

颗粒土中剪切带临界状态数学描述及其完全解*

黄文雄, 崔 贤

(河海大学 力学与材料学院, 南京 210098)

摘要: 为正确模拟土体涉及剪切带演化的后失效力学响应, 需采用包含细观特征长度的高阶连续介质力学模型. 笔者利用前期所建立的微极亚塑性模型, 对颗粒土中剪切带的发展过程进行了分析推导, 得到了剪切带临界状态下关键变量所满足的非线性微分方程. 该文展示了上述非线性微分方程的简要推导, 重点讨论了该非线性微分方程的主要性质、主要参数变化范围和求解途径; 通过对剪切带进一步的力学分析补充建立了一个能量方程, 使问题具有确定解. 在此基础上, 应用数值积分求出了剪切带厚度因子和剪切内应力、变形率分布及剪切速度分布的完全解, 其中剪切带厚度因子对于微极亚塑性模型细观参数的确定具有重要作用.

关键词: 剪切带; 微极亚塑性模型; 临界状态; 非线性常微分方程; 完全解

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440295

Mathematical Description and Complete Solution of the Critical State in the Shear Band of Granular Soil

HUANG Wenxiong, CUI Xian

(College of Mechanics and Materials, Hohai University,
Nanjing 210098, P.R.China)

Abstract: High-order continuum models are needed for properly capturing the post-failure mechanical responses of soils involving shear bands. Through analysis on the evolution of shear band in granular soils based on a previously proposed micropolar hypoplastic model, a governing equation for the shear band in the critical state was obtained, which is a special nonlinear ordinary differential equation satisfied by the Cosserat angular velocity. A concise derivation of the governing equation was conducted. The properties of the governing equation, the range of the chief parameter and the approach to the solution were mainly discussed. An energy balance equation was formulated as a complementary condition for the determinant of the problem through analysis on the mechanical properties of the shear band. Then, the complete solutions, including the shear-band thickness factor, the stress distribution, the strain rate components, and the shear velocity, were obtained through numerical integration. The shear band thickness factor is particularly useful in determination of the micro-strength parameter of the constitutive model.

Key words: shear band; micropolar hypoplastic model; critical state; nonlinear ordinary differential equation; complete solution

* 收稿日期: 2023-09-28; 修订日期: 2023-11-23

基金项目: 国家自然科学基金(11772117)

作者简介: 黄文雄(1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: wh670@hhu.edu.cn).

引用格式: 黄文雄, 崔贤. 颗粒土中剪切带临界状态数学描述及其完全解[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(3): 287-294.

0 引言

临界状态在土力学中指土体剪切失效时所趋近的非剪胀塑性流动状态.土体的临界状态只与土的物理特性及作用于土体的平均压力有关,不依赖土体的初始密度,因此是建立土体本构模型的重要参考状态^[1-2].

土体均匀趋于临界状态的失效模式只是一种理想的情形,实际土体破坏往往伴随着剪切带的发展.这种集中于带状区域的应变局部化的形成和演化是认识土体结构失效与破坏的关键,也一直是土力学与颗粒材料力学所关注的研究课题.相对于土体结构的宏观尺度,剪切带的厚度是很小的,实验所观察到的剪切带厚度约为土体颗粒平均粒径的10~15倍左右^[3-4].因此,剪切带两侧有限的相对剪切位移就可在带内引起较大的剪切变形,使得带内材料很快达到临界状态.

经典连续介质本构模型不包含任何与材料细观结构相关的特征长度,预测的剪切带理论厚度为零.因此,常规的土体本构模型只能预测剪切带的产生^[5-6],一般不能规范剪切带的厚度并正确预测土体涉及剪切带演化的后失效行为.在采用有限元等方法分析土体的后失效行为时,数值解具有网格尺寸依赖性.

为克服上述困难,可采用高阶连续介质力学理论,如微极场理论^[7]、高阶梯度理论^[8]等.高阶连续介质力学模型允许引入材料细观特征长度,可以在一定程度上刻画材料中应力和变形在细观尺度上的变化.其中 Cosserat 介质属于微极连续介质力学理论中较简单的一种,通过在连续体中引入质点的转动自由度和偶应力,可以在一定程度上描述材料细观尺度上的应力和变形的变化,从而能恰当模拟剪切带的发展.Mühlhaus 和 Vardoulakis^[9]采用 Cosserat 介质弹塑性模型讨论了土体中剪切带厚度与颗粒平均粒径的关系;Oda^[10]研究了颗粒材料细观结构、偶应力与剪切带的关系;Huang 等^[11]基于 Cosserat 介质理论,将 Gudehus^[12]和 Bauer^[13]所建立的模拟砂土等颗粒土的亚塑性模本构模型推广为微极亚塑性模型,并用于砂土中局部化应变发展模式的数值分析^[14].

基于文献[11]建立的微极亚塑性模型,Huang 和其合作者^[15]分析了颗粒材料在平面 Couette 剪切中,条形区域内的应变局部化的形成与演化机制,并且针对充分发展的平直剪切带,推导得到了临界状态下的控制方程,但针对该控制方程并未得到完全解.本文主要目的是在前期工作^[15]的基础上,探讨剪切带在临界状态下的关键变量,即 Cosserat 转动角速度所满足的非线性常微分方程的主要特性及求解途径,并给出问题的完全解.

1 微极亚塑性模型简述

Cosserat 介质或微极连续介质的宏观质点包含平动和转动自由度.若用矢量 \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}^c$ 分别表示 Cosserat 介质质点的运动速度和微转动(Cosserat 转动)速率矢量,则这种连续介质的变形速率可用下列几何关系所确定的应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ 和微曲率率张量 $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ 描述:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \text{grad } \mathbf{v} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}^c, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \text{grad } \boldsymbol{\omega}^c. \quad (1)$$

Cosserat 介质中的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和偶应力张量 $\boldsymbol{\mu}$ 满足平衡方程:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

其中, \mathbf{b} 为体力矢量;grad 代表矢量和张量的梯度运算,div 代表散度运算; $\boldsymbol{\epsilon}$ 为置换符号;点乘积运算代表两个张量相邻的一对下标的缩并,双点积运算代表两个张量前后两对对应下标的缩并.式(1)和(2)也表明 Cosserat 介质中的应力、偶应力、应变率和微曲率率张量在一般情况下是非对称的.

Gudehus^[12]和 Bauer^[13]以 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和孔隙比 e 为状态变量,建立了一个有效实用的临界状态亚塑性模型(G-B 模型),能较好地模拟砂土等无黏性颗粒土的力学响应.为了能客观模拟颗粒土中剪切带的形成与发展,Huang 等^[11]基于 Cosserat 介质理论将 G-B 模型推广为微极亚塑性模型,用下列张量方程描述 Cauchy 应力及偶应力张量的客观时间导数与应变率、微曲率率张量之间的关系:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = f_s [\hat{a}_0^2 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c + P \hat{\boldsymbol{\sigma}} + f_d \hat{a}_0 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{s}}) R], \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = d_{50} f_s [\hat{a}_1^2 \dot{\boldsymbol{\kappa}}^* + P \hat{\boldsymbol{\mu}} + 2 f_d \hat{a}_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} R], \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} / \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - 1/3 \hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} / (d_{50} \text{tr } \boldsymbol{\sigma})$, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^* = d_{50} \dot{\boldsymbol{\kappa}}$ 分别为正则化应力、偏应力、偶应力和微曲率率张

量;运算符 tr 代表求张量的迹; $P = \hat{\sigma} : \dot{\epsilon}^c + \hat{\mu} : \dot{\kappa}^*$, $R = \sqrt{\|\dot{\epsilon}^c\|^2 + (\hat{a}_1/\hat{a}_0)^2 \|\dot{\kappa}^*\|^2}$; f_s 和 f_d 分别称为刚度因子和密度因子,是平均应力 $p = -\text{tr}\sigma/3$ 和孔隙比 e 的标量函数,因在本文的讨论中不重要,略去具体的表达式,感兴趣的读者可参考文献[12-13]; d_{50} 代表颗粒土平均粒径,为材料细观长度参数, \hat{a}_0, \hat{a}_1 为强度参数.

上述微极亚塑性模型将颗粒土渐近失效的临界状态或无剪胀流动状态条件推广为变形继续发展,但应力、偶应力和体变不再变化.根据 $\dot{\sigma} = \mathbf{0}, \dot{\mu} = \mathbf{0}$ 和体积应变率 $\dot{\epsilon}_v = \text{tr}\dot{\epsilon}^c = 0$ 的条件,从本构模型可以得到^[11] $f_c = 1$ 以及应力和应变率满足的条件:

$$P + \hat{a}_0 R = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\dot{\epsilon}^c}{R} = -\frac{\hat{s}}{\hat{a}_0}, \frac{\hat{a}_1 \dot{\kappa}^*}{\hat{a}_0 R} = -\frac{\hat{\mu}}{\hat{a}_1}, \tag{5}$$

$$\frac{\|\hat{s}\|^2}{\hat{a}_0^2} + \frac{\|\hat{\mu}\|^2}{\hat{a}_1^2} = 1. \tag{6}$$

式(5)和(6)实际为建立模型时预设的临界状态流动法则和强度条件^[11].

2 剪切带内临界状态的数学描述

图 1、2 所示为土体中剪切带脱离体及质点平面运动自由度正向示意图,其中 $\bar{p}, \bar{\tau}$ 和 \bar{m} 分别代表剪切带边界外土体对剪切带作用的法向、切向分布力和分布力偶.文献[15]基于上述微极亚塑性模型,按平面应变问题给出了临界状态的具体数学描述,并分析了剪切带内的应力分量及应变率分量所满足的条件,具体如下.

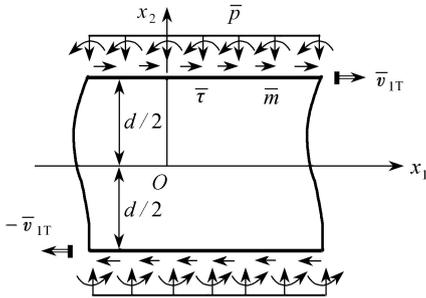


图 1 剪切带脱离体及受力示意图及坐标系选取
Fig. 1 Schematic diagram for the shear band with applied forces and coordinates

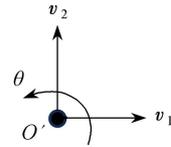


图 2 平面应变条件下 Cosserat 介质质点自由度
Fig. 2 Degrees of freedom of a Cosserat continuum particle in the plane strain condition

建立如图 1 所示坐标系, x_1 轴沿剪切带中间层面, x_2 垂直于剪切方向.图 2 指出在此坐标系中 Cosserat 介质质点运动自由度的正向.剪切带上、下边界之外土体仅作刚体运动.为简化分析,不妨以 x_1 轴为运动参照,即以 x_1 轴为水平速度零点,剪切带上部、下部边界相对 x_1 轴分别向右、向左作反对称水平向运动,相对剪切速度为 \bar{v}_{1T} .按剪切带受力和变形特点知,剪切带内各变量只是坐标 x_2 的函数,对 x_1 的偏导数应为零.由此可以确定剪切带内部非零应力、偶应力、应变率和微曲率率分量分别为 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, σ_{12} , σ_{21} , μ_{32} ;

$\dot{\epsilon}_{12}^c = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \theta$, $\dot{\epsilon}_{21}^c = -\theta$, $\dot{\kappa}_{32} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2}$, 这里为简化符号表达用 θ 代表 Cosserat 转动角速度.根据剪切带的几何特

性、坐标选取和各物理及几何量的正负号规定知, $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \dot{\epsilon}_{12}^c, \theta$ 应为 x_2 的偶函数, $\mu_{32}, \partial\theta/\partial x_2$ 为 x_2 的奇函数.在此条件下,忽略体力的作用,平衡方程(2)只包含以下 3 个独立的分量等式:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_2} - (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0, \quad -d/2 < x_2 < d/2, \tag{7}$$

其中 d 代表剪切带的厚度.平衡方程前两式表明在剪切带内, σ_{12} 和 σ_{22} 为常量,并且根据 $x_2 = \pm d/2$ 处边界条件知, $\sigma_{22} = -p = -\bar{p}$, $\sigma_{12} = \bar{\tau}$, $\hat{\sigma}_{12} = \bar{\tau}/(-3\bar{p}) < 0$.本文所要研究的是土体中理想化的剪切带临界状态数学描述,忽略体力可以极大地简化数学描述.

根据上述应力状态,剪切带内临界状态强度条件(5)简化为

$$\frac{\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{a}_0^2} + \frac{\hat{\sigma}_{21}^2}{\hat{a}_0^2} + \frac{\hat{\mu}_{32}^2}{\hat{a}_1^2} = 1, \quad -\frac{d}{2} \leq x_2 \leq \frac{d}{2}. \quad (8)$$

令 $\alpha = -\hat{\sigma}_{12}/\hat{a}_0 = \bar{\tau}/(3\bar{p}\hat{a}_0) = \text{const}$, 流动法则(5)可写成

$$\frac{\dot{\epsilon}_{12}^c}{R} = -\frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{a}_0} = \alpha, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{21}^c}{R} = -\frac{\theta}{R} = -\frac{\hat{\sigma}_{21}}{\hat{a}_0}, \quad \frac{\hat{a}_1 \dot{\kappa}_{32}^*}{\hat{a}_0 R} = \frac{\theta'}{R} = -\frac{\hat{\mu}_{32}}{\hat{a}_1}, \quad (9)$$

这里引入了无量纲长度因子 $\xi = x_2/l_c$, 并记 $\theta' = d\theta/d\xi$, 其中

$$l_c = \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0} d_{50} \quad (10)$$

称为材料的细观特征长度,它与土体平均粒径 d_{50} 呈正比,并与材料细观和宏观强度参数之比相关。

将流动法则(9)代入平衡方程(7)的第三式,可得到关于 θ 的控制方程(参考附录):

$$\left(\frac{\theta'}{\tilde{R}}\right)' - \frac{\theta}{\tilde{R}} = \beta, \quad -\frac{\xi_d}{2} < \xi < \frac{\xi_d}{2}, \quad (11)$$

其中, $\xi_d = d/l_c$ 为剪切带厚度的无量纲参数或剪切带的厚度因子;

$$\tilde{R} = \sqrt{\theta^2 + (\theta')^2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \text{const}. \quad (12)$$

3 剪切带临界状态完全解

上节推导表明,微极亚塑性模型所模拟颗粒土中的剪切带趋于临界状态(无剪胀流动状态)时,带内质点的 Cosserat 转动角速度 θ 满足非线性常微分方程(11).本文的主要目标是通过求解方程(11)获得剪切带厚度因子及带内各变量的分布规律.具体讨论如下。

3.1 方程的特点

本文所要求解的控制方程(11)具有以下几个主要特点:

1) 方程(11)是关于函数变量 θ 的二阶常微分方程.由于方程中包含了函数 \tilde{R} 及其导数,且 \tilde{R} 是 θ 及其导数的非线性函数,因此方程(11)具有强烈非线性特性,对基本变量 θ 直接的解析积分存在困难。

2) 方程(11)关于基本变量 θ 具有齐次性,若 $\theta(\xi)$ 是方程的解,则对于任意常数 A , $A\theta(\xi)$ 也是方程的解。

3) 剪切带的基本特征是其内部材料处于流动状态,外部材料作不变形的刚性运动,因此在剪切带内部 $\theta \neq 0$,在边界 $\xi = \pm\xi_d/2$ 处应有 $\theta = 0$.因此剪切带的厚度因子 ξ_d 由 θ 的一个完整变化周期决定,并且与 θ 的绝对值无关。

3.2 问题的形式解

为求解方程(11),引入如下的变量替换:

$$y = \frac{\theta}{\tilde{R}}, \quad z = \frac{\theta'}{\tilde{R}}. \quad (13)$$

容易验证

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{\tilde{R}^2}[\theta^2 + (\theta')^2] = 1, \quad -\frac{\xi_d}{2} \leq \xi \leq \frac{\xi_d}{2}.$$

考虑先在半带厚 ($0 \leq \xi \leq \xi_d/2$) 内求解 θ 和其余变量,再利用对称性和反对称性获得完全解.根据图 1 坐标系选择及剪切带中各变量正负号规定,应有 $\theta \leq 0, \theta' \geq 0$, 因此有 $y \leq 0, z \geq 0$, 从而

$$y = -\sqrt{1 - z^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_d/2. \quad (14)$$

此外,在剪切带中心和边界处分别有

$$\xi = 0: z = 0, y = -1; \quad \xi = \xi_d/2: y = 0, z = 1. \quad (15)$$

将替换变量(13)和(14)代入式(11),问题归结为在半带厚内求解 $z = z(\xi)$, 满足方程

$$\frac{dz}{\beta - \sqrt{1-z^2}} = d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\xi_d}{2}, \quad (16)$$

中间变量 $z = z(\xi)$ 应对式(16)直接积分获得,另一中间变量 $y = y(\xi)$ 可按式(14)求出,同时,利用 $\xi = \xi_d/2$ 处边界条件可得厚度因子表达式:

$$\xi_d/2 = \int_0^1 \frac{dz}{\beta - \sqrt{1-z^2}}. \quad (17)$$

求得中间变量 $z(\xi)$ 和 $y(\xi)$ 后,利用流动法则(9)可求出正则化的应力和偶应力分量:

$$\frac{\sigma_{12}}{\hat{a}_0 \bar{p}} = 3\alpha, \quad \frac{\sigma_{21}}{\hat{a}_0 \bar{p}} = -3 \frac{\theta}{R} = -3\sqrt{1-\alpha^2} y(\xi), \quad \frac{\mu_{32}}{d_{50} \hat{a}_{1\bar{p}}} = 3 \frac{\theta'}{R} = 3\sqrt{1-\alpha^2} z(\xi). \quad (18)$$

进一步,利用关系 $\frac{\theta'}{\theta} = \frac{z(\xi)}{y(\xi)}$ 积分,可得到下列表达式:

$$\hat{\theta}(\xi) = -\exp\left(\int_0^\xi \frac{z(\zeta)}{y(\zeta)} d\zeta\right), \quad \hat{\theta}'(\xi) = \frac{z(\xi)}{y(\xi)} \hat{\theta}(\xi), \quad \hat{R}(\xi) = \frac{\hat{\theta}(\xi)}{y(\xi)}, \quad (19)$$

其中记 $\hat{\theta} = \theta / |\theta_0|$, $\hat{\theta}' = \theta' / |\theta_0|$, $\hat{R} = \tilde{R} / |\theta_0|$; $\theta_0 < 0$ 代表 θ 在 $\xi = 0$ 处的值.在此基础上可得到剪切带中正则化的应变率与微曲率率分量表达式:

$$\hat{\varepsilon}_{12}^c = \frac{\dot{\varepsilon}_{12}^c}{|\theta_0|} = \beta \hat{R}(\xi), \quad \hat{\varepsilon}_{21}^c = \frac{\dot{\varepsilon}_{21}^c}{|\theta_0|} = -\theta \hat{R}(\xi), \quad \hat{\kappa}_{32} = \frac{l_c \dot{\kappa}_{32}}{|\theta_0|} = \hat{\theta}'(\xi). \quad (20)$$

此外,根据几何关系 $\dot{\varepsilon}_{12}^c = \partial v_1 / \partial x_2 + \theta$, 可得到剪切带内速度分布:

$$\frac{v_1(\xi)}{|\theta_0|} = l_c \left(\beta \int_0^\xi \hat{R} d\xi - \int_0^\xi \hat{\theta} d\xi \right). \quad (21)$$

令 $\xi = \xi_d/2$, 可以得到剪切带中心 Cosserat 转动角速度与边界处剪切速率的线性关系式:

$$\frac{\bar{v}_{1T}}{l_c |\theta_0|} = \beta \int_0^{\xi_d/2} \hat{R} d\xi - \int_0^{\xi_d/2} \hat{\theta} d\xi. \quad (22)$$

此式表明 Cosserat 转动角速度 θ 以及其他变形速率分量的绝对值大小与剪切速率 \bar{v}_{1T} 成正比.这是率无关本构模型应有的结果.

3.3 参数的确定和问题的完全解

由于未能求出式(16)的解析积分,上述剪切带中各变量的表达式仅是问题的形式解.本文中拟采用数值积分求出 $z \sim \xi$ 关系及其余各变量的数值解.为此,需要确定方程(11)中参数 β 的具体数值.

根据第2节的分析,偶应力 μ_{32} 为 x_2 的奇函数,并且在剪切带边界 $x_2 = \pm d/2$ 处, $\mu_{32} = \pm \bar{m}$.因此在剪切带中间 $x_2 = 0$ 处, $\mu_{32} = 0$, $\partial \mu_{32} / \partial x_2 > 0$.根据强度条件(8),

$$x_2 = 0: \quad \frac{\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{a}_0^2} + \frac{\hat{\sigma}_{21}^2}{\hat{a}_0^2} = 1. \quad (23)$$

根据平衡方程(7)的第三式知, $(\sigma_{12} - \sigma_{21})|_{\xi=0} = (\partial \mu_{32} / \partial x_2)|_{\xi=0} > 0$.

若令剪切带中间处剪应力分量之比值 $r_0 = (\sigma_{21} / \sigma_{12})|_{\xi=0}$, 则 $r_0 < 1$.利用这一条件并注意 $\alpha = -\hat{\sigma}_{12} / \hat{a}_0$ 以及 β 的表达式(12), 由式(23)可得到

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r_0^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{r_0} > 1. \quad (24)$$

上述分析虽然给出了参数 β 的范围,但尚不能确定 β 的具体值.通过假定 r_0 (或 β) 的不同值,按数值解可求得半剪切带厚度因子 $\xi_d/2$ 的对应值.结果表明(如图3所示),剪切带厚度因子 ξ_d 对参数 r_0 (或 β) 具有强烈的依赖关系.

为确定参数 r_0 或 β 的具体数值,还需要建立一个补充条件.为此,将图1中剪切带上半部分作为脱离体分析其能量耗散关系.本构关系不包含任何热能相关物理量,隐含了将材料变形过程看作一个热力学等温过程,系统的能量守恒简化为机械能守恒,即剪切带流动中材料的内能变化率等于剪切带外部作功功率: \dot{W}^{int}

$= \dot{W}^{\text{ext}}$. 对于当前考虑的剪切带上半部分脱离体, $\dot{W}^{\text{int}} = \int_0^{d/2} (\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^c + \sigma_{21} \dot{\epsilon}_{21}^c + \mu_{32} \dot{\kappa}_{32}) dx_2$, 外部对剪切带作功率为脱离体上、下边界处切向、法向分布力和分布力偶与相应位移速率和转动速率乘积: $\dot{W}^{\text{ext}} = (\bar{\tau}v_1 + m\theta)_{x_2=0} + (\bar{\tau}v_1 + \bar{m}\theta)_{x_2=d/2}$. 注意在 $x_2 = 0$ 处 $m = 0$, 在边界 $x_2 = d/2$ 处 $\theta = 0$, 而脱离体上、下边界相对剪切速率为 \bar{v}_{1T} . 因此有

$$\int_0^{d/2} (\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^c + \sigma_{21} \dot{\epsilon}_{21}^c + \mu_{32} \dot{\kappa}_{32}) dx_2 = \bar{\tau} \bar{v}_{1T}. \quad (25)$$

上式两边同除因子 $-3\bar{p}$, 并注意 $\bar{\tau}/3\bar{p} = \alpha \hat{a}_0$ 以及等式(4): $\hat{\sigma}_{12} \dot{\epsilon}_{12}^c + \hat{\sigma}_{21} \dot{\epsilon}_{21}^c + \hat{\mu}_{32} \dot{\kappa}_{32}^* = P = -\hat{a}_0 R$, 可得到

$$\alpha \bar{v}_{1T} = \int_0^{d/2} R dx_2 = \frac{l_c |\theta_0|}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_0^{\xi_{d/2}} \hat{R} d\xi. \quad (26)$$

与式(22)联立消去 \bar{v}_{1T} 后可得到

$$\beta = - \int_0^{\xi_{d/2}} \hat{R} d\xi / \int_0^{\xi_{d/2}} \hat{\theta} d\xi. \quad (27)$$

此式为假定的参数 β 值提供了一个后验条件. 正确的结果应使 β 的后验值与通过设定 r_0 得到的设定值相等, 据此确定参数从而获得问题的完全解.

图4所示为根据一系列设定的 r_0 按式(25)计算的 β 先验值, 以及根据假设值求解问题后按式(24)计算得到的 β 后验值. 要求二者相等求得 $\beta \approx 1.002$, 对应 $r_0 \approx 0.998$. 通过数值积分求解得到的剪切带厚度因子 $\xi_d \approx 94.25$, 对应剪切带内主要变量的数值解如图5—8所示. 其中图5、6分别展示的是中间变量 $y(\xi)$ 和 $z(\xi)$ 、变量 $\hat{\theta}(\xi)$, $\hat{\theta}'(\xi)$ 和 $\hat{R}(\xi)$ 在剪切带半厚度内的变化规律; 图7、8分别展示的是正则化的应力和偶应力、正则化的应变率、微曲率率以及剪切速率在整个剪切带厚度内的分布规律. 这些结果展示了在剪切带厚度这样较小尺度范围内, 各应力和应变分量连续而剧烈的变化以及显著的 Cosserat 效应, 即存在 Cosserat 转动、偶应力以及两个剪应力分量不相等, 在剪切带边缘处这种 Cosserat 效应尤为显著.

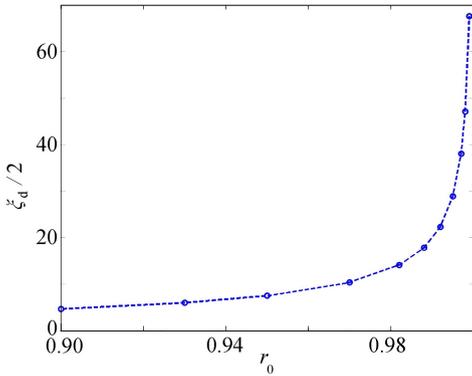


图3 剪切带厚度因子 $\xi_d/2$ 对参数 r_0 的依赖关系

Fig. 3 Shear band thickness factor $\xi_d/2$ vs. parameter r_0

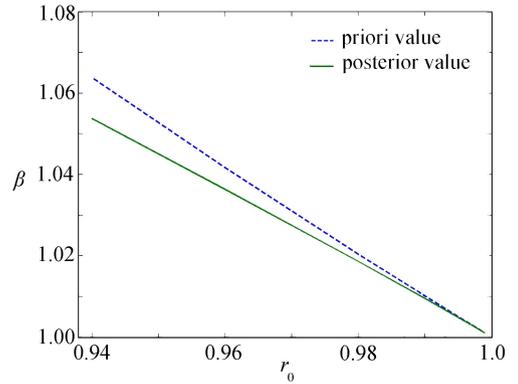


图4 对应 r_0 设定值参数 β 的先验和后验值

Fig. 4 Priori and posteriori values of β vs. parameter r_0

3.4 剪切带厚度因子的作用

Cosserat 介质模型常被用于研究材料的和应变局部化及细观结构有关的尺寸效应. 这类模型往往包含一个细观特征长度和/或其他细观材料参数. 本文采用的微极亚塑性模型, 以颗粒土平均粒径 d_{50} 作为材料细观特征长度的参考值, 材料的剪切带厚度则由式(10)所表达的特征长度 l_c 所规范. 其中 \hat{a}_1 是体现材料细观结构影响的关键参数, 该参数的直接实验测定存在困难. 另一方面, 剪切带的厚度却可以通过简单剪切^[3]或双轴压缩^[4]等实验中测定. 在求出剪切带厚度因子 ξ_d 后, 按式(10)可以给出一个细观强度 \hat{a}_1 参数与剪切带厚度 d 的关系:

$$\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0} = \xi_d \frac{d_{50}}{d}. \quad (28)$$

在颗粒土平均粒径 d_{50} 和土体宏观强度参数 \hat{a}_0 已经确定的条件下, 此式为细观材料参数 \hat{a}_1 的确定提供

了一种有效途径,因此,剪切带厚度因子对于材料模型细观参数的确定具有重要作用。

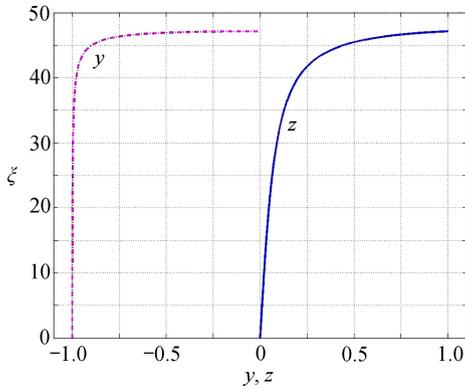


图 5 半带厚内 $y(\xi)$ 和 $z(\xi)$

Fig. 5 Variations of $y(\xi)$ and $z(\xi)$ in the half shear band

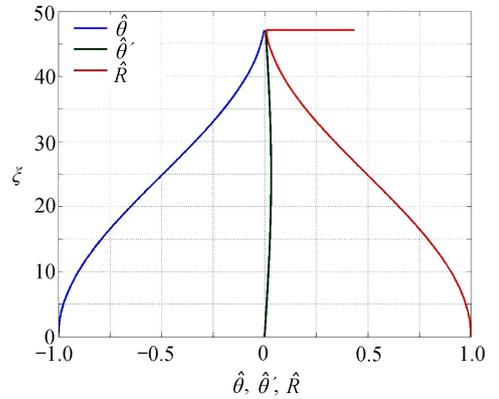


图 6 半带厚内 $\hat{\theta}(\xi)$, $\hat{\theta}'(\xi)$ 和 $\hat{R}(\xi)$

Fig. 6 Variations of $\hat{\theta}(\xi)$, $\hat{\theta}'(\xi)$ and $z(\xi)$ in the half shear band

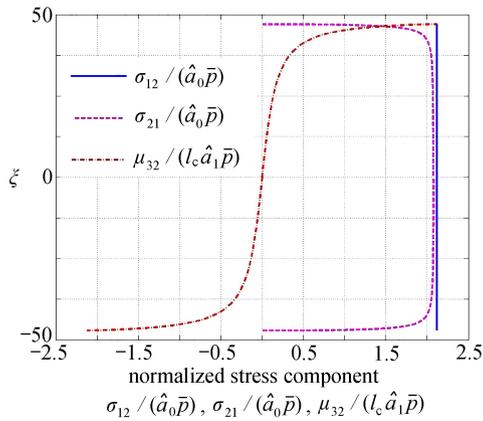


图 7 剪切带内正则化应力、偶应力分布

Fig. 7 Distributions of the normalized stress and the couple stress components in the shear band

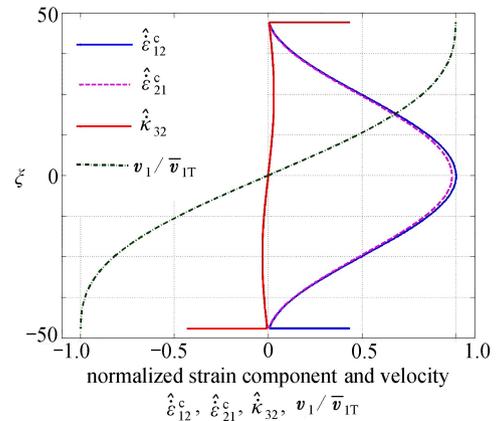


图 8 剪切带内正则化应变率、微曲率率和剪切速率分布

Fig. 8 Distributions of the normalized strain rate, the micro-curvature rate and the shear velocity in the shear band

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本。

4 结 论

剪切带的厚度具有土体颗粒粒径尺度相近的量级,带内变形量的剧烈变化只有采用高阶连续介质力学模型才能恰当模拟.采用笔者^[11]先期提出的微极亚塑性模型模拟的理想颗粒土,剪切带的临界状态(无剪胀流动状态)可以通过一组流动法则、强度条件和关于 Cosserat 转动角速度的一个非线性常微分方程描述.该方程的解析求解具有难度.笔者在本文中结合剪切带的基本特征,讨论了该微分方程的一些主要特点和关键参数的取值范围,通过应用能量守恒关系补充完备了求解条件,从而能够利用数值积分的方法求出剪切带厚度因子及带内应力、变形率各分量的分布规律等完全解.这一解答揭示了颗粒土失效时凝聚在小尺度范围内的材料剪切流动机制,而剪切带厚度因子与细观特征长度对于本构模型中细观强度参数的确定具有重要作用.此外,形如式(11)这样有趣的非线性常微分方程也值得应用数学研究者的关注。

附录 方程(12)的推导

平衡方程(7)第三式两边同除常量 $\hat{a}_0 \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = -\hat{a}_0 3\bar{p}$ 并注意 $\hat{\mu}_{32} = \hat{\mu}_{32} / (d_{50} \text{tr } \boldsymbol{\sigma})$, 方程可写成

$$\frac{\hat{a}_1 d_{50}}{\hat{a}_0} \frac{\partial(\hat{\mu}_{32} / \hat{a}_1)}{\partial x_2} + \frac{\hat{\sigma}_{21}}{\hat{a}_0} = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{a}_0} = -\alpha. \tag{A1}$$

将流动法则(9)代入其中,并注意 $x_2 \hat{a}_0 / (\hat{a}_1 d_{50}) = x_2 / l_c = \xi$, 得到

$$\left(\frac{\theta'}{R}\right)' - \frac{\theta}{R} = \alpha, \quad (\text{A2})$$

其中

$$R = \sqrt{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\|^2 + (\hat{a}_1/\hat{a}_0)^2 \|\dot{\boldsymbol{\kappa}}^*\|^2} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{12}^c{}^2 + \dot{\varepsilon}_{21}^c{}^2 + l_c^2 \dot{\kappa}_{32}^*{}^2} = \sqrt{\alpha^2 R^2 + \theta^2 + \theta'^2}, \quad (\text{A3})$$

上式两边乘方后可求得 R 的下列表达式:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sqrt{\theta^2 + \theta'^2} := \frac{\hat{R}}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (\text{A4})$$

代入式(A2)后得到关于 θ 的常微分方程(11).

参考文献(References):

- [1] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, THURAIRAJAH A. Yielding of clays in states wetter than critical [J]. *Géotechnique*, 1963, **13**(3): 211-240.
- [2] WOOD D M. *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [3] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. *Géotechnique*, 1970, **20**(2): 129-170.
- [4] VARDOULAKIS I, GRAF B. Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments[J]. *Géotechnique*, 1985, **35**(3): 299-317.
- [5] RUDNICKI J W, RICE J. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials [J]. *Journal of Mechanics and Physics for Solids*, 1975, **23**(6): 371-394.
- [6] CHAMBON R, CROCHEPEYER S, DESRUES J. Localization criteria for non-linear constitutive equations of geomaterials[J]. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2000, **5**(1): 61-82.
- [7] ERINGEN A C. *Mechanics of micromorphic continua*[C]//*IUTAM Symposia*. Berlin: Springer-Verlag, 1968: 18-35.
- [8] AIFANTIS E C. On the microstructural original of certain inelastic models[J]. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, **106**(4): 326-330.
- [9] MÜHLHAUS H B, VARDOULAKIS I. The thickness of shear band in granular materials[J]. *Géotechnique*, 1987, **37**(3): 271-283.
- [10] ODA M. Micro-fabric and couple stress in shear bands of granular materials[C]//THORNTON C, ed. *Powders and Grains*. 1993.
- [11] HUANG W, NÜBEL K, BAUER E. Polar extension of a hypoplastic model for granular materials with shear localization[J]. *Mechanics of Materials*, 2002, **34**(9): 563-576.
- [12] GUDEHUS G. A comprehensive constitutive equation for granular materials[J]. *Soil and Foundations*, 1996, **36**(1): 1-12.
- [13] BAUER E. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials[J]. *Soils and Foundations*, 1996, **36**(1): 13-26.
- [14] NÜBEL K, HUANG W. A study of localized deformation pattern in granular media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**(27/29): 2719-2743.
- [15] HUANG W, SLOAN S W, SHENG D. Analysis of plane Couette shear test of granular media in a Cosserat continuum approach[J]. *Mechanics of Materials*, 2014, **69**(1): 106-115.