

混联 II 型惯容非线性能量阱的动力学特性研究*

吴子英, 朱荣贤, 姜东贵, 晁国强, 张禹轩

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

摘要: 分别使用非线性恢复力、非线性阻尼替代惯容减振系统中的线性恢复力、线性阻尼, 并考虑摩擦力的影响, 提出了混联 II 型惯容非线性能量阱. 建立了主系统的动力学方程, 利用谐波平衡法求解系统在简谐激励下的幅频响应曲线. 采用弧长算法和数值法相结合的方法研究了系统的惯质比、非线性阻尼、非线性刚度和摩擦力单个参数对其减振性能的影响. 发现非线性刚度和非线性阻尼数值的增大会使峰值先减小后增大, 不同的是, 前者幅频响应曲线逐渐向右上方方向弯曲, 后者产生峰值的位置向低频段转移. 分析了惯质比、非线性阻尼、非线性刚度 3 种参数两两组合下对系统减振效果的影响. 研究表明, 在激励幅值为 0.005 m 时, 惯质比和阻尼同时变化减振效果最好; 当 $\varepsilon = 0.1$ 时, 系统主结构位移峰值的最小值约为 0.01 m; 而在参数 $\varepsilon = 0.001$ 时, 整体取值范围内其最大值约为 0.061 m; 当惯质比取得最佳值 0.1 时, 非线性阻尼和非线性刚度 κ_{21} 的取值范围变大. 在摩擦力的作用下, 系统的最大幅值都有不同程度的增加. 上述研究可为振动系统减振的研究提供参考.

关键词: 谐波平衡法; 非线性; 惯容器; 振动控制

中图分类号: O322; TP113 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.440350

Research on Dynamic Characteristics of Serial-Parallel-II Inerter Nonlinear Energy Sink

WU Ziyang, ZHU Rongxian, JANG Donggui, CHAO Guoqiang, ZHANG Yuxuan

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering,
Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P.R.China)

Abstract: A serial-parallel-II inerter nonlinear energy sink was proposed through replacement of the linear restoring force and linear damping with the nonlinear restoring force and nonlinear damping in inertial vibration reduction systems, in view of the effects of friction. The dynamic equation for the main system was established, the amplitude-frequency response curves of the system under the base simple harmonic excitation were solved with the harmonic balance method. The effects of the inertia ratio, nonlinear damping, nonlinear stiffness and friction on the vibration damping performance of the system were studied with the arc length algorithm and the numerical method. The results show that, with the increase of the nonlinear stiffness and nonlinear damping, the peak value will first decrease and then increase. The difference is that the amplitude-frequency response curve of the former gradually bends to the upper right direction, and the position of the peak value of the latter shifts to the lower frequency band. The actions of 3 parameters of the inertial ratio, nonlinear damping and nonlinear stiffness, on the damping effects of the system were analyzed. The research indicates that, with an exci-

* 收稿日期: 2023-12-08; 修订日期: 2024-02-17

基金项目: 国家自然科学基金(11572243)

作者简介: 吴子英(1975—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: ziyingwu@163.com).

引用格式: 吴子英, 朱荣贤, 姜东贵, 晁国强, 张禹轩. 混联 II 型惯容非线性能量阱的动力学特性研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(7): 907-921.

tation amplitude of 0.005 m, the vibration reduction effect will be the best when the inertia ratio and damping change simultaneously. For $\varepsilon = 0.1$, the minimum value of the peak displacement of the main structure of the system will be about 0.01 m, while for $\varepsilon = 0.001$, the maximum value within the overall value range will be approximately 0.061 m, and the amplitude damping ratio will be 97.1% and 82.1%, respectively. When the inertia ratio reaches optimal value 0.1, the nonlinear damping range and nonlinear stiffness κ_{21} will grow larger. Under friction, the maximum amplitude of the system will have different degrees of increases. The research results provide a reference for the study on structural vibration reduction.

Key words: harmonic balance method; nonlinear; inerter; vibration control

0 引言

结构振动问题普遍存在于航空航天领域^[1-3], 航天器在发射过程中要经历复杂的振动环境, 为了有效抑制结构振动, 保证航天器正常工作运转, 需要采用整星隔振技术对振动加以控制. 调谐质量阻尼器 (tuned mass damper, TMD)^[4] 和非线性能量阱 (nonlinear energy sink, NES)^[5-6] 是目前使用最多的两种减振装置, 但 TMD 作为一种线性吸振器只能在特定的频带内实现良好的减振性能, 面对这种缺陷, NES 完美地解决了这一问题, 不但有更宽的减振频带, 鲁棒性强, 可靠性高, 并且将振动能量从主结构单向地传递至耗能元件^[7-8].

NES 的优点引起了众多学者的兴趣, 为了进一步增强性能, 学者们设计了一些新型的 NES. 文献[9] 设计了高度不对称 NES, 研究了非线性动力学控制问题. 文献[10-12] 提出了轨道型 NES, 实验结果表明了 NES 能在宽频带范围内抑制结构振动. 文献[13-14] 提出一种杠杆型串、并联 NES 的整星系统, 采用谐波平衡法结合伪弧长延伸法, 得到了系统的幅频响应曲线, 并分析了杠杆型串、并联 NES 的质量、非线性刚度以及杠杆支点位置对系统幅频响应的影响. Habib 和 Romeo^[15] 进行了针对性的分析, 对高振幅动态进行处理, 并描述了调整和优化双稳态非线性能量阱 (BNES) 的过程, 他们通过这一过程获得了性能更好的调谐双稳态非线性能量阱 (TBNES). 陈洋洋等^[16] 提出了一种负刚度 NES, 当负刚度 NES 质量块上产生的惯性力在大部分时间里能够克服摩擦力开始起滑时, NES 具有显著的减振控制效果. Zang 等^[17] 采用谐波平衡法分析周期稳态响应的幅频响应曲线, 并且研究了具有 NES 耦合系统的复杂非线性动力学行为. 谭平等^[18] 利用复变量平均法, 推导得到了基底简谐激励下带光滑立方刚度 NES 减振系统的慢变微分方程, 通过多尺度分析, 得到了系统的鞍结分岔边界条件及 Hopf 分岔边界条件.

NES 的研究目前仍然停留在理论和实验阶段, 究其原因是为了达到良好的减振效果, 附加质量块的质量过大, 占主结构质量的 10%^[19-20]. 多个 NES 并行应用也可以有效增加减振效果, 同时适当地减少了 NES 的质量^[21-23]. 文献中的办法虽然能够减小 NES 的附加质量块, 但也使得系统更为复杂. 因此, 在保证良好的减振效果下, 小质量的 NES 的研究就显得十分具有工程价值和实际意义.

20 世纪末, Arakaki 等^[24] 提出将滚珠丝杠应用于黏滞阻尼器以增大其有效黏滞阻尼力, 这种放大作用是基于一种两节点惯性元件实现的. Smith^[25] 将这种惯性元件命名为惯容器, 惯容器可以提供比自身质量大得多的惯性力并且可以调节大小. 一些学者利用惯容器来替换减振系统的附加质量块, 在保证小质量的同时, 达到了良好的减振效果. 潘超等^[26] 提出了混联 II 型减震系统, 研究了随机地震响应变化规律, 并提出了参数优化设计的方法. 周子博等^[27] 提出了含惯容和杠杆元件的减振系统, 发现该系统大幅降低了共振振幅, 并且拓宽了有效频带. 刘志彬等^[28] 提出了新型非对称惯容 NES, 发现非对称惯容 NES 具有极强的能量鲁棒性和频率鲁棒性.

目前, 惯容器在线性减振器上的应用十分广泛, 在 NES 上的应用很少. 因此, 本文将惯容器和 NES 结合起来, 并考虑摩擦力的影响, 提出了新型混联 II 型惯容 NES.

1 新型混联 II 型惯容 NES 力学模型

新型混联 II 型惯容 NES 主要由惯容器、非线性弹簧、非线性阻尼和惯容器摩擦力组成, 图 1 为新型混联 II 型惯容 NES 力学模型. 本文选用滚珠丝杠惯容器, 其原理如图 2 所示, 其中, 惯容器是一种具有两个连接终

端的装置,它的设计是力与两个终端的相对加速度成正比关系。

作用在两端力的表达式为

$$F = b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) . \tag{1}$$

选用非线性弹簧, k_1 和 k_3 分别为非线性刚度的线性系数和非线性系数,其非线性恢复力为 $F_h = k_1x + k_3x^3$. 选用非线性黏滞阻尼器, c_1 和 c_3 分别为非线性阻尼的线性和非线性系数,其非线性阻尼力为 $F_z = c_1\dot{x} + c_3\dot{x}^3$.

滚珠丝杠惯容器中的摩擦主要存在于丝杠和螺母间的接触面上,如图 2 所示,且摩擦力 F_f 与丝杠螺母间相对运动速度 v 之间的关系^[29]为 $F_f = -f\text{sgn}(v)$, f 为摩擦力幅值, sgn 为符号函数 ($v > 0$ 时函数值取 1, $v = 0$ 时函数值取 0, $v < 0$ 时函数值取 -1).

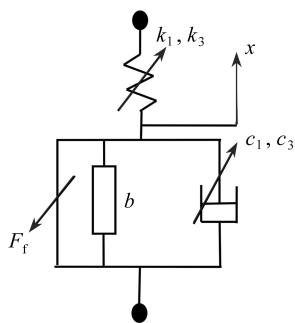


图 1 新型混联 II 型惯容 NES 力学模型

Fig. 1 Mechanical modeling of a new serial-parallel-II inerter NES

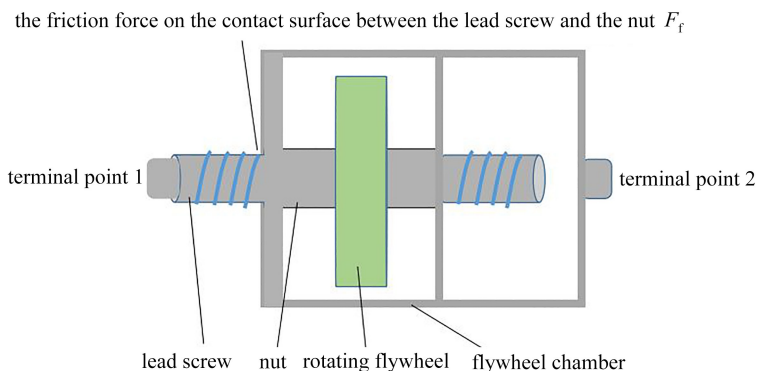


图 2 滚珠丝杠惯容器的工作原理图

Fig. 2 The ball screw inerter working principle diagram

2 单自由度主系统的力学模型

单自由度主系统的力学模型如图 3 所示,以简单建筑模型作为减振目标,将主结构质量 m_1 , 线性弹簧刚度 k_1 和阻尼 c_1 并联构成线性系统,其混联 II 型惯容 NES 由惯容器 b 和非线性阻尼 c_{2n} ($n = 1, 2$) 并联再与非线性弹簧刚度 k_{2n} ($n = 1, 2$) 串联组成,构成了一种新型 NES 系统.系统的外激励为谐波位移激励 $x_e = A\cos(\omega t)$, 来源于基底,其中 A 和 ω 分别为位移激励的幅值和频率. x_1 和 x_2 分别为主结构和混联 II 型惯容 NES 的位移响应。

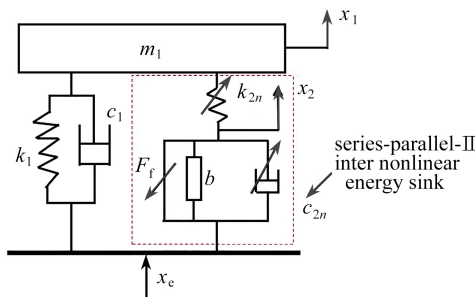


图 3 单自由度主系统的力学模型

Fig. 3 Mechanical modeling of a 1-DOF primary system

根据 Newton 第二定律求得单自由度主系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_e) + k_1(x_1 - x_e) + k_{21}(x_1 - x_2) + k_{22}(x_1 - x_2)^3 = 0, \\ b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_e) + c_{21}(\dot{x}_2 - \dot{x}_e) + c_{22}(\dot{x}_2 - \dot{x}_e)^3 + \\ k_{21}(x_2 - x_1) + k_{22}(x_2 - x_1)^3 + F_f = 0, \end{cases} \tag{2}$$

式中 m_1, k_1, c_1 分别为主结构的质量、线性刚度和线性阻尼系数, b 为惯容器的惯容系数, k_{21}, k_{22} 为非线性刚度系数, c_{21}, c_{22} 为非线性阻尼系数, F_f 为惯容器产生的摩擦力.

参考文献[30]和[31],将式(2)化简可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2(x_1 + \kappa_{21}(x_1 - x_2) + \kappa_{22}(x_1 - x_2)^3) = \\ \omega_1^2 A \cos(\omega t) - 2\lambda_1\omega_1 A \sin(\omega t), \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + 2\lambda_{21}\omega_1\dot{x}_2 + 2\lambda_{22}\omega_1(\dot{x}_2 + \omega A \sin(\omega t))^3 + \omega_1^2(\kappa_{21}(x_2 - x_1) + \\ \kappa_{22}(x_2 - x_1)^3) + F'_f = -\varepsilon A \omega^2 \cos(\omega t) - 2\lambda_{21}\omega_1 A \omega \sin(\omega t), \end{cases} \quad (3)$$

式中

$$\varepsilon = \frac{b}{m_1}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \kappa_{21} = \frac{k_{21}}{k_1}, \kappa_{22} = \frac{k_{22}}{k_1}, \lambda_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \lambda_{21} = \frac{c_{21}}{2m_1\omega_1}, \lambda_{22} = \frac{c_{22}}{2m_1\omega_1}, F'_f = \frac{F_f}{m_1},$$

其中 ε 为惯质比, ω_1 为主结构的固有频率, λ_1 为主结构的阻尼比, κ_{21}, κ_{22} 为非线性刚度比,但 κ_{22} 的单位为 m^{-2} , $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ 为非线性阻尼比.

3 谐波平衡法求解和数值验证

为了进一步观察减振系统位移响应随参数的变化和混联 II 型惯容 NES 的减振性能,本节运用谐波平衡法求解系统的幅频响应曲线,此处考虑摩擦力能增加系统的非线性,但会增加求解的难度,所以求解时暂不考虑摩擦力.基于谐波平衡方法,假设主结构和混联 II 型惯容 NES 的稳态响应位移解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = a_{1,1} \cos(\omega t) + b_{1,1} \sin(\omega t), \\ x_2 = a_{2,1} \cos(\omega t) + b_{2,1} \sin(\omega t), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $a_{1,1}, b_{1,1}, a_{2,1}, b_{2,1}$ 为待确定的谐波系数.将式(4)代入式(3),消去高阶项,平衡 $\cos(\omega t)$ 和 $\sin(\omega t)$ 的系数,得到非线性代数方程组为

$$\begin{cases} -a_{1,1}\omega^2 + 2\omega_1\lambda_1\omega b_{1,1} + a_{1,1} + \omega_1^2 \left(\kappa_{21}(a_{1,1} - a_{2,1}) + \frac{3}{4} \kappa_{22}((a_{1,1} - a_{2,1})^3 + (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} - b_{2,1})^2) \right) - A = 0, \\ -b_{1,1}\omega^2 - 2\omega_1\lambda_1\omega a_{1,1} + b_{1,1} + \omega_1^2 \left(\kappa_{21}(b_{1,1} - b_{2,1}) + \frac{3}{4} \kappa_{22}((b_{1,1} - b_{2,1})^3 + (a_{1,1} - a_{2,1})^2(b_{1,1} - b_{2,1})) \right) + 2\omega_1\lambda_1\omega A = 0, \\ -\varepsilon a_{2,1}\omega^2 + 2\omega_1\lambda_{21}b_{2,1}\omega + \frac{3}{2} \lambda_{22}\omega_1\omega^3(b_{2,1}^3 + a_{2,1}^2b_{2,1} - 2Aa_{2,1}b_{2,1} + A^2b_{2,1}) + \\ \omega_1^2 \left(\kappa_{21}(a_{2,1} - a_{1,1}) + \frac{3}{4} \kappa_{22}((a_{2,1} - a_{1,1})^3 + (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{2,1} - b_{1,1})^2) \right) + \varepsilon A \omega^2 = 0, \\ -\varepsilon b_{2,1}\omega^2 - 2\omega_1\lambda_{21}a_{2,1}\omega + \frac{3}{2} \lambda_{22}\omega_1\omega^3(-a_{2,1}^3 - a_{2,1}b_{2,1}^2 - 3A^2a_{2,1} + \\ Ab_{2,1}^2 + 3Aa_{2,1}^2 + A^3) + \omega_1^2 \left(\kappa_{21}(b_{2,1} - b_{1,1}) + \frac{3}{4} \kappa_{22}((b_{2,1} - b_{1,1})^3 + (a_{2,1} - a_{1,1})^2(b_{2,1} - b_{1,1})) \right) + 2\lambda_{21}\omega_1 A \omega = 0. \end{cases} \quad (5)$$

从式(5)可以看出,振幅之间存在非线性耦合,难以获得解析解,通过弧长算法求解式(5)的代数方程组得到系数 $a_{1,1}, b_{1,1}, a_{2,1}, b_{2,1}$ 的值,从而得到混联 II 型惯容 NES 系统的位移响应.主结构的位移 x_1 和混联 II 型

惯容 NES 的位移 x_2 的幅值为

$$\begin{cases} A_{x1} = \sqrt{a_{1,1}^2 + b_{1,1}^2}, \\ A_{x2} = \sqrt{a_{2,1}^2 + b_{2,1}^2}. \end{cases} \quad (6)$$

弧长算法的出现是针对结构系统的静力分析问题.弧长法通过引入一个载荷因子 ρ 与一个约束方程,将原本 n 维的代数方程组扩充到 $n + 1$ 维.约束方程为

$$(\Delta \mathbf{x})^T (\Delta \mathbf{x}) + (\Delta \rho)^2 = (\Delta l)^2, \quad (7)$$

式中 $\Delta \mathbf{x}$ 为位移量, $\Delta \rho$ 为变量, Δl 为弧长.

其求解过程为:当前加载步的第一个迭代步是以上个加载步已达到平衡时的状态为基准,此状态下位移是已知量,此时可以得到平衡路径与超曲面之间的交点 A^1 ,然后沿着超曲面的方向移动固定的距离得到 A^2 ,以此循环直到无限接近于平衡路径与约束超曲面的交点(图 4).此过程中,沿超曲面移动方向需要满足当前增量预测步与上个增量步之间的夹角小于 90° .弧长算法需要一个初始值 x_0 和 ρ_0 ,可通过线性搜索来确定.

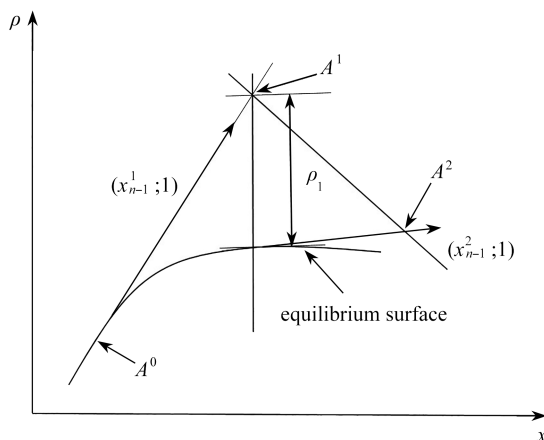


图 4 弧长算法求解示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the arc-length algorithm solution

对于方程(2),利用 MATLAB 中 Runge-Kutta 数值方法求得系统主结构和混联 II 型惯容 NES 的幅频响应曲线,选取的系统参数见表 1.

表 1 混联 II 型惯容 NES 系统的仿真参数

Table 1 Simulation parameters of the serial-parallel-II inerter NES system

symbol	value
main structural mass m_1 /kg	3.3
inerter parameter b /kg	0.33
main structure damping c_1 /($N \cdot s \cdot m^{-1}$)	1.4
linear stiffness k_1 /(N/m)	2 814
linear coefficient of nonlinear damping c_{21} /($N \cdot s \cdot m^{-1}$)	5
nonlinear coefficient of nonlinear damping c_{22} /($N \cdot s^3 \cdot m^{-3}$)	5
linear coefficient of nonlinear stiffness k_{21} /(N/m)	4 814
nonlinear coefficient of nonlinear stiffness k_{22} /(N/m^3)	199 980
excitation amplitude A /m	0.005
natural frequency ω_1 /(rad/s)	29.2
inertia ratio ε	0.1

从图 5 可知惯质比 $\varepsilon = 0.1$ 时,Runge-Kutta 方法的数值解与谐波平衡方法的解析解均吻合良好,为了验证谐波平衡法求解方程组的正确性,进一步考虑了惯质比 $\varepsilon = 1$ 和非线性刚度比 $\kappa_{22} = 120$ 时系统的幅频响应曲线的求解情况,结果如图 6 所示.

从图5、6中可知,在 $\varepsilon = 0.1$ 和 $\varepsilon = 1$ 两种情况下,Runge-Kutta方法的数值解与谐波平衡方法的解析解均吻合良好.由此可见,由谐波平衡法求得的解析解是准确的.因此,后面采用谐波平衡法求解系统的幅频曲线.

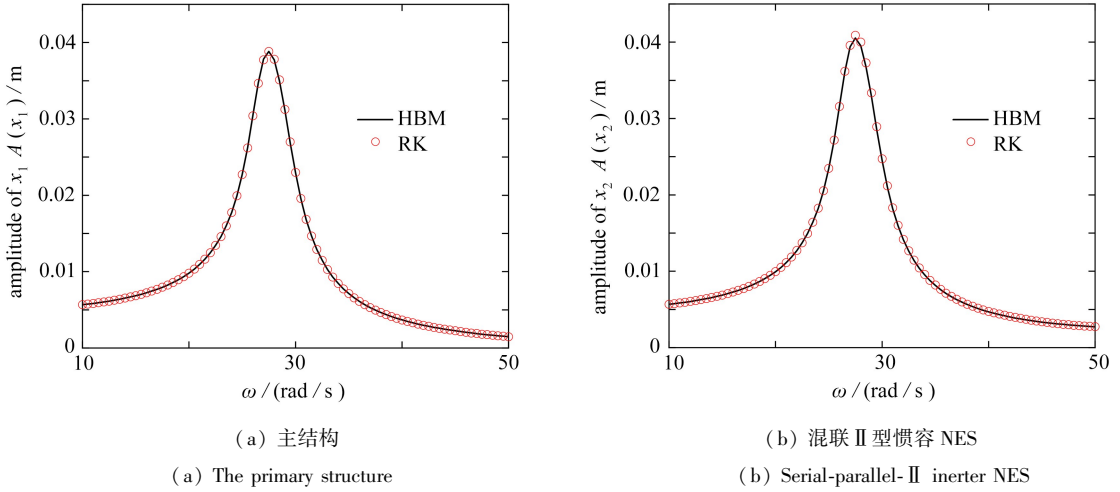


图5 系统幅频响应曲线对比 ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 5 Comparison of amplitude-frequency response curves of the system ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

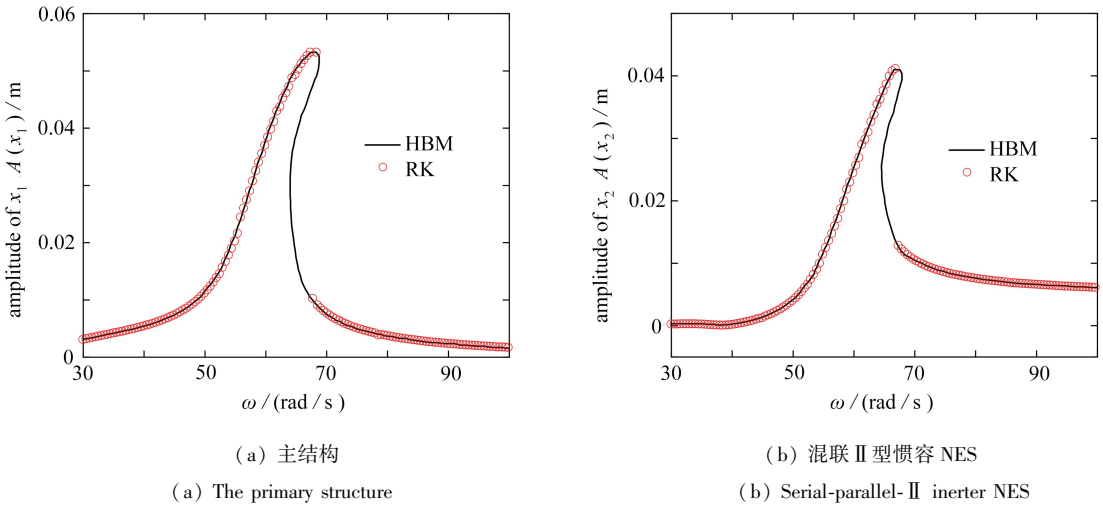


图6 系统幅频响应曲线对比 ($\varepsilon = 1, \kappa_{22} = 120$)

Fig. 6 Comparison of amplitude-frequency response curves of the system ($\varepsilon = 1, \kappa_{22} = 120$)

4 混联 II 型惯容 NES 减振性能分析

本节研究了混联 II 型惯容 NES 的减振性能,定义最大响应幅值减少百分比来体现减振系统的减振效果.未控系统(uncontrolled)主结构幅频响应的最大幅值记为 A_n ,传统非线性能量阱系统(traditional nonlinear energy sink, T-NES)主结构幅频响应的最大幅值记为 A_1 ,混联 II 型惯容系统(serial-parallel-II inerter, SP-II-I)主结构幅频响应的最大幅值记为 A_2 ,混联 II 型惯容非线性能量阱系统(serial-parallel-II inerter nonlinear energy sink, I-NES)主结构幅频响应的最大幅值记为 A_3 .未控系统、T-NES 和 SP-II-I 的力学模型如图7所示,系统的最大响应幅值减少百分比 R_i 为

$$R_i = \frac{A_n - A_i}{A_n} \times 100\%, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

惯容器的质量为 m_b ,引入以下的比例参数:

$$\varepsilon_m = \frac{m_2}{m_1}, \quad \varepsilon_b = \frac{b}{m_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{m_b}{m_1}, \quad \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_1} = \frac{b}{m_b} = 100, \quad (9)$$

其中, ε_b 为混联 II 型惯容 NES 的惯容力与主结构的质量之比, ε_1 为混联 II 型惯容 NES 的惯容器质量与主结构的质量之比。

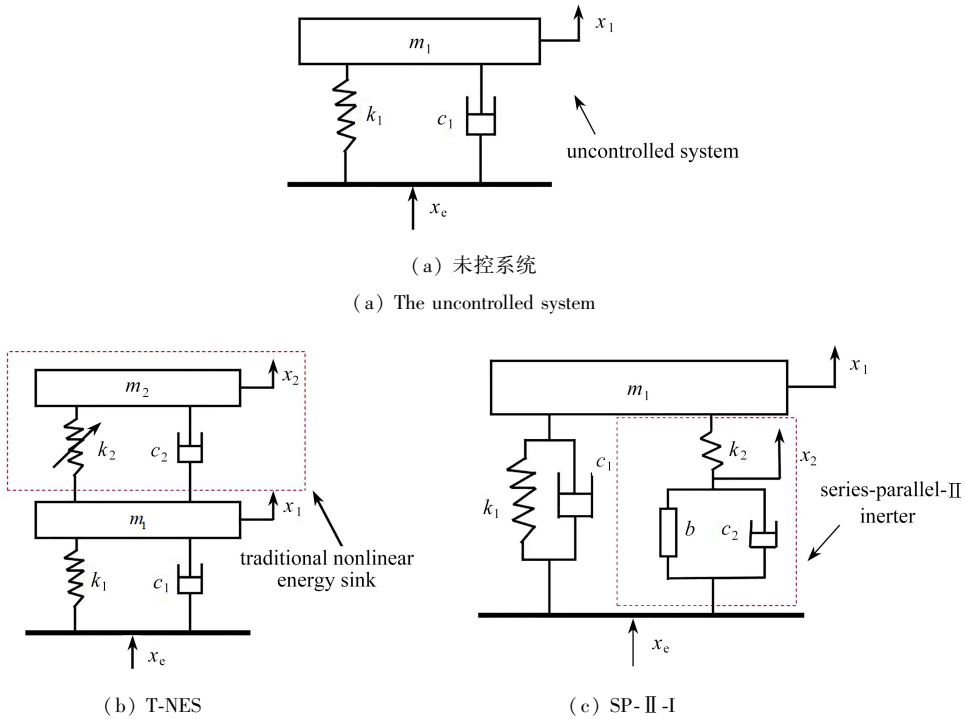
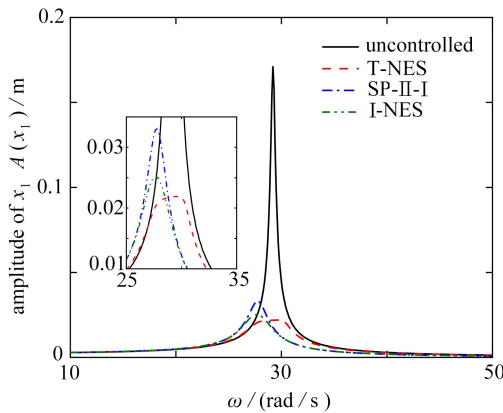


图 7 3 种减振系统的力学模型

Fig. 7 Mechanical models of 3 vibration reduction systems

4.1 相同惯质比/质量比下减振性能对比

本小节讨论了相同惯质比或质量比下 3 种减振系统的减振性能。仿真参数见表 1, 在不同的激励幅值 $A = 0.0025\text{ m}, 0.005\text{ m}, 0.01\text{ m}$ 下, 3 种减振系统的减振性能如图 8 所示。图 8(a)、8(b)、8(c) 中惯质比/质量比均为 $\varepsilon_m = \varepsilon_1 = 0.1$, 从图 8(a) 中发现在激励幅值 $A = 0.0025\text{ m}$ 时, T-NES 系统的减振效果最好, 幅值减振率为 $R_1 = 87.2\%$, 随着激励幅值 A 的增大减振效果显著减弱, 幅值减振率分别降为 $40.63\%, 15.61\%$ 。而 SP-II-I 系统的减振效果基本稳定, 减振率分别为 $80.71\%, 80.70\%, 80.60\%$ 。图 8(b)、8(c) 中在激励幅值 $A = 0.005\text{ m}, 0.01\text{ m}$ 时, I-NES 系统的减振效果最好, 并且随着激励幅值 A 的增大减振效果稳步提升, 减振率分别为 $85.27\%, 88.66\%, 91.69\%$, 具体减振情况见表 2。



(a) $A = 0.0025\text{ m}$

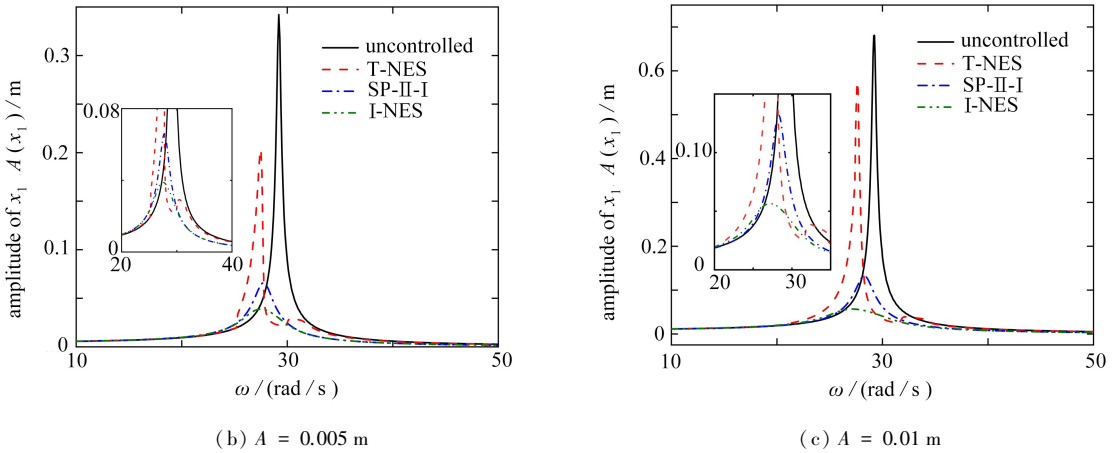


图8 不同减振系统和激励幅值下主结构的幅频响应曲线 ($\varepsilon = 0.1$)

Fig. 8 The amplitude-frequency response curves of the main structure under different vibration reduction systems and excitation amplitudes ($\varepsilon = 0.1$)

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

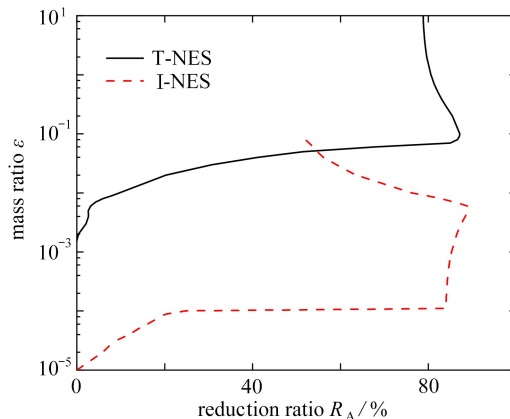
表2 3种减振系统减振效果的对比

Table 2 Comparison of vibration reduction effects of 3 vibration reduction systems

excitation amplitude A/m	system name	value		
		T-NES	SP-II-I	I-NES
	inertia ratio		$\varepsilon_i = 0.1$	$\varepsilon_i = 0.1$
	mass ratio	$\varepsilon_m = 0.1$	$\varepsilon_b = 0.001$	$\varepsilon_b = 0.001$
0.002 5	A_i/m	0.021 9	0.033 0	0.025 2
	$R_i/\%$	87.2	80.71	85.27
0.005	A_i/m	0.230 1	0.066 0	0.038 8
	$R_i/\%$	40.63	80.70	88.66
0.001	A_i/m	0.574 6	0.132 1	0.056 6
	$R_i/\%$	15.61	80.60	91.69

4.2 相同减振性能下质量对比

NES 是附加在系统上的减振装置,实际应用中,特别是对于航天器等要求质量尽可能小的情况下,NES 的选择变得十分关键.根据图 9 所示,不同激励幅值下,NES 的质量比与减振百分比之间存在关系.明显地,当实现相同的减振效果时,相比于 T-NES,I-NES 具有显著更小的质量.此外,NES 的减振效果随着质量比的增加呈现先增大后减小的趋势.T-NES 和 I-NES 变化曲线的趋势有类似性,主要原因在于 I-NES 是在 T-NES 上的改进和完善.



(a) $A = 0.0025 m$

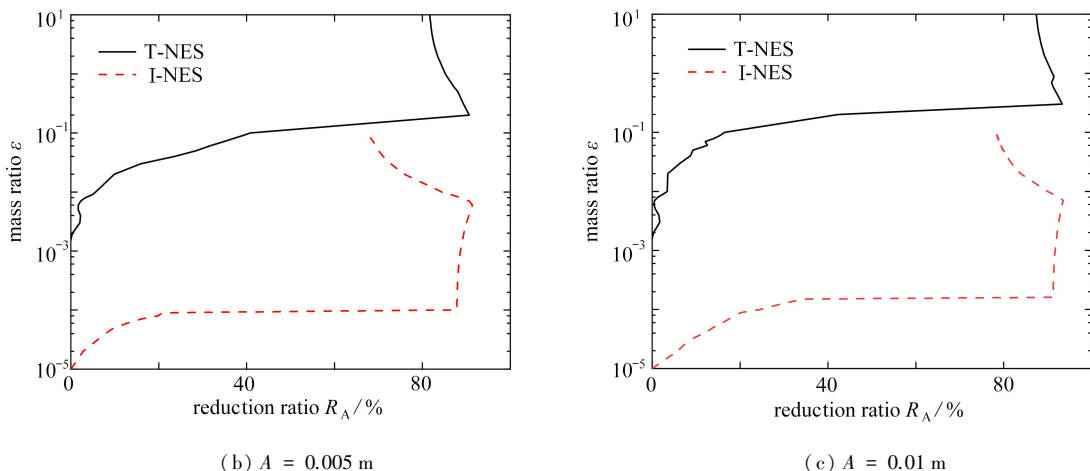


图 9 NES 的质量比与减振率的关系曲线

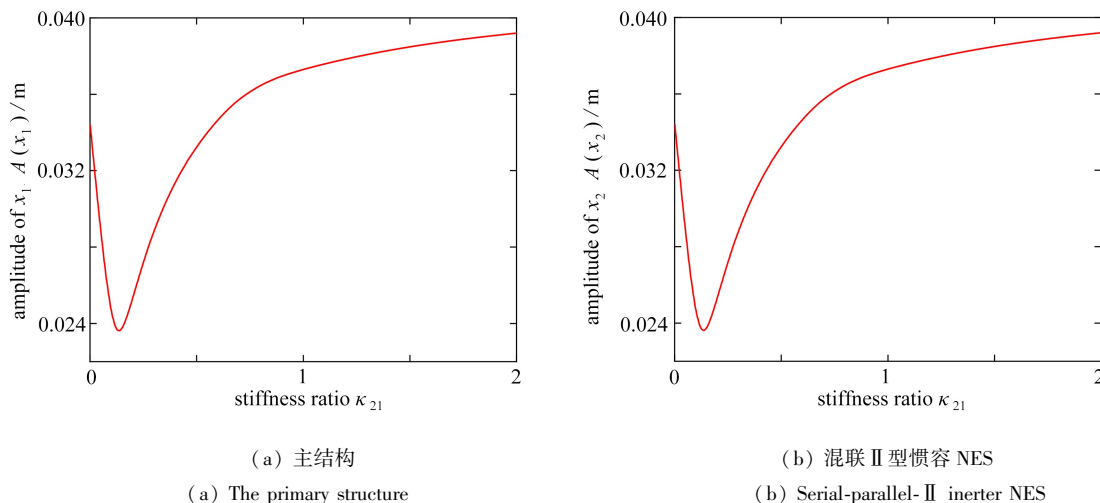
Fig. 9 Relation curves between the mass ratio of NES and the vibration reduction rate

在给定的激励幅值下的仿真结果显示,当激励幅值 $A = 0.0025 \text{ m}$ 时,T-NES 实现最优减振效果时,其质量比为 0.1,而 I-NES 最优质量比达到了 0.005.当激励幅值 $A = 0.005 \text{ m}$ 时,T-NES 和 I-NES 达到最佳减振效果时,其质量比分别为 0.18 和 0.006.当激励幅值 A 增加到 0.01 m 时,T-NES 达到最优减振效果时,其质量比高达 0.285.然而,I-NES 的最优质量比仅为 0.006 8.可见,随着激励幅值的增加,达到最佳减振效果的质量比也随之增加.由此可得出结论,惯容器能够大大降低 NES 的质量,尤其是在大激励条件下,优势更为明显.

4.3 非线性刚度的影响

4.3.1 系数 κ_{21} 的影响

首先改变系数 κ_{21} , 研究系数 κ_{21} 对减振效果的影响.不同刚度比 κ_{21} 下系统的最大幅值如图 10 所示.从图中可知,随着刚度比 κ_{21} 数值不断增加,系统的主结构最大幅值先减小再增加.当 $\kappa_{21} = 0.14$ 时,主结构的最大幅值最小;当 κ_{21} 为 0.14~1 时,主结构的最大幅值增加迅速;而当 κ_{21} 为 1~2 时,主结构的最大幅值缓慢增加.混联 II 型惯容 NES 的最大幅值变化基本与主结构类似,不同的是,当 κ_{21} 为 0.14~1 时,混联 II 型惯容 NES 的最大幅值先增大后减小,而后趋于平缓.



(a) 主结构

(a) The primary structure

(b) 混联 II 型惯容 NES

(b) Serial-parallel-II inerter NES

图 10 不同刚度比 κ_{21} 下的系统最大幅值 ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 10 Maximum amplitude of the system for different stiffness ratios κ_{21} ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

4.3.2 系数 κ_{22} 的影响

通过改变系数 κ_{22} 的数值,来研究系数 κ_{22} 对系统最大幅值的影响,不同刚度比 κ_{22} 下系统的幅频响应曲线如图 11 所示.如图可知,系统主结构和混联 II 型惯容 NES 的幅频响应曲线的变化趋势完全相同,幅频响应

曲线随着刚度比的增加逐渐向右上方弯曲,峰值先减小再增大,根据推断,系数 κ_{22} 存在最优值使得系统幅频响应曲线的峰值最小,但此时系统的幅频响应曲线存在明显的硬化特性现象,并且随着非线性刚度比值不断增大,这种现象越来越明显。

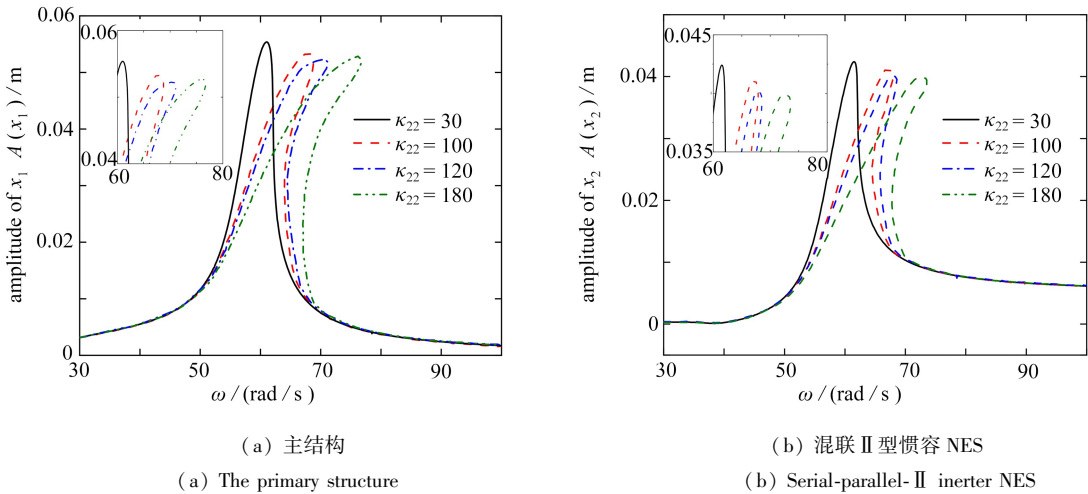


图 11 不同刚度比 κ_{22} 下的系统幅频响应曲线 ($\varepsilon = 1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 10 Amplitude-frequency response curve of the system with different stiffness ratio κ_{22} ($\varepsilon = 1, A = 0.005 \text{ m}$)

4.4 非线性阻尼的影响

为了研究非线性阻尼系数 c_{21} 和 c_{22} 同时对系统最大幅值的影响,仿真中阻尼系数 c_{21} 和 c_{22} 取值相同,所以 λ_{21} 和 λ_{22} 取值也相同,为简化表达,用 λ 代表非线性阻尼系数 c_{21} 和 c_{22} 同时变化的阻尼比.系统的非线性阻尼比对幅频响应曲线的影响如图 12 所示.由图可知,主结构和混联 II 型惯容 NES 的幅频响应曲线的变化趋势基本相同.随着阻尼比值不断增大,幅频响应曲线的峰值先减小再增加,且产生峰值的位置向低频段转移.当阻尼比的值为 $0.7 \sim 0.8$ 之间时,此时存在混联 II 型惯容 NES 阻尼的最佳取值.除此之外,阻尼的增大会降低系统的硬化特性,系统的幅频率响应曲线在高频区域不再发生明显的向右弯曲现象.当阻尼增大到一定程度时,系统的幅频响应曲线不再出现硬化特性,变得更加稳定。

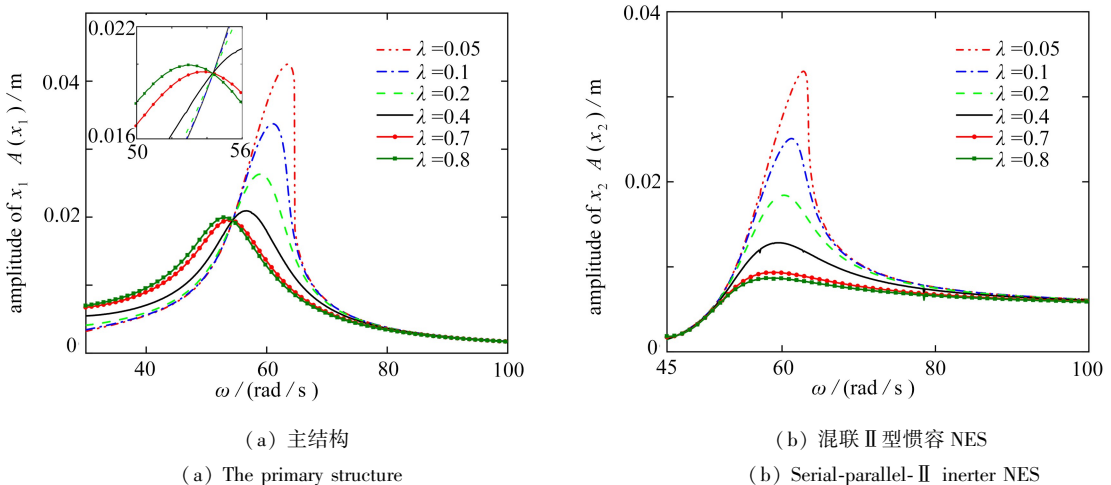


图 12 不同阻尼下的系统幅频响应曲线 ($\varepsilon = 1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 12 Amplitude-frequency response curve of the system under different damping ($\varepsilon = 1, A = 0.005 \text{ m}$)

4.5 摩擦力

本小节之前的减振分析未考虑摩擦力对减振效果的影响,但是摩擦力是不可避免的,是实际存在的,为符合实际应用,本小节分析摩擦力对系统减振效果的影响.摩擦力主要为惯容器运动时产生的力 F_f .摩擦力幅值大约为 5 N .图 13(a)、13(b)、13(c)为未考虑摩擦力的时程图、相图、Poincaré 图,图 13(d)、13(e)、13(f)为加入摩擦力的时程图、相图、Poincaré 图.图 13 可以反映出从未考虑摩擦力的倍周期函数变为加入摩擦

力后的混沌函数。

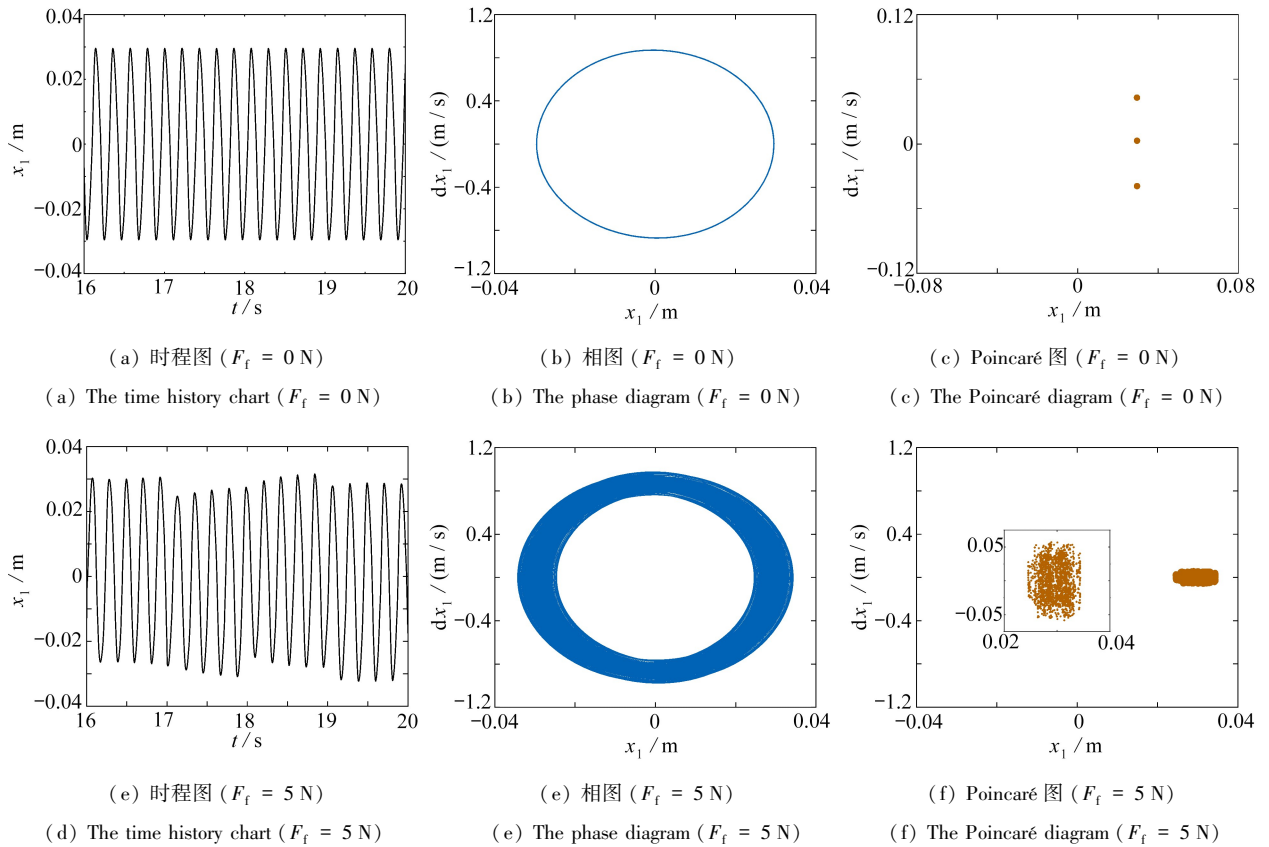


图 13 摩擦力对主系统的非线性特性的影响 ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 13 The influence of friction on the nonlinear characteristics of the primary system ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

然后,利用 MATLAB 中 Runge-Kutta 数值方法求得系统主结构和混联 II 型惯容 NES 的幅频响应曲线。图 14 为在摩擦力的作用下系统的幅频响应曲线变化趋势。从图中可以看出,系统的主结构和混联 II 型惯容 NES 的位移最大值都有不同程度的增加,其中主结构位移最大值的峰值处增加了 4.38%,混联 II 型惯容 NES 位移最大值的峰值处增加了 6.85%。根据分析可知,摩擦力影响了惯容器的惯性系数,进而影响主系统的减振效果。

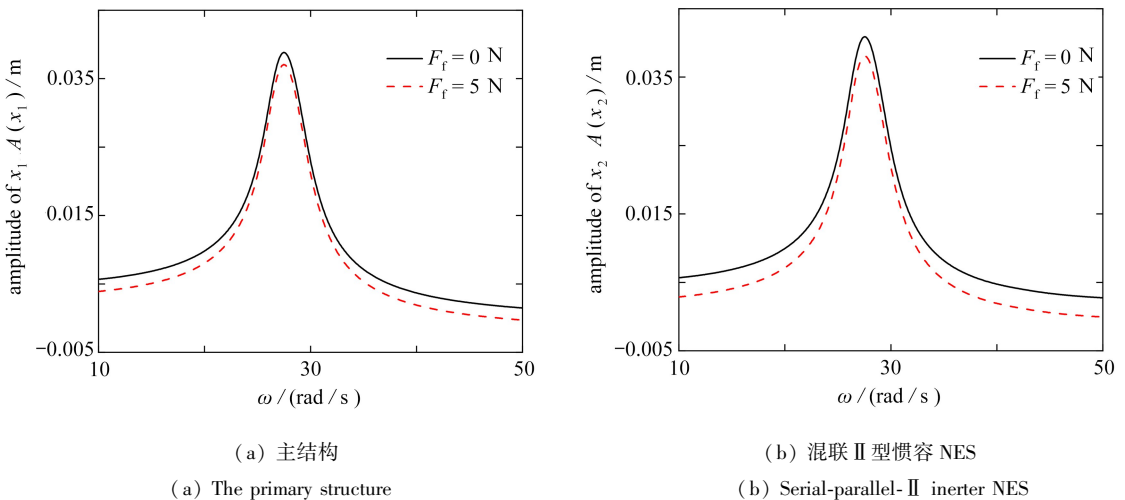


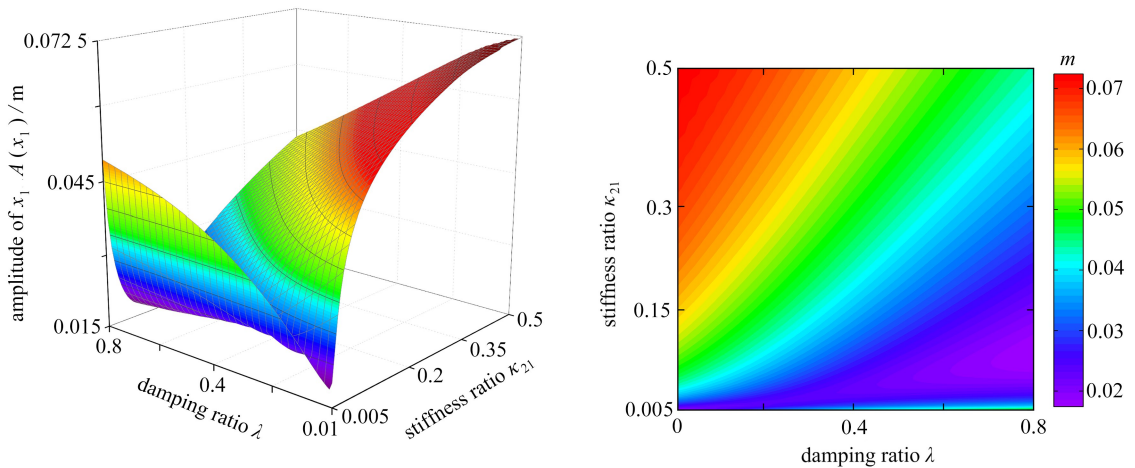
图 14 摩擦力下的系统幅频响应曲线 ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

Fig. 14 Amplitude-frequency response curve of the system under friction force ($\varepsilon = 0.1, A = 0.005 \text{ m}$)

5 混联 II 型惯容 NES 参数同时变化的影响

5.1 刚度和阻尼同时变化的影响

其他参数为定值,其中幅值 A 为 0.005 m ,同时改变刚度 κ_{21} 和阻尼数值,得到一系列的幅频响应曲线,从幅频响应曲线中提取主结构位移的峰值.图 15 为阻尼和刚度 κ_{21} 同时变化对主结构频响曲线峰值的影响.如图所示,当阻尼和刚度 κ_{21} 同时变化时,系统主结构的最大幅值变化较为复杂.图 15(a) 是三维曲面图,图中存在“山谷”区域.减振效果达到最优时,主结构位移的峰值的最小值就在“山谷”区域中.图 15(b) 是二维等高线图,图中能够清晰地显示出减振效果达到最优时,非线性阻尼和非线性刚度 κ_{21} 参数的取值范围.从图 15(b) 中可得, $\kappa_{21} = 0.08, \lambda = 0.8$ 时,系统主结构位移峰值的最小值约为 0.02 m ,而在参数 $\kappa_{21} = 0.5, \lambda = 0.01$ 时,整体取值范围内其最大值约为 0.072 m ,其幅值减振率分别为 94.1% 和 78.86% .而且从图 15(b) 中可知,阻尼产生的影响要比刚度 κ_{21} 大,随着阻尼的数值增加,系统主结构位移峰值的降低速度变快.



(a) 三维曲面图

(a) The 3D surface diagram

(b) 二维等高线图

(b) The 2D contour

图 15 刚度和阻尼同时变化对主结构频响曲线峰值的影响

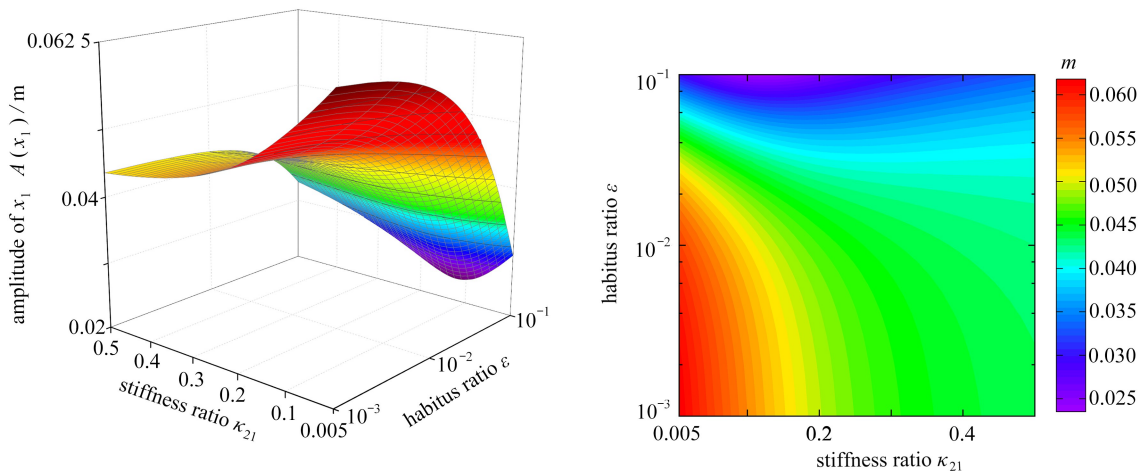
Fig. 15 Influence of simultaneous stiffness and damping changes on the peak value of the frequency response curve of the main structure

5.2 刚度和惯质比同时变化的影响

其他参数为定值,其中幅值 A 为 0.005 m ,同时改变刚度 κ_{21} 和惯质比数值,系统主结构最大幅值峰值的变化趋势如图 16 所示.主结构最大幅值峰值的变化呈扇弧形,其减振效果最优区间在图 16(a) 的最右下方,从图 16(b) 可以明显地看出,随着惯质比的增大,该区域逐渐变为深蓝色,主结构最大幅值峰值逐渐降低,当 $\kappa_{21} = 0.2, \varepsilon = 0.1$ 时,系统主结构位移峰值的最小值约为 0.025 m ,而在参数 $\kappa_{21} = 0.005, \varepsilon = 0.002$ 时,整体取值范围内其最大值约为 0.062 m ,其幅值减振率分别为 92.66% 和 81.8% .

5.3 惯质比和阻尼同时变化的影响

其他参数为定值,其中幅值 A 为 0.005 m ,同时改变阻尼和惯质比数值,研究系统主结构最大幅值峰值的变化趋势,图 17 为阻尼和惯质比同时变化对主结构频响曲线峰值的影响.从图中可知,减振效果达到最优时的位移峰值在图 17(a) 的右下方的“山谷”区域中,随着惯质比数值的增加,系统主结构位移峰值的降低速度变快,相对于惯质比,阻尼对于主结构最大幅值峰值的影响较小.从图 17(b) 可以看出当 $\varepsilon = 0.1$ 时,系统主结构位移峰值的最小值约为 0.01 m ,而在参数 $\varepsilon = 0.001$ 时,整体取值范围内其最大值约为 0.061 m ,其幅值减振率分别为 97.1% 和 82.1% .



(a) 三维曲面图

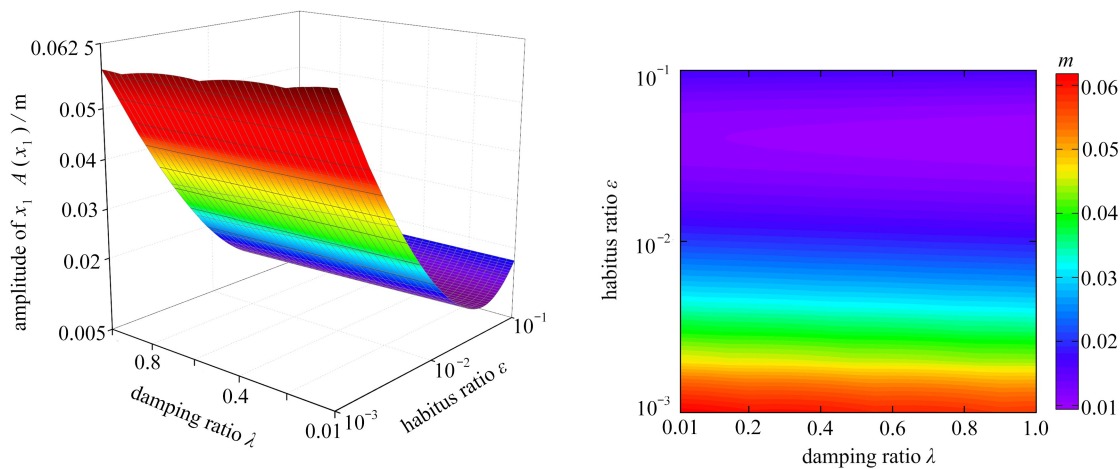
(b) 二维等高线图

(a) The 3D surface diagram

(b) The 2D contour

图 16 刚度和惯质比同时变化对主结构频响曲线峰值的影响

Fig. 16 Influence of simultaneous stiffness and inertia ratio changes on the peak of the frequency response curve of the main structure



(a) 三维曲面图

(b) 二维等高线图

(a) The 3D surface diagram

(b) The 2D contour

图 17 惯质比和阻尼同时变化对主结构频响曲线峰值的影响

Fig. 17 Influence of simultaneous inertia ratio and damping changes on the peak of the frequency response curve of the main structure

6 结 论

本文使用非线性恢复力替代线性惯容减振系统中的线性恢复力,使用非线性阻尼替代线性阻尼,并考虑摩擦力的影响,提出了混联 II 型惯容 NES,并对其在外部简谐激励下系统的减振性能进行了研究.利用谐波平衡法求解了系统幅频响应曲线,并用数值解验证了解析解的正确性,两者吻合得很好.然后,分析了系统的惯质比、非线性阻尼、摩擦力等参数对减振效果的影响.最后分析了系统的惯质比、非线性阻尼和非线性刚度三个参数两两配合对主结构频响曲线峰值的影响.具体结论如下:

1) 相同质量比的条件下,相比较于 T-NES 和 SP-I 两种系统,I-NES 具有更好的减振效果,尤其是在大激励的条件下;在相同减振效果的情况下,I-NES 所需要的质量远小于 T-NES,适应于一些对于质量有严格要求的场合.

2) 随着非线性刚度 κ_{22} 的数值增大,幅频响应曲线逐渐向右上方弯曲,峰值先减小后增大,但此时出现多解情况,需要做进一步判定;而随着非线性阻尼 c_{21}, c_{22} 数值增大,峰值先减小再增加,且产生峰值的位置向低频段转移.在摩擦力的作用下,系统的主结构和混联 II 型惯容 NES 的位移最大值都有不同程度地下降,可以看出合适的摩擦力可以改善减振效果.

3) 惯质比和阻尼同时变化减振效果最好.当 $\varepsilon = 0.1$ 时,系统主结构位移峰值的最小值约为 0.01 m,而在参数 $\varepsilon = 0.001$ 时,整体取值范围内其最大值约为 0.061 m,其幅值减振率分别为 97.1% 和 82.1%.合适的惯质比大概在 0.1 附近,此时,混联 II 型惯容 NES 的非线性阻尼和非线性刚度 κ_{21} 的取值范围变大.取恰当的数值,会使混联 II 型惯容 NES 系统取得良好的减振效果.

参考文献 (References):

- [1] 孔宪仁, 张也弛. 两自由度非线性吸振器在简谐激励下的振动抑制[J]. 航空学报, 2012, **33**(6): 1020-1029. (KONG Xianren, ZHANG Yechi. Vibration suppression of a two-degree-of-freedom nonlinear energy sink under harmonic excitation[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, **33**(6): 1020-1029. (in Chinese))
- [2] LUONGO A, ZULLI D. Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2014, **20**(13): 1985-1998.
- [3] BICHIUO Y, HAJJ M R, NAYFEH A H. Effectiveness of a nonlinear energy sink in the control of an aeroelastic system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **86**(4): 2161-2177.
- [4] HARTOG J P D. *Mechanical Vibrations*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1947.
- [5] VAKAKIS A F. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001, **123**(3): 324-332.
- [6] VAKAKIS A F, MANEVITCH L I, GENDELMAN O, et al. Dynamics of linear discrete systems connected to local essentially nonlinear attachments[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **264**(3): 559-577.
- [7] KERSCHEN G, LEE Y S, VAKAKIS A F, et al. Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2005, **66**(2): 648-679.
- [8] GOURDON E, ALEXANDER N A, TAYLOR C A, et al. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: theoretical and experimental results[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300**(3): 522-551.
- [9] VAKAKIS A F, AL-SHUDEIFAT M A, HASANM A. Interactions of propagating waves in a one-dimensional chain of linear oscillators with a strongly nonlinear local attachment[J]. *Meccanica*, 2014, **49**(10): 2375-2397.
- [10] 刘中坡, 乌建中, 王菁菁, 等. 轨道型非线性能量阱对高层结构脉动风振的控制仿真[J]. 振动工程学报, 2016, **29**(6): 1088-1096. (LIU Zhongpo, WU Jianzhong, WANG Jingjing, et al. Simulation of track nonlinear energy sink for wind-induced vibration control in high-rise building[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, **29**(6): 1088-1096. (in Chinese))
- [11] 王菁菁, 浩文明, 吕西林. 轨道非线性能量阱阻尼对其减振性能的影响[J]. 振动与冲击, 2017, **36**(24): 30-34. (WANG Jingjing, HAO Wenming, LÜ Xilin. Influence of track nonlinear energy sink damping on its vibration reduction performance[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, **36**(24): 30-34. (in Chinese))
- [12] 刘中坡, 吕西林, 鲁正, 等. 轨道型非线性能量阱振动控制的振动台试验研究[J]. 建筑结构学报, 2016, **37**(11): 1-9. (LIU Zhongpo, LÜ Xilin, LU Zheng, et al. Experimental investigation on vibration control effect of track nonlinear energy sink[J]. *Journal of Building Structures*, 2016, **37**(11): 1-9. (in Chinese))
- [13] 李东辉, 李晨, 张业伟, 等. 杠杆型串联非线性能量阱整星隔振系统的振动控制[J]. 振动与冲击, 2022, **41**(16): 278-284. (LI Donghui, LI Chen, ZHANG Yewei, et al. Vibration control of a whole star vibration isolator system based on lever-type series nonlinear energy sink[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, **41**(16): 278-284. (in Chinese))
- [14] 李晨, 陈国一, 方勃, 等. 杠杆型并联非线性能量阱的振动控制[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(15): 54-64. (LI Chen, CHEN Guoyi, FANG Bo, et al. Vibration control for lever-type parallel nonlinear energy trap[J]. *Jour-*

- nal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(15): 54-64. (in Chinese))
- [15] HABIB G, ROMEO F. The tuned bistable nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **89**(1): 179-196.
- [16] 陈洋洋, 陈凯, 谭平, 等. 负刚度非线性能量阱减振控制性能研究[J]. 工程力学, 2019, **36**(3): 149-158. (CHEN Yangyang, CHEN Kai, TAN Ping, et al. A study on structural seismic control performance by nonlinear energy sinks with negative stiffness[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(3): 149-158. (in Chinese))
- [17] ZANG J, CHEN L Q. Complex dynamics of a harmonically excited structure coupled with a nonlinear energy sink[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2017, **33**(4): 801-822.
- [18] 谭平, 刘良坤, 陈洋洋, 等. 非线性能量阱减振系统受基底简谐激励的分岔特性分析[J]. 工程力学, 2017, **34**(12): 67-74. (TAN Ping, LIU Liangkun, CHEN Yangyang, et al. Bifurcation analysis of nonlinear energy sink absorption system under ground harmonic excitation[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(12): 67-74. (in Chinese))
- [19] YANG K, ZHANG Y W, DING H, et al. Nonlinear energy sink for whole-spacecraft vibration reduction[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2017, **139**(2): 021011.
- [20] WANG J, WIERSCHEM N, SPENCER B F, et al. Experimental study of track nonlinear energy sinks for dynamic response reduction[J]. *Engineering Structures*, 2015, **94**: 9-15.
- [21] SAVADKOOHI A T, VAURIGAUD B, LAMARQUE C H, et al. Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part II: theory and experiments[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **67**(1): 37-46.
- [22] BOROSON E, MISSOUM S, MATTEI P, et al. Optimization under uncertainty of parallel nonlinear energy sinks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, **394**: 451-464.
- [23] CHEN J E, HE W, ZHANG W, et al. Vibration suppression and higher branch responses of beam with parallel nonlinear energy sinks[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **91**(2): 885-904.
- [24] ARAKAKI T, KURODA H, ARIMA F, et al. Development of seismic devices applied to ball screw, part 1: basic performance test of RD-series[J]. *AIJ Journal of Technology and Design*, 1999, **5**(8): 239-244.
- [25] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1648-1662.
- [26] 潘超, 张瑞甫, 王超, 等. 单自由度混联 II 型惯容减振体系的随机地震响应与参数设计[J]. 工程力学, 2019, **36**(1): 129-137. (PAN Chao, ZHANG Ruifu, WANG Chao, et al. Stochastic seismic response and design of structural system with series-parallel-II inerter system[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(1): 129-137. (in Chinese))
- [27] 周子博, 申永军, 邢海军, 等. 含惯容和杠杆元件的减振系统参数优化及性能分析[J]. 振动工程学报, 2022, **35**(2): 407-416. (ZHOU Zibo, SHEN Yongjun, XING Haijun, et al. Parameter optimization and performance analysis of vibration mitigation systems with inertia and lever components[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2022, **35**(2): 407-416. (in Chinese))
- [28] 刘志彬, 谭平, 王菁菁, 等. 新型非对称惯容 NES 减振控制性能研究[J]. 振动与冲击, 2023, **42**(2): 116-125. (LIU Zhibin, TAN Ping, WANG Jingjing, et al. Performance analysis of a novel asymmetric inerter NES for seismic response mitigation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, **42**(2): 116-125. (in Chinese))
- [29] EBRAHIMI M, WHALLEY R. Analysis modeling and simulation of stiffness in machine tool drives[J]. *Computer and Industrial Engineering*, 2000, **38**(1): 93-105.
- [30] 范舒铜, 申永军. 简谐激励下黏弹性非线性能量阱的研究[J]. 力学学报, 2022, **54**(9): 2567-2576. (FAN Shutong, SHEN Yongjun. Research on a viscoelastic nonlinear energy sink under harmonic excitation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(9): 2567-2576. (in Chinese))
- [31] 张振. 惯容型非线性能量汇及其结构减振[D]. 上海: 上海大学, 2019. (ZHANG Zhen. Inertial nonlinear energy sink and its suppression of structural vibration[D]. Shanghai: Shanghai University, 2019. (in Chinese))