$$

在近场动力学的计算中，物质点尺寸取 $\Delta x = 1$ mm，近场域 $\delta = 3\Delta x$，总计算时间设为 10 000 s，时间步长为 1 s.图 3 给出了计算完成后土块水分含量和竖向位移的云图.为了验证计算结果的准确性，分别选择土块上表面、中面和下底面的中间点 a，b 和 c（图 2），将这 3 个点的水分含量和位移结果与方程(3)的有限差分法(FDM)解进行对比，如图 4 所示.从计算结果可以看出，土块的水分含量和竖向变形符合客观认知，近场动力学解与 FDM 解吻合度很高，验证了本文提出的近场动力学模型和算法的准确性.

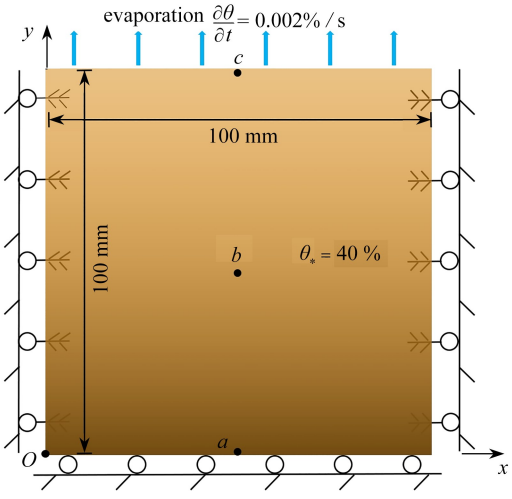
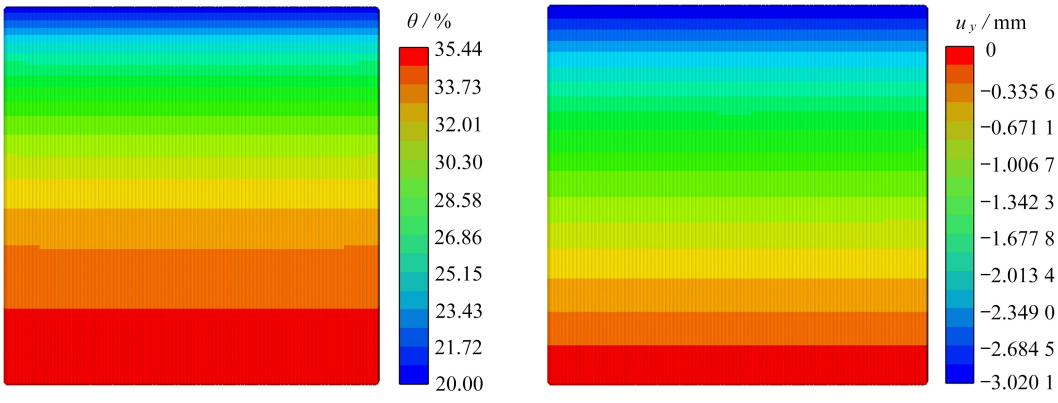


图 2 土块的几何模型和边界条件

Fig. 2 The geometric model and boundary conditions of the soil block



（a）水分含量

（a）The moisture content

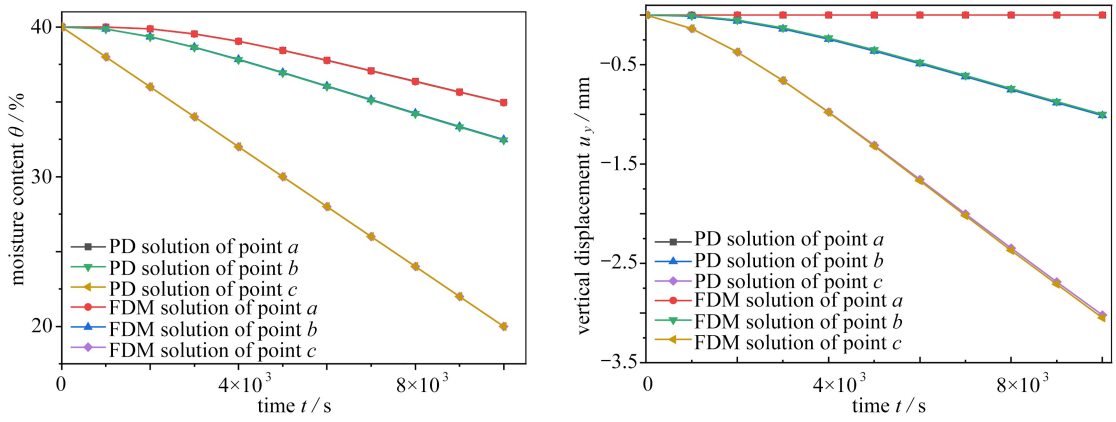
（b）垂直方向位移

（b）The vertical displacement

图 3 水分含量和竖向位移云图

Fig. 3 Contours of the moisture content and the vertical displacement

注 为了解释图中的颜色，读者可以参考本文的电子网页版本，后同.



(a) 水分含量　　(b) 垂直方向位移

(a) The moisture content　　(b) The vertical displacement

图 4　a,b 和 c 点水分含量和垂直方向位移近场动力学解与有限差分解

Fig. 4　Results comparison between the peridynamics and the finite difference method at points a, b and c

3.2　三维土盘的干缩开裂分析

图 5 所示为三维圆柱形土盘,半径 r = 60 mm, 厚度为 8 mm,土盘底面固定,柱面限制法向位移,土盘整体初始水分含量为 50%,饱和时水分含量为 60%,水分从上表面蒸发,蒸发速率为 0.004%/s,研究土盘水分蒸发引起的干缩开裂问题.土体密度为 1 300 kg/m^3,弹性模量为 E = 1 MPa, 收缩系数为 α = 0.1, Poisson 比取 0.25,饱和土的渗透系数为 k/μ = 8.64 × 10^{-4} m/d.断裂能释放率为 G = 1.8 N/m, 采用形状参数为 20 的 Weibull 分布反映断裂能非均质性,临界伸长率为 $s_0 = \sqrt{10G/(c(\boldsymbol{\xi},\delta)\pi\delta^5)}$ [38].其他土水特征参数参考 3.1 小节选取.

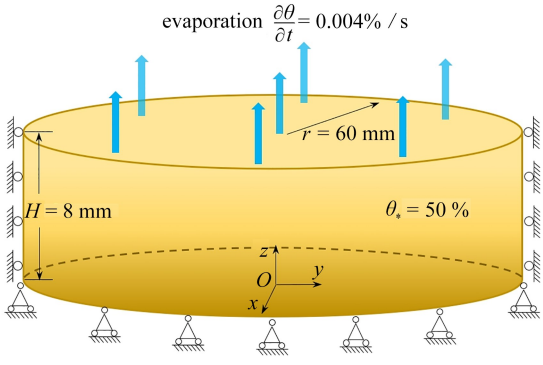


图 5　土盘几何模型与边界条件

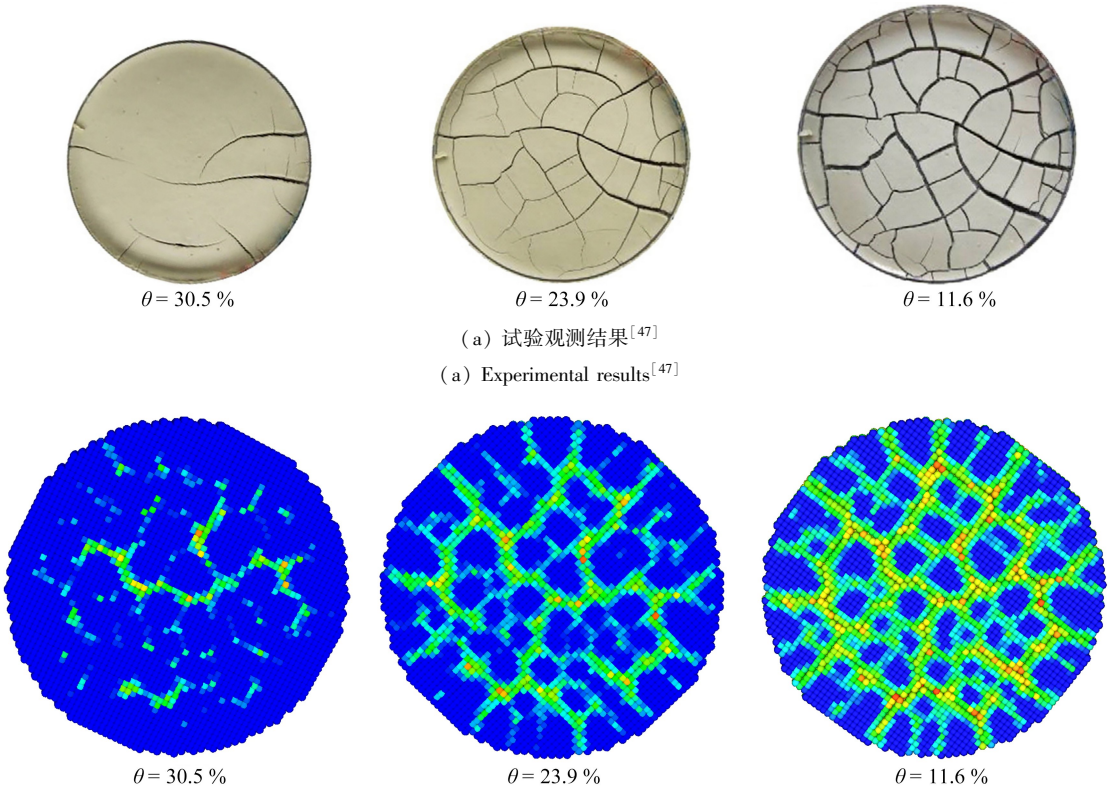
Fig. 5　The geometrical model and boundary conditions of the soil plate

在近场动力学计算中,离散后物质点尺寸 Δx = 2 mm, 近场域 $\delta = 3\Delta x$, 总计算时间取 10 000 s,时间步长为 1 s.图 6 给出了不同水分含量时土盘开裂状态与试验的对比结果[47].从图中可见:当水分含量在 30.5% 时,土盘表面出现一条近乎贯穿的主裂纹,在其周围分布部分细小裂纹;当水分含量降至 23.9%时,多条裂纹由主裂纹呈辐射状向边缘蔓延;当水分含量降至 11.6%时,裂纹形态发育成熟,土样被分割成许多小的规则多边形土块,土盘裂纹呈网状分布.从试验和模拟结果的对比情况来看,近场动力学对三维土盘网状裂纹的模拟初具成效,显现出其在土体干缩开裂问题分析中的潜力.

为了分析土盘的水分演化情况,选择土盘 H = 4 mm 处的中间截面,监测其平均水分含量随时间的变化关系,结果如图 7 所示.图中结果表明,水分含量随着时间近似呈线性变化,与膨胀土干燥实验[2]得到的水分含量随时间的变化规律基本一致.但在低含水量时,实验中出现的土体含水量变化速率减小的“降速率阶段”在计算中并未体现,其原因可能是本文假设的水分蒸发条件为线性均匀所致.

图 8 进一步给出了不同时刻含水量随深度的变化关系.从图中结果可以看出,随着深度的增加,水分含量曲线的斜率逐渐增加,水分分布沿深度呈现非线性分布,表明底层土体水分的迁移速率慢于表层土体.水

分更多积聚于土层深处,在张映梅[48]针对非饱和黄土水分分布的研究中,其含水量沿深度也有着类似的分布特征.这个结果在一定程度上可以解释,现实中虽然土层深处富含水分,而土体表面仍然会出现干燥裂缝的现象.种植植被是解决这一问题的有效措施,植被的根系除了加固土壤,还能将土体深层的水分运移至土体表层,使水分分布更加均匀,土体表面不易起裂.



(a) 试验观测结果[47]

(a) Experimental results[47]

(b) 近场动力学预测结果

(b) Peridynamic results

图 6 三维土盘干缩裂纹演化

Fig. 6 Honeycomb crack evolution in the 3D soil plate

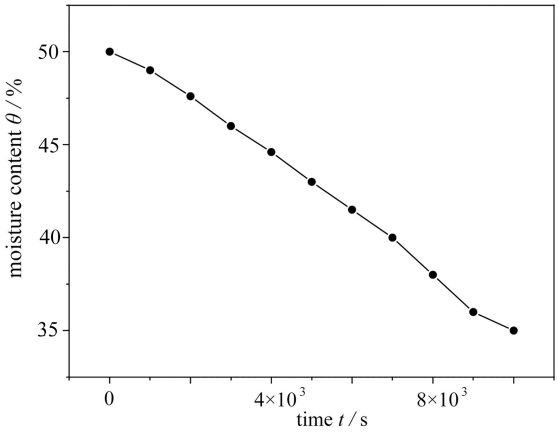


图 7 H = 4 mm 截面含水量随时间变化

Fig. 7 Moisture content changes with time at the section of H = 4 mm

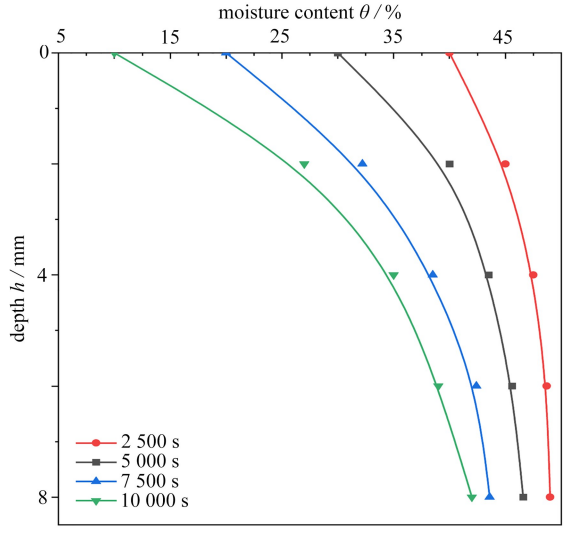
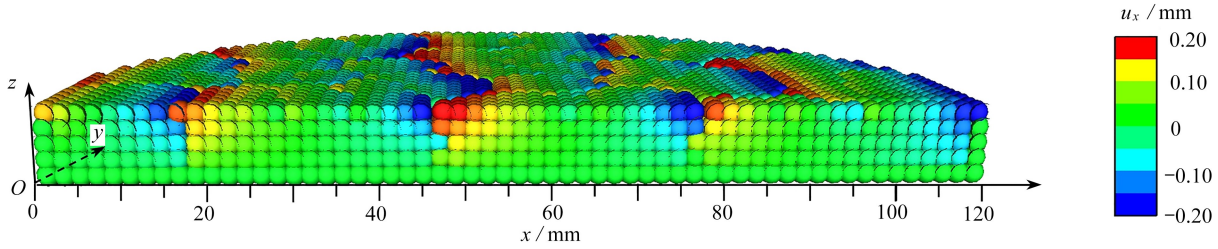


图 8 不同时刻水分含量随深度变化

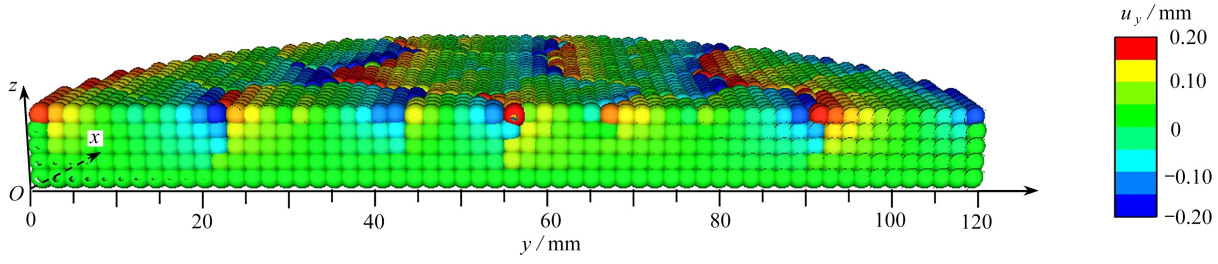
Fig. 8 Moisture content changes with the depth at different moments

图 9 分别给出了含水量 23.9%时土盘 x,y 和 z 方向位移分布的云图.从图中不难看出,土体在水平方向上整体呈现收缩趋势,土体颗粒在开裂位置分别向不同的方向移动;土层在竖向整体向下沉降,在开裂位置会出现部分土颗粒向上的运动趋势,其原因在于底层颗粒被约束,裂纹处的表层颗粒会给底层颗粒施加弯矩而产生向上的作用力,如图 9(c)所示,与土体裂纹处往往会产生卷曲的自然现象(图 1)相一致.



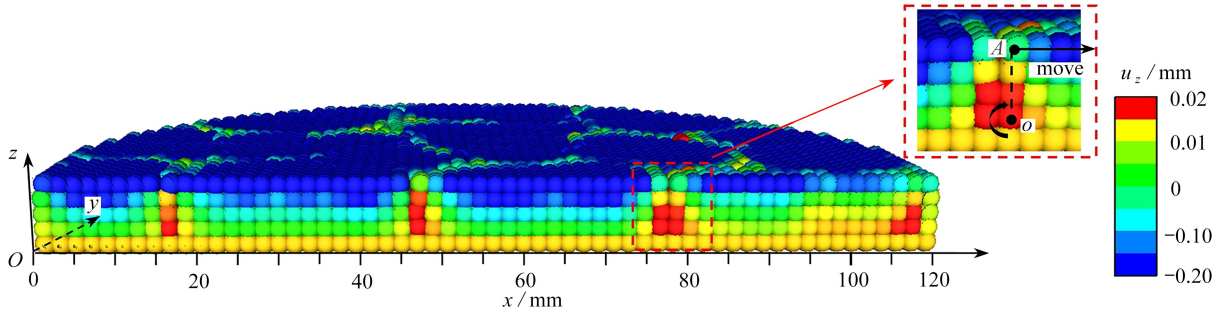
(a) x 方向位移

(a) Displacements in the x direction



(b) y 方向位移

(b) Displcaements in the y direction



(c) z 方向位移

(c) Displacements in the z direction

图 9　三维土盘位移云图

Fig. 9　Contours of displacements of the 3D soil plate

4　结　　语

本文建立了非饱和土干缩开裂分析的近场动力学水-力耦合模型,提出了一种显-隐式混合算法.计算模型包含了基质吸力、饱和度、孔隙率和 Biot 模量等土体参数,能够较好地反映非饱和土的水分扩散和变形特征.非饱和土块干燥收缩变形和土盘干燥开裂的算例结果表明,所建立的模型和算法能较为准确地预测非饱和土的水分演化规律和复杂的裂纹扩展模式,有望揭示非饱和土体干缩开裂的复杂机理.

需要指出,真实土体的水分蒸发受到太阳辐射、外界温度、风速和环境湿度等影响,本文假设的线性均匀蒸发条件与实际情况并不完全符合.此外,土体在水分蒸发条件下的收缩过程中将会产生塑性变形,并容易导致剪切破坏;土壤颗粒的分布特征、土体骨架的不均匀性、孔隙分布的随机性和土体中不同矿物质材料的不同力学特性对土体表面裂纹的形成和演化发展也有很大影响.需要进一步完善水分蒸发条件,构建考虑土

体非均质、各向异性的弹塑性本构模型,发展高效稳定的近场动力学算法,以便能更精准捕捉土体干缩裂纹的演化规律,揭示土体干缩开裂的力学机制,为土体的灾害防治提供借鉴.这方面的研究工作正在进行之中.

参考文献(References):

[1] BRONSWIJK J, HAMMINGA W, OOSTINDIE K. Field-scale solute transport in a heavy clay soil[J]. *Water Resources Research*, 1995, **31**(3): 517-526.

[2] 唐朝生, 施斌, 刘春. 膨胀土收缩开裂特性研究[J]. 工程地质学报, 2012, **20**(5): 663-673. (TANG Chaosheng, SHI Bin, LIU Chun. Study on desiccation cracking behaviour of expansive soil[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2012, **20**(5): 663-673. (in Chinese))

[3] YESILLER N, MILLER C, INCI G, et al. Desiccation and cracking behavior of three compacted landfill liner soils[J]. *Engineering Geology*, 2000, **57**(1/2): 105-121.

[4] BOIVIN P, GARNIER P, VAUCLIN M. Modeling the soil shrinkage and water retention curves with the same equations[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 2006, **70**(4): 1082-1093.

[5] 张晓宇, 许强, 刘春, 等. 黏性土失水开裂多场耦合离散元数值模拟[J]. 工程地质学报, 2017, **25**(6): 1430-1437. (ZHANG Xiaoyu, XU Qiang, LIU Chun, et al. Numerical simulation of drying cracking using multi-field coupling discrete element method[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2017, **25**(6): 1430-1437. (in Chinese))

[6] CHAKRABARTI S, KODIKARA J, PARDO L. An overview of stabilisation methods and performance of local government roads in Australia[C]//*International Symposium on Subgrade Stabilisation and In Situ Pavement Recycling Using Cement*. Salamanca, Spain, 2001.

[7] INTHARASOMBAT N, PUPPALA A J, WILLIAMMEE R. Compost amended soil treatment for mitigating highway shoulder desiccation cracks[J]. *Journal of Infrastructure Systems*, 2007, **13**(4): 287-298.

[8] TANG C S, ZHU C, CHENG Q, et al. Desiccation cracking of soils: a review of investigation approaches, underlying mechanisms, and influencing factors[J]. *Earth-Science Reviews*, 2021, **216**: 103586.

[9] GLENNIE K W. *Desert Sedimentary Environments*[M]. Elsevier Amsterdam, 2010.

[10] EL-MAARRY M R, WATTERS W, YOLDI Z, et al. Field investigation of dried lakes in western United States as an analogue to desiccation fractures on Mars[J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2015, **120**(12): 2241-2257.

[11] LEE F H, LO K W, LEE S L. Tension crack development in soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, **114**(8): 915-929.

[12] MORRIS P H, GRAHAM J, WILLIAMS D J. Cracking in drying soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1992, **29**(2): 263-277.

[13] KONRAD J M, AYAD R. A idealized framework for the analysis of cohesive soils undergoing desiccation[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, **34**(4): 477-488.

[14] CHENG W, BIAN H, HATTAB M, et al. Numerical modelling of desiccation shrinkage and cracking of soils [J]. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2023, **27**(12): 3525-3545.

[15] YU P, WANG X, YU J, et al. XFEM simulation of soil crack evolution process considering the stress concentration and redistribution at the crack tip[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2022, **22**(9): 04022137.

[16] VO T D, POUYA A, HEMMATI S, et al. Numerical modelling of desiccation cracking of clayey soil using a cohesive fracture method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2017, **85**: 15-27.

[17] POUYA A, VO T D, HEMMATI S, et al. Modeling soil desiccation cracking by analytical and numerical approaches[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, **43**(3): 738-763.

[18] SÁNCHEZ M, MANZOLI O L, GUIMARÃES L J. Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, **62**: 27-39.

[19] 吴艳青, 张克实. 利用内聚力模型(CZM)模拟弹粘塑性多晶体的裂纹扩展[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(4):

454-462. (WU Yanqing, ZHANG Keshi. Crack propagation in polycrystalline elastic-viscoplastic materials using cohesive zone models[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(4): 454-462. (in Chinese))

[20] MIEHE C, MAUTHE S. Crack driving forces in hydro-poro-elasticity and hydraulic fracturing of fluid-saturated porous media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **304**: 619-655.

[21] HU T, GUILLEMINOT J, DOLBOW J E. A phase-field model of fracture with frictionless contact and random fracture properties: application to thin-film fracture and soil desiccation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **368**: 113106.

[22] BUI H H, NGUYEN G D, KODIKARA J, et al. Soil cracking modelling using the mesh-free SPH method[C]// *12th Australia New Zealand Conference on Geomechanics*. New Zealand, Australia, 2015: 122-129.

[23] TRAN H T, WANG Y, NGUYEN G D, et al. Modelling 3D desiccation cracking in clayey soils using a size-dependent SPH computational approach[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **116**: 103209.

[24] TRAN T H. A coupled hydro-mechanical SPH framework to model desiccation cracking in clay soils [D]. Melbourne: Monash University, 2019.

[25] TU Z, PENG C, LI C, et al. MPM-driven dynamic desiccation cracking and curling in unsaturated soils[J]. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2023, **34**(3/4): e2172.

[26] VOGEL H J, HOFFMANN H, LEOPOLD A, et al. Studies of crack dynamics in clay soil, Ⅱ: a physically based model for crack formation[J]. *Geoderma*, 2005, **125**(3/4): 213-223.

[27] ZHU L, SHEN T, MA R, et al. Development of cracks in soil: an improved physical model[J]. *Geoderma*, 2020, **366**: 114258.

[28] JIA X, HAO Y, LI P, et al. Nanoscale deformation and crack processes of kaolinite under water impact using molecular dynamics simulations[J]. *Applied Clay Science*, 2021, **206**: 106071.

[29] ZHANG Z, SONG X. Molecular dynamics modeling of cracks in dry clay sheets at the nanoscale[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, **152**: 105037.

[30] 司马军, 蒋明镜, 周创兵. 黏性土干缩开裂过程离散元数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(S2): 286-291. (SIMA Jun, JIANG Mingjing, ZHOU Chuangbing. Numerical simulation of desiccation cracking of clay soils by DEM[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(S2): 286-291. (in Chinese))

[31] LIN Z Y, WANG Y S, TANG C S, et al. Discrete element modelling of desiccation cracking in thin clay layer under different basal boundary conditions[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **130**: 103931.

[32] 刘小飞, 游世辉, 谢纯凯. 基于复杂网络的黏性土颗粒边坡堆积体失稳研究[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(9): 931-942. (LIU Xiaofei, YOU Shihui, XIE Chunkai. Study on instability of clay granular slope piles based on complex network[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(9): 931-942. (in Chinese))

[33] JABAKHANJI R. Peridynamic modeling of coupled mechanical deformations and transient flow in unsaturated soils[D]. West Lafayette: Purdue University, 2013.

[34] TEE T Y. Methodology for integrated vapor pressure, hygroswelling, and thermo-mechanical stress modeling of IC packages[M]//*Moisture Sensitivity of Plastic Packages of IC Devices*. 2010: 221-243.

[35] 李天一, 章青, 夏晓舟, 等. 考虑混凝土材料非均质特性的近场动力学模型[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(8): 913-924. (LI Tianyi, ZHANG Qing, XIA Xiaozhou, et al. A peridynamic model for heterogeneous concrete materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(8): 913-924.(in Chinese))

[36] MENON S, SONG X. Coupled analysis of desiccation cracking in unsaturated soils through a non-local mathematical formulation[J]. *Geosciences*, 2019, **9**(10): 428.

[37] YAN H, JIVKOV A P, SEDIGHI M. Modelling soil desiccation cracking by peridynamics[J]. *Géotechnique*, 2023, **73**(5): 388-400.

[38] LIU P, GU X, LU Y, et al. Peridynamics for mechanism analysis of soil desiccation cracking: coupled hygro-mechanical model, staggered and monolithic solution[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, **406**: 115896.

[39] 王琳琳. 多孔介质力学[M]. 北京: 石油工业出版社, 2022.(WANG Linlin. *Mechanics of Porous Media*[M]. Beijing: Petron Industry Press, 2022. (in Chinese))

[40] POUYA A. A finite element method for modeling coupled flow and deformation in porous fractured media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2015, **39**(16): 1836-1852.

[41] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils [J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892-898.

[42] MADENCI E, BARUT A, FUTCH M. Peridynamic differential operator and its applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **304**: 408-451.

[43] MADENCI E, BARUT A, PHAN N. Bond-based peridynamics with stretch and rotation kinematics for opening and shearing modes of fracture[J]. *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 2021, **3**: 211-254.

[44] GU X, LI X, XIA X, et al. A robust peridynamic computational framework for predicting mechanical properties of porous quasi-brittle materials[J]. *Composite Structures*, 2023, **303**: 116245.

[45] 郁杨天, 章青, 顾鑫. 近场动力学与有限单元法的混合模型与隐式求解格式[J]. 浙江大学学报(工学版), 2017, **51**(7): 1324-1330. (YU Yangtian, ZHANG Qing, GU Xin. Hybrid model of peridynamics and finite element method under implicit schemes[J]. *Journal of Zhejiang University* (*Engineering Science*), 2017, **51**(7): 1324-1330.(in Chinese))

[46] QUEVEDO R, ROMANEL C, ROEHL D. Numerical modeling of unsaturated soil behavior considering different constitutive models[C]//*MATEC Web of Conferences*. 2021: 02007.

[47] TANG C S, SHI B, LIU C, et al. Experimental characterization of shrinkage and desiccation cracking in thin clay layer[J]. *Applied Clay Science*, 2011, **52**(1/2): 69-77.

[48] 张映梅. 非饱和重塑黄土水分蒸发试验研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2020.(ZHANG Yingmei. Experimental study on water evaporation of unsaturated remolded loess[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2020. (in Chinese))