

宽带噪声激励下碰撞摩擦系统的 随机响应和稳定性的研究*

马 兰¹, 田丽丽¹, 刘 莉^{1,2}

(1. 宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021;
2. 西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710072)

摘要: 研究了宽带噪声激励下碰撞摩擦系统的随机响应和概率为 1 渐近稳定性. 基于非光滑变换和随机平均法得到了碰撞摩擦系统响应的稳态概率密度, 并通过与 Monte Carlo 数值模拟结果对比, 验证了上述解析方法的有效性. 讨论了摩擦力和碰撞恢复系数对系统稳态概率密度的影响. 基于平均 Itô 微分方程, 得到其线性化方程的最大 Lyapunov 指数的表达式, 通过 Lyapunov 指数确定系统平凡解的稳定性. 结果表明, 改变碰撞恢复系数和摩擦系数能调整系统的随机稳定性.

关键词: 碰撞摩擦系统; 随机平均法; 稳态响应; 随机稳定性

中图分类号: O211.63 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440313

Stochastic Responses and Stability Analysis of Vibro-Impact Systems With Friction Under Wideband Noise Excitation

MA Lan¹, TIAN Lili¹, LIU Li^{1,2}

(1. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, P.R.China;

2. School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

Abstract: The stochastic responses and the asymptotic stability with probability 1 of vibro-impact systems with friction under wideband noise excitation were investigated. The Zhuravlev non-smooth transformation and the stochastic averaging method were extended to obtain the steady-state probability density functions of the system. The accuracy of the method was verified through comparison of the theoretical results with those from the Monte Carlo simulations. The effects of the friction force and the vibro-impact restitution coefficient on the system responses were studied. Furthermore, The Lyapunov exponent of the linearized averaged Itô equation was derived and the stability of the trivial solution was determined with the Lyapunov exponent. The results show that, changing the frictional coefficient and the vibro-impact restitution coefficient could adjust the system stochastic stability.

Key words: vibro-impact system with friction; stochastic averaging method; steady state response; stochastic stability

* 收稿日期: 2023-10-18; 修订日期: 2024-05-12

基金项目: 宁夏自然科学基金(2020AAC03064); 国家自然科学基金(12262032)

作者简介: 马兰(2000—), 女(E-mail: ml2676649359@163.com);

刘莉(1979—), 女, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: liuli0951@126.com).

引用格式: 马兰, 田丽丽, 刘莉. 宽带噪声激励下碰撞摩擦系统的随机响应和稳定性的研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(9): 1235-1242.

0 引言

在物理学与工程学领域中,往往会存在着碰撞、不可微刚度、干摩擦等非光滑因素,例如,由于零部件之间的磨损,热胀冷缩等原因,发生碰撞是不可避免的,而且摩擦也会伴随碰撞同时出现^[1-2].为了避免这些非光滑因素带来的零部件磨损,装置毁坏等问题,研究碰撞摩擦系统的动力学行为就显得尤为重要.不仅如此,现代工程结构和机械工程多处于复杂的环境,其中不可避免地存在着环境噪声、路面或轨道不平度、强风等.这些随机激励在随机振动领域中称为“噪声”,对于碰撞摩擦系统,噪声主要来源于机械器件产生的声音、振动等.按照谱密度是否为常量可分为白噪声和非白噪声两类.噪声在机械工程中广泛存在,对碰撞摩擦系统的动力学行为和性能有着一定的影响.因此,随机碰撞摩擦系统受到了研究者的广泛关注,取得了一些很好的结果.Feng等^[3-4]利用平均 Poincaré 映射及线性系统的叠加原理,研究了随机线性碰撞振动系统的均值响应问题.叶正伟等^[5]结合极坐标变换和随机平均法讨论了 Gauss 白噪声激励下永磁同步电动机模型的随机分岔.Jing等^[6-7]研究了白噪声激励下单自由度碰撞振动系统的响应,得到了系统响应的稳态解.Huang等^[8]利用随机平均法对多自由度碰撞振动系统的随机响应进行了求解.Rong等^[9]用多尺度方法得到了谐和与随机激励共同作用下非线性碰撞振动系统的平均响应.Zhu^[10-11]将指数多项式闭合方法运用到随机激励下碰撞振动系统的研究中,得到了不错的结果.孙娇娇等^[12]研究了色噪声激励下含黏弹项的摩擦系统的随机响应.Tian等^[13]基于等效非线性方法研究了 Gauss 白噪声激励下带有摩擦力的非线性电磁能量采集器的最优负载电阻问题.Virgin等^[14]讨论了碰撞摩擦振动系统在谐波激励下的全局动力学特性.Andreaus等^[15]研究了碰撞摩擦系统的动力学行为.Su等^[16-17]研究了 Gauss 白噪声激励下碰撞振动系统的响应和稳定性.由于白噪声的谱密度是一个常数,具有无限大的能量,是一种理想化的噪声,在实际生活中并不存在,任何真实的随机过程必有一个有限的宽度,称为宽带噪声,可以用数学表达式解析建模进而进行分析.这就促使我们探索非白噪声激励下碰撞摩擦系统的动力学问题.

综上所述,为了避免碰撞摩擦产生的不良影响,将碰撞和摩擦这两个非光滑因素结合起来研究是十分重要的,但是对于非白噪声激励的碰撞摩擦系统研究得比较少,尤其是稳定性.因此,本文讨论宽带噪声激励下碰撞摩擦这两种非光滑因素同时存在的响应和稳定性.

1 系统的描述和随机平均法

本文研究了宽带噪声激励下的 Rayleigh-Van der Pol 碰撞摩擦系统,其运动方程如下:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \xi_1(t))x + (\gamma\dot{x}^2 + \beta x^2 - \alpha)\dot{x} + \mu(\operatorname{sgn}(\dot{x})) = \xi_2(t), \quad x > 0, \quad (1)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0, \quad (2)$$

其中, x 和 \dot{x} 分别是系统的位移和速度; ω_0 是自然频率, α 为阻尼系数; β 和 γ 是非线性的阻尼系数, μ 是摩擦系数; $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是两个相互独立的宽带噪声; x_+ 和 x_- 分别是系统碰撞前和碰撞后的速度; $0 < r \leq 1$ 为碰撞恢复系数,描述碰撞时系统的能量损失程度.期望和功率谱密度函数分别为

$$E(\xi_i) = 0, \quad S_i(\omega) = \frac{D_{ii}}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \alpha_i}, \quad i = 1, 2.$$

宽带噪声 ξ_i ($i = 1, 2$) 利用白噪声的一阶滤波产生:

$$\dot{\xi}_i(t) + \alpha_i \xi_i = W_i(t), \quad i = 1, 2,$$

其中 α_i ($i = 1, 2$) 表示带宽, $W_i(t)$ 表示强度为 $2D_{ii}$ 的白噪声.

对碰撞系统使用 Zhuravlev 非光滑坐标变换^[18]:

$$x = |y| = y \operatorname{sgn}(y), \quad \dot{x} = \dot{y} \operatorname{sgn}(y), \quad \ddot{x} = \ddot{y} \operatorname{sgn}(y), \quad \operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} -1, & y < 0, \\ 0, & y = 0, \\ 1, & y > 0. \end{cases} \quad (3)$$

将碰撞项表示为脉冲阻尼的形式:

$$(\dot{y}_- - \dot{y}_+) \delta(t - t_*) \approx (1 - r) |\dot{y}| \delta(y) \dot{y}. \quad (4)$$

将式(3)和(4)代入原系统(1)、(2)中得到新的近似等价系统:

$$\ddot{y} + (\gamma\dot{y}^2 + \beta y^2 - \alpha)\dot{y} + (1-r)|\dot{y}|\delta(y)\dot{y} + \omega_0^2 y + \mu(\operatorname{sgn}(\dot{y})) = \gamma\xi_1(t) + \operatorname{sgn}(y)\xi_2(t). \quad (5)$$

由于系统中各项激励的系数和噪声强度取值比较小,系统运动可以看成是拟周期运动,利用标准随机平均法,设系统解的形式为

$$y(t) = A\cos\theta, \quad \dot{y}(t) = A\omega_0\sin\theta, \quad \theta = \omega_0 t + \Theta. \quad (6)$$

将方程(6)代入方程(5),得到关于 A 和 Θ 的随机微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\gamma\omega_0^2 A^3 \sin^4\theta - \beta A^3 \sin^2\theta \cos^2\theta + \alpha A \sin^2\theta - (1-r)|\sin^3\theta|\omega_0\delta(A\cos\theta) - \\ & \frac{\mu}{\omega_0}|\sin\theta| + \frac{1}{\omega_0}\sin\theta \operatorname{sgn}(A\cos\theta)\xi_1(t) - \frac{1}{\omega_0}A\sin\theta \cos\theta \cdot \xi_2(t), \\ \dot{\Theta} = & -\gamma\omega_0^2 A^2 \sin^3\theta \cos\theta - \beta A^2 \sin\theta \cos^3\theta - (1-r)\sin\theta \cos\theta |A\omega_0\sin\theta|\delta(A\cos\theta) + \\ & \alpha \sin\theta \cos\theta - \frac{\mu}{A\omega_0}\cos\theta \operatorname{sgn}(\sin\theta) - \frac{1}{A\omega_0}\cos\theta \operatorname{sgn}(\cos\theta)\xi_1(t) - \frac{1}{\omega_0}\cos^2\theta \cdot \xi_2(t). \end{aligned}$$

振幅 $A(t)$ 的平均 Itô 随机微分方程为

$$dA = m(A)dt + \sigma(A)dB(t),$$

漂移系数 $m(A)$ 和扩散系数 $\sigma^2(A)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} m(A) = & \left\langle -A\sin^2\theta [(\gamma A^2 \omega_0^2 \sin^2\theta + \beta A^2 \cos^2\theta - \alpha) + (1-r)|A\omega_0\sin\theta|\delta(A\cos\theta)] + \right. \\ & \left. \frac{\sin\theta \mu \operatorname{sgn}(-A\omega_0\sin\theta)}{\omega_0} + J_{11}(\theta) + J_{12}(\theta) \right\rangle, \\ \sigma^2(A) = & \langle J_{21} + J_{22} \rangle, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_{11}(\theta) = & \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial G_{11}(A, \theta)}{\partial A} G_{11}(A, \theta + \omega_0\tau) \right] R_{11}(\tau) d\tau + \\ & \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial G_{11}(A, \theta)}{\partial \varphi} G_{21}(A, \theta + \omega_0\tau) \right] R_{11}(\tau) d\tau, \\ J_{12}(\theta) = & \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial G_{12}(A, \theta)}{\partial A} G_{12}(A, \theta + \omega_0\tau) \right] R_{11}(\tau) d\tau + \\ & \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial G_{12}(A, \theta)}{\partial \varphi} G_{22}(A, \theta + \omega_0\tau) \right] R_{11}(\tau) d\tau, \\ J_{21}(\theta) = & \int_{-\infty}^{+\infty} [G_{11}(A, \theta) G_{11}(A, \theta + \omega_0\tau)] R_{11}(\tau) d\tau, \\ J_{22}(\theta) = & \int_{-\infty}^{+\infty} [G_{12}(A, \theta) G_{12}(A, \theta + \omega_0\tau)] R_{11}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

进一步计算化简可得

$$\begin{aligned} m(A) = & -\frac{3}{8}A^3\omega_0^2\gamma - \frac{1}{8}\beta A^3 + \frac{1}{2}\alpha A - \frac{2\mu}{\omega_0\pi} - \\ & \frac{A\omega_0}{\pi}(1-r) + \frac{3A\pi}{8\omega_0^2} \frac{D_1}{\pi(\omega_0^2 + \alpha_2^2)} + \frac{\pi}{2A\omega_0^2} \frac{D_2}{\pi(\omega_0^2 + \alpha_2^2)}, \\ \sigma^2(A) = & \frac{\pi A^2}{4\omega_0^2} \frac{D_1}{\pi(4\omega_0^2 + \alpha_1^2)} + \frac{\pi}{\omega_0^2} \frac{D_2}{\pi(\omega_0^2 + \alpha_2^2)}. \end{aligned}$$

利用随机平均方法可以得到平均后的 FPK 方程如下:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A} [m(A)p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} [\sigma^2(A)p].$$

令 $\frac{\partial p(A, t)}{\partial t} = 0$, 上述方程的稳态解为

$$P(A) = \frac{C}{\sigma^2(A)} \exp \left[\int_0^A \frac{2m(u)}{\sigma^2(u)} du \right], \quad (7)$$

式中 C 是归一化常数. 进一步求得能量的概率密度函数为

$$p(H) = p(A) \left| \frac{dA}{dH} \right| = \frac{p(A)}{g(A)} \Big|_{A=U^{-1}(H)}.$$

基于上式可以得到位移和速度的联合概率密度函数:

$$p(y, \dot{y}) = \frac{p(H)}{T(H)} \Big|_{H=(1/2)\dot{x}^2+U(x)}, \quad T(H) = \frac{2\pi}{b_0(A)} \Big|_{A=U^{-1}(H)}.$$

原碰撞振动系统的位移和速度的联合概率密度由非光滑变换的逆变换可以得到

$$p(x_1, x_2) = 2\tilde{p}_{y, \dot{y}}(x_1, x_2),$$

其中 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. 同时通过积分可以求得位移和速度的边缘概率密度:

$$p_{x_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, s) ds, \quad p_{x_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x_2) ds. \quad (8)$$

2 方法的有效性

利用第1节的式(7)和(8)得到系统稳态概率密度函数的理论结果, 通过对比 Monte Carlo 模拟得到的数值解验证第1节中所述分析方法的有效性.

固定系统中的参数取值 $\beta = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.01$, $r = 0.96$, $\omega_0 = 1.0$, $\mu = 0.001$, $\alpha_1 = 2.0$, $\alpha_2 = 2.0$, $D_{11} = 0.01$, $D_{22} = 0.01$. 主要考察摩擦系数 μ , 阻尼系数 β , γ 和碰撞恢复系数 r 对系统振幅、位移、速度的稳态概率密度的影响.

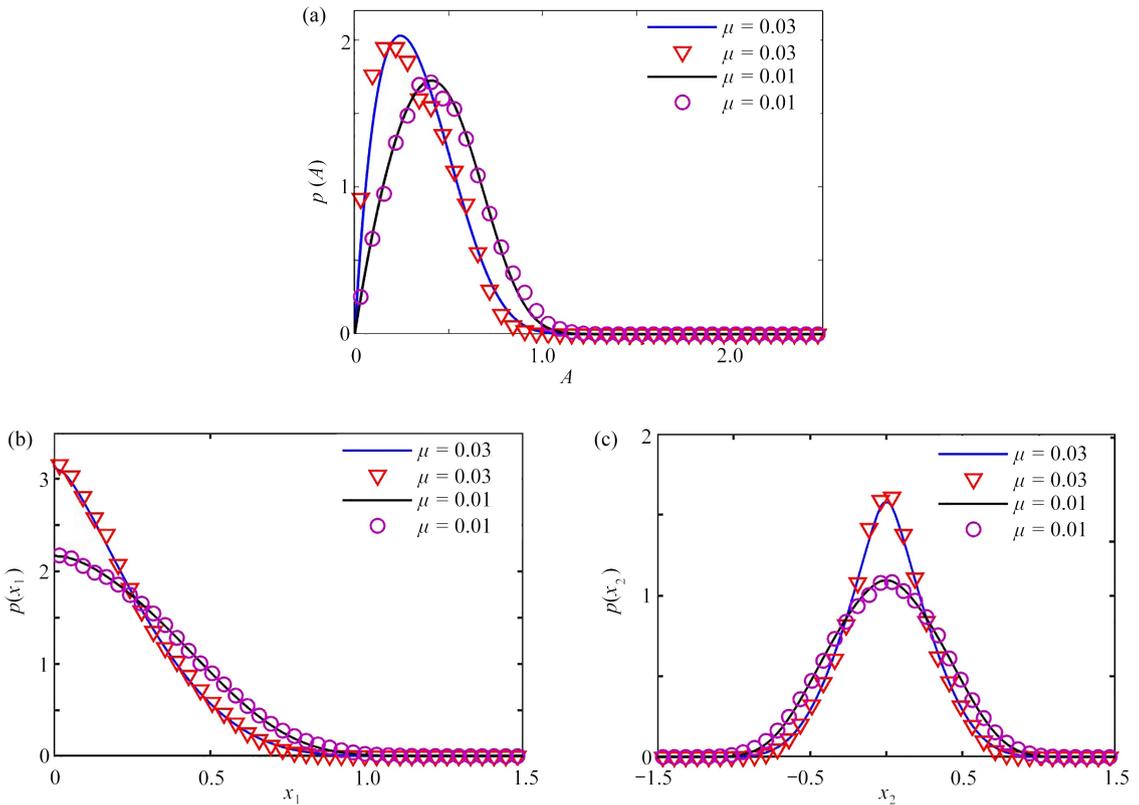


图1 不同摩擦系数下系统稳态响应的概率密度函数

Fig. 1 PDFs of system responses under different values of μ

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

图1和图2分别显示了摩擦系数和碰撞恢复系数的变化对系统稳态概率密度函数的影响, 其中实线表

示近似的理论结果,其余图形表示数值模拟结果.图 1(a)表明摩擦系数的增加使得振幅的概率密度函数的曲线的峰值更高;图 1(b)和 1(c)表明随着摩擦系数的增加,位移和速度的概率密度函数曲线的峰值也相应的增加.通过观察图 2 可以发现,恢复系数 r 的增加能降低振幅、位移和速度的概率密度曲线的峰值,这与摩擦系数对响应的概率密度函数的影响正好相反.

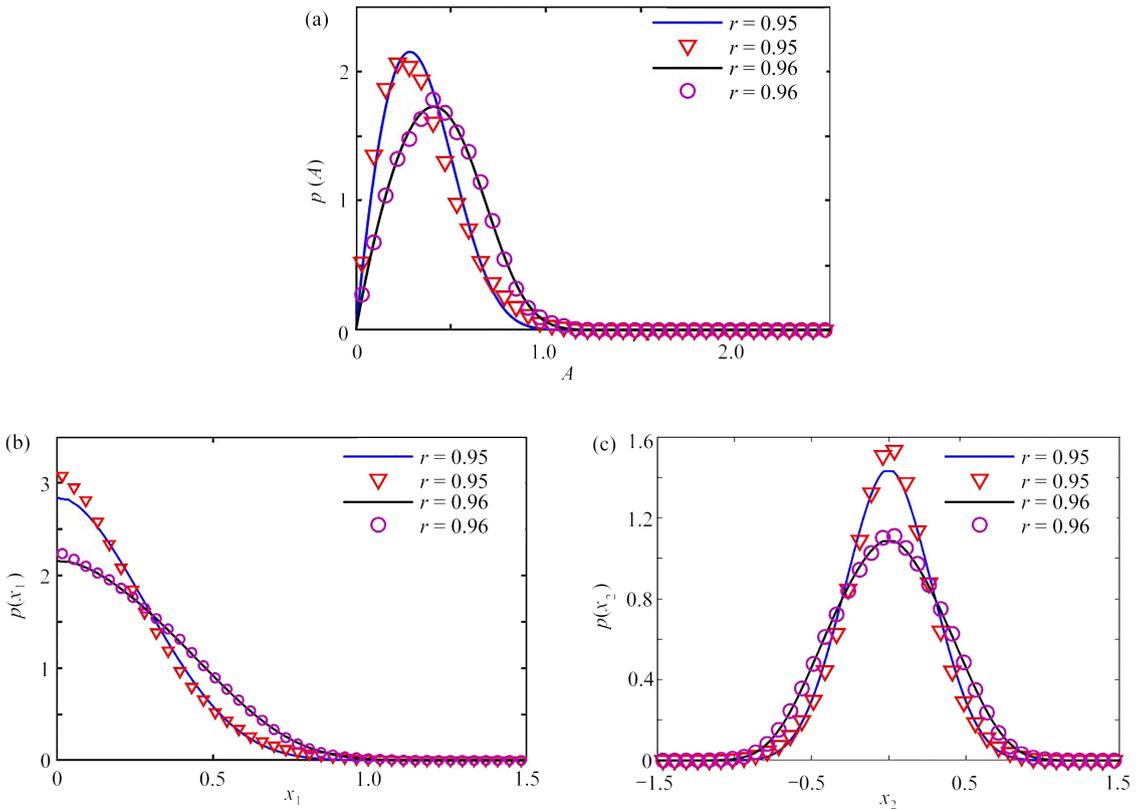
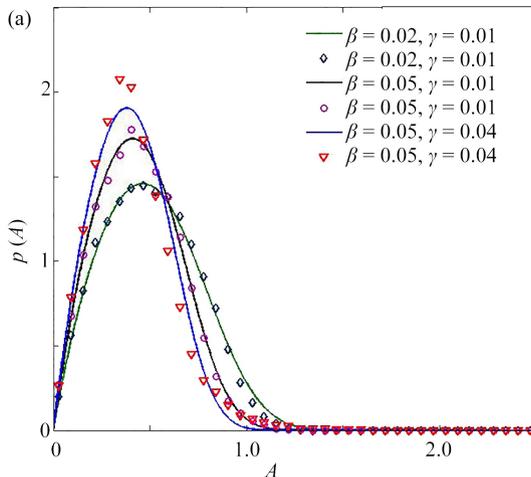


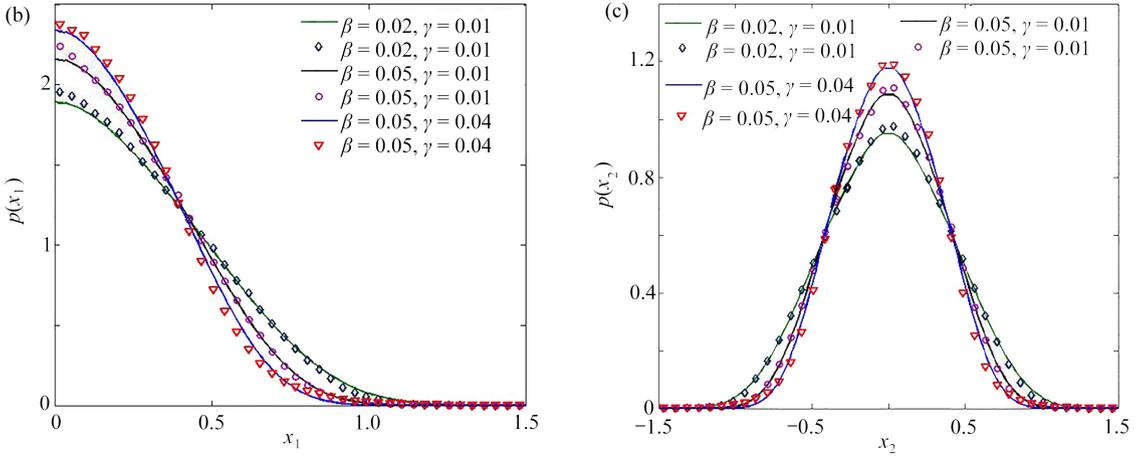
图 2 不同碰撞系数下系统稳态响应的概率密度函数

Fig. 2 PDFs of system responses under different values of r

图 3 给出了不同的非线性阻尼系数 β 和 γ 下系统稳态响应的概率密度函数,其中实线表示近似的理论结果,其余图形表示数值模拟结果.

观察图 3(a) 可以发现,较大的 γ 所对应的振幅的概率密度函数曲线的峰值更高,振子以更大的概率趋于平衡位置.由于系统的位移及速度与振幅密切相关,图 3(b) 和 3(c) 表明 γ 的增加也使得位移和速度的概率密度函数曲线的峰值变大.图中概率密度曲线的变化趋势表明 β 的增加使得系统的概率密度函数的峰值逐渐增大,这与 γ 的影响是相似的.



图3 不同非线性阻尼系数 β 和 γ 下系统稳态响应的概率密度函数Fig. 3 PDFs of system responses under different values of β and γ

3 随机稳定性

由于随机外激致使系统的平稳状态发生某种程度的扩散,而随机参激则让系统原来的平稳状态变得不稳定再重新达到新的平稳状态,系统的响应发生质的变化,这就使得研究参激随机振动的稳定性比研究外激随机振动更为重要.因此考虑只有参激无外激系统的随机稳定性.早期的随机稳定性大多采用 Lyapunov 函数法,鉴于构造 Lyapunov 函数的困难性以及只能得到稳定性的充分条件,因此该方法的适用性不强.近些年来,基于 Oseledec 乘法遍历理论^[19],利用最大 Lyapunov 指数来确定系统稳定性成为一种新趋势,该方法不但可以获得稳定性的充要条件,而且是研究概率为 1 渐近稳定性的最简单方法.因此,本文应用 Lyapunov 指数法研究参激激励下碰撞摩擦系统的概率为 1 渐近稳定性.

系统的运动方程如下:

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \xi_1(t))x + (\beta x^2 + \gamma \dot{x}^2 - \alpha)\dot{x} + \mu \text{sgn}(\dot{x}) = 0, \quad x > 0, \quad (9)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0. \quad (10)$$

系统中的参数的意义和系统(1)、(2)相同.为了将方程(9)在零解处线性化,参考文献[16]中对摩擦项中的符号函数的近似方法,本文采用下面的方法:

$$\mu \text{sgn}(\dot{x}) = \frac{2\mu}{\pi} \arctan(\Theta \dot{x}), \quad \Theta \gg 1, \quad (11)$$

则系统(9)、(10)变为

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \xi_1(t))x + (\beta x^2 + \gamma \dot{x}^2 - \alpha)\dot{x} + \frac{2\mu}{\pi} \arctan(\Theta \dot{x}) = 0, \quad x > 0, \quad (12)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0. \quad (13)$$

将方程(12)在(0,0)处线性化得

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \xi_1(t))x - \alpha \dot{x} + \frac{2\mu\Theta}{\pi} = 0, \quad x > 0, \quad (14)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0. \quad (15)$$

应用式(3)的非光滑变换可得

$$\ddot{y} - \alpha \dot{y} + (1-r)|\dot{y}|\delta(\gamma)\dot{y} + \omega_0^2 y + \frac{2\mu\Theta}{\pi} = y\xi_1(t),$$

利用随机平均原理,得到关于振幅 $A(t)$ 的平均 Itô 随机微分方程:

$$dA = m(A)dt + \sigma(A)dB(t). \quad (16)$$

漂移系数和扩散系数分别为

$$m(A) = \frac{1}{2} \alpha A - \frac{\mu \Theta}{\pi} A - \frac{A \omega_0}{\pi} (1 - r) + \frac{3A\pi}{8\omega_0^2} S_1(2\omega_0),$$

$$\sigma^2(A) = \frac{\pi A^2}{4\omega_0^2} S_1(2\omega_0).$$

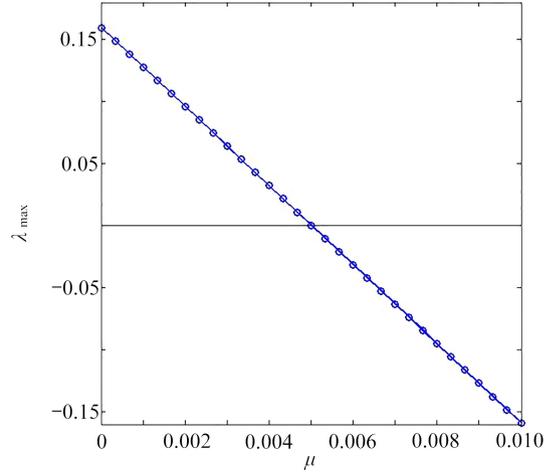
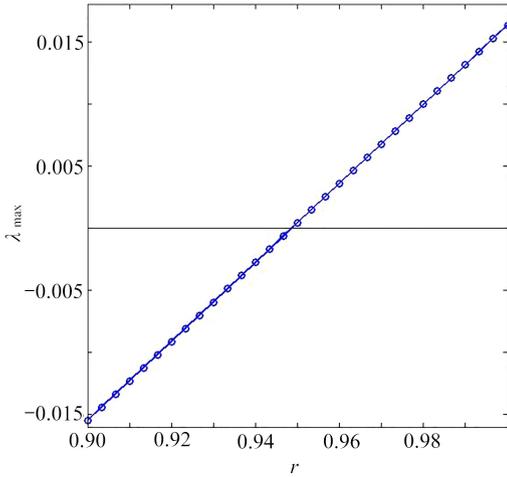


图 4 Lyapunov 指数随碰撞恢复系数 r 和随摩擦系数 μ 的变化

Fig. 4 The variations of TLE with r and μ

下面计算方程式(16)的 Lyapunov 指数,首先在 $A = 0$ 处线性化.相关的线性化的 Itô 方程的形式为

$$dA = m'(0)Adt + \sigma'(0)AdB(t). \quad (17)$$

系统的最大 Lyapunov 指数:

$$\lambda_{\max} = m'(0) - \frac{1}{2} [\sigma'(0)]^2 = \frac{1}{2} \alpha - \frac{\mu \Theta}{\pi} - \frac{\omega_0}{\pi} (1 - r) + \frac{\pi}{4\omega_0^2} S_1(2\omega_0). \quad (18)$$

图 4 描述了最大 Lyapunov 指数随摩擦系数和碰撞恢复系数的变化趋势.从图像变化趋势可以明显看出,最大 Lyapunov 指数随着碰撞恢复系数的增加而增加,而随着摩擦系数的增加而减少.

图 5 讨论了在 (r, μ) 参数平面内,噪声强度 D 对系统(9)的平凡解的稳定区域的影响.如图 5 所示,稳定区域位于每条线的左上方,稳定区域与非稳定区域的分界线由式(18)中的 $\lambda = 0$ 确定.从图像上可以看出,稳定区域的面积随着噪声强度的增大而减小.

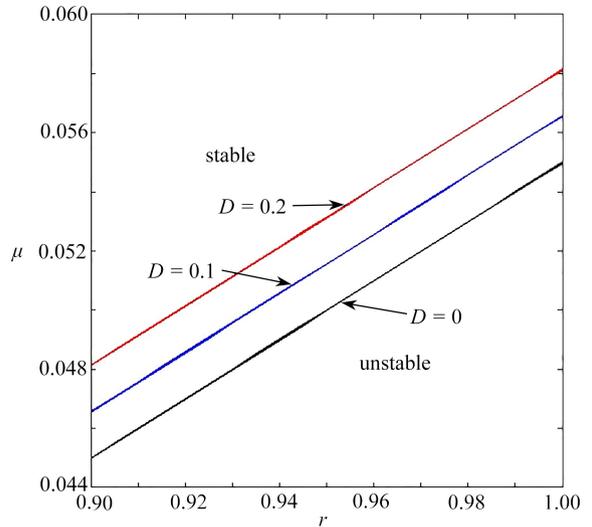


图 5 系统在 (r, μ) 平面内的概率为 1 渐近稳定区域

Fig. 5 The asymptotic stability region with probability one on the plane of (r, μ)

4 结 论

本文首先利用非光滑变换和随机平均法分析了宽带噪声激励下碰撞摩擦系统响应,通过对比数值结果验证了解析方法的有效性.研究表明,系统中摩擦系数、碰撞恢复系数和非线性阻尼系数的改变对系统的稳态响应都有一定的影响.然后,应用最大 Lyapunov 指数法研究了参数激励下系统的概率为 1 渐近稳定性.基于平均 Itô 微分方程的线性化方程计算得到 Lyapunov 指数的表达式,由此得到系统最大 Lyapunov 指数的近似,系统稳定的充要条件是令该 Lyapunov 指数为负.进一步讨论了碰撞恢复系数和摩擦系数对系统稳定性的影响,结果表明,摩擦系数和恢复系数的变化会导致系统由稳定变得不稳定.

参考文献(References):

- [1] KUNZE M. *Non-Smooth Dynamical Systems*[M]. New York: Springer, 2000.
- [2] 张伟, 胡海岩. 非线性动力学理论与应用的新进展[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHANG Wei, HU Haiyan. *New Advances in Nonlinear Dynamics Theory and Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [3] FENG Q, PFEIFFER F. Stochastic model on a rattling system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **215**(3): 439-453.
- [4] FENG Q, HE H. Modeling of the mean Poincaré map on a class of random impact oscillators[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2003, **22**(2): 267-281.
- [5] 叶正伟, 邓生文, 梁相玲. Gauss 白噪声激励下的永磁同步电动机模型的分岔分析[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(7): 884-894. (YE Zhengwei, DENG Shengwen, LIANG Xiangling. Bifurcation analysis of the permanent magnet synchronous motor model under white Gaussian noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(7): 884-894. (in Chinese))
- [6] JING H S, YOUNG M. Random response of a single-degree-of-freedom vibro-impact system with clearance [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1990, **19**(6): 789-798.
- [7] JING H S, SHEU K C. Exact stationary solutions of the random response of a single-degree-of-freedom vibro-impact system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **141**(3): 363-373.
- [8] HUANG Z L, LIU Z H, ZHU W Q. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **275**(1): 223-240.
- [9] RONG H W, WANG X D, XU W, et al. Resonant response of a non-linear vibro-impact system to combined deterministic harmonic and random excitations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45**(5): 474-481.
- [10] ZHU H T. Stochastic response of vibro-impact Duffing oscillators under external and parametric Gaussian white noises[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(3): 954-961.
- [11] ZHU H T. Stochastic response of a vibro-impact Duffing system under external Poisson impulses[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**(1/2): 1001-1013.
- [12] 孙娇娇, 徐伟, 林子飞, 等. 高斯色噪声激励下含黏弹力摩擦系统的随机响应分析[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(8): 852-861. (SUN Jiaojiao, XU Wei, LIN Zifei, et al. Random response analysis of friction systems with viscoelastic forces under Gaussian colored noise excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(8): 852-861. (in Chinese))
- [13] TIAN Y P, WANG Y, JIN X L, et al. Optimal load resistance of a randomly excited nonlinear electromagnetic energy harvester with Coulomb friction[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, **23**(9): 095001.
- [14] VIRGIN L N, BEGLEY C J. Grazing bifurcations and basins of attraction in an impact-friction oscillator[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1999, **130**(1/2): 43-57.
- [15] ANDREAU S U, CASINI P. Friction oscillator excited by moving base and colliding with a rigid or deformable obstacle[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(1): 117-133
- [16] SU M, XU W, YANG G D. Stochastic response and stability of system with friction and a rigid barrier[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, **132**:748-761.
- [17] SU M, XU W, YANG G D. Response analysis of Van der Pol vibro-impact system with Coulomb friction under Gaussian white noise[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, **28**(13): 1830043
- [18] ZHURAVLEV V. A method for analyzing vibration-impact systems by means of special functions[J]. *Mechanics of Solids*, 1976, **11**: 23-27.
- [19] OSELEDEC V I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems [J]. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1968, **19**(2): 197-231.