

# 非线性 sine-Gordon 方程的连续时空 混合有限元方法\*

王婧瑗<sup>1</sup>, 李宏<sup>1</sup>, 何斯日古楞<sup>2</sup>

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021;  
2. 呼和浩特民族学院 数学科学学院, 呼和浩特 010051)

**摘要:** 本文将混合有限元方法和连续时空有限元方法相结合, 构造了 sine-Gordon 方程的连续时空混合有限元离散格式, 引入独立变量  $p = u_t$  来求解, 并将时间变量和空间变量都用有限元方法处理. 此格式可以将方程降阶, 降低有限元空间的光滑性要求, 同时在时间和空间两个方向都能发挥有限元方法的优势, 获得时空高精度的数值解. 理论分析中严格证明了数值解的稳定性, 给出了  $u$  和  $p$  的误差估计. 最后通过数值算例的结果展示了格式的有效性和可行性.

**关键词:** sine-Gordon 方程; 连续时空混合有限元; 稳定性; 误差估计

**中图分类号:** O357.4<sup>+</sup>1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440293

## A Continuous Space-Time Mixed Finite Element Method for Sine-Gordon Equations

WANG Chunyuan<sup>1</sup>, LI Hong<sup>1</sup>, HE Siriguleng<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University,  
Hohhot 010021, P.R.China;*  
2. *School of Mathematical Sciences, Hohhot Minzu College,  
Hohhot 010051, P.R.China*)

**Abstract:** The mixed finite element method was combined with the continuous space-time finite element method to construct a continuous space-time mixed finite element scheme for sine-Gordon equations, through the introduction of independent variable  $p = u_t$  to solve the equations. This scheme uses the finite element method to treat both time and space variables. The space-time mixed finite element scheme can reduce the order of the equation and lower the smoothness requirements on the finite element space. The advantages of the finite element method was utilized in both the time and the space directions, thereby to obtain high-precision space-time numerical solutions. The stability of numerical solutions was strictly proven in the theoretical analysis, and error estimates for  $u$  and  $p$  were provided. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed method were

\* 收稿日期: 2023-09-27; 修订日期: 2023-11-28

**基金项目:** 国家自然科学基金(12161063;12161034); 内蒙古自然科学基金(2021MS01018); 内蒙古自治区高等学校创新团队发展计划(NMGIRT2207)

**作者简介:** 王婧瑗(1996—), 女, 硕士生(E-mail: cywang0524@163.com);  
李宏(1973—), 女, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: smslh@imu.edu.cn).

**引用格式:** 王婧瑗, 李宏, 何斯日古楞. 非线性 sine-Gordon 方程的连续时空混合有限元方法[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(4): 490-501.

demonstrated through numerical examples.

**Key words:** sine-Gordon equation; continuous space-time mixed finite element method; stability; error estimate

## 0 引言

考虑具有 Lipschitz 边界条件的非线性 sine-Gordon 方程:

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t - \gamma \Delta u + \beta \sin u = f(X, t), & (X, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(X, t) = 0, & (X, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = \varphi_0(X), & (X, t) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是一个有界域,  $X = (x_1, x_2)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  是正常数,  $u_0(X)$  和  $u_1(X)$  是已知的光滑函数.

偏微分方程的许多定解问题是不能严格解出的,为了更好地数值模拟复杂的实际问题,发展了出多种数值方法,如有限差分方法、有限元方法(如:混合有限元、间断有限元、连续有限元、时空有限元)、有限体积法等.现在更常见的是基于原有的各种方法的混合应用.

初边值问题(1)是一类非常重要的非线性双曲型方程,它可以用来描述各种物理现象,如凝聚态物理、电磁学、非线性光学等(例如文献[1-2]).目前对问题(1)的数值研究有有限差分法<sup>[2-3]</sup>、有限元法<sup>[4]</sup>、 $H^1$ -Galerkin 混合有限元法<sup>[5]</sup>、 $H^1$ -Galerkin 时空混合有限元法<sup>[6]</sup>、三次配点法<sup>[7]</sup>、交替方向隐格式<sup>[8]</sup>、格子 Boltzmann 方法<sup>[9]</sup>、MQ 拟插值法<sup>[10]</sup>、无网格方法<sup>[11]</sup>、非协调有限元<sup>[12]</sup>等.然而,它们大多采用有限差分格式对时间变量进行离散,这种离散方式在时间上不易获得较高的精度,有的还需要满足一定的时间步长和空间网格参数.

本文对时间变量、空间变量采用相同的离散方式.标准有限元方法只在空间方向上使用有限元方法进行离散,在时间方向一般采取 Euler 或 Crank-Nicolson 等差分离散方法,而本文所用方法在时间方向上也进行有限元离散.因此,与标准有限元方法相比,该方法在空间变量和时间变量上都容易获得较高的精度,并能同时显示出有限元方法在时空两个方向上的优势.据我们所知,连续时空混合有限元方法应用于 sine-Gordon 方程的理论分析和数值模拟尚未得到.主要困难在于式(1)中包含非线性项,它的存在大大增加了理论分析和数值模拟的难度.

本文利用连续时空混合有限元方法研究问题(1)的数值解,将混合有限元方法和连续时空有限元方法相结合,构造 sine-Gordon 方程的连续时空混合有限元离散格式,引入独立变量  $p = u_t$  来求解,并将时间变量和空间变量都用有限元方法处理.可以将方程降阶处理,降低有限元空间的光滑性要求,同时在时间和空间两个方向都能发挥有限元方法的优势,获得时空高精度的数值解.理论分析了格式的稳定性,证明了  $u$  和  $p$  的误差估计,给出了数值算例证明格式的有效性和可行性,与传统有限元方法做了对比,证明本文所提的时空格式通过增加时间基函数多项式次数可提高收敛阶数和计算精度且允许用大时间步长.

本文中,  $c$  表示正常数,在不同的地方取值会有所不同,但均与离散变量  $h$  和  $k$  无关.

## 1 连续时空混合有限元离散格式

为了给出方程(1)的连续时空混合有限元离散格式,首先引入一个辅助变量  $p = u_t$ ,则方程(1)等价于如下二阶微分系统,  $\forall (X, t) \in \Omega \times (0, T]$ ,

$$\begin{cases} u_t = p, \\ p_t + \alpha p - \gamma \Delta u + \beta \sin u = f, \end{cases} \quad (2)$$

其中,边界值和初始值分别为

$$\begin{cases} u(X, t) = 0, & (X, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), & X \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

注意  $u(X, t) |_{\partial\Omega} = 0$  意味着  $p(X, t) |_{\partial\Omega} = u_t(X, t) |_{\partial\Omega} = 0$ ,在时空区域  $\bar{\Omega} \times \bar{J}$  上积分,得到式(2)的弱形

式  $\{u, p\} : \bar{J} \rightarrow H^1(J; H_0^1(\Omega)) \times H^1(J; H_0^1(\Omega))$  满足

$$\int_0^T (u_t, v) dt = \int_0^T (p, v) dt, \quad (4a)$$

$$\int_0^T [(p_t, \omega) + \alpha(p, \omega) + \gamma(\nabla u, \nabla \omega) + \beta(\sin u, \omega)] dt = \int_0^T (f, \omega) dt. \quad (4b)$$

为了建立问题(1)的连续时空混合有限元离散格式,还需要对时、空区间进行剖分.首先剖分时间区间,设  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ ,记此时间剖分为  $\Gamma_k$ ,剖分单元为  $J_n = [t_{n-1}, t_n]$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ),时间步长  $k_n = t_n - t_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ),且  $k = \max_{1 \leq i \leq N} k_i$ .进一步对空间区间  $\bar{\Omega}$  进行剖分,记为  $\mathfrak{S}_h$ ,剖分单元记为  $K$ ,剖分直径记为  $h_K$ ,且  $h = \max_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K$ .用  $V_{hm}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  和  $W_{hm}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  表示由定义在区间  $\bar{\Omega}$  剖分  $\mathfrak{S}_h$  上的  $m$  次分片连续多项式函数组成的空间,即

$$V_{hm}(\Omega) = \{v_h \in V \mid v_h|_K \in P_m(K), \forall K \in \mathfrak{S}_h\},$$

$$W_{hm}(\Omega) = \{w_h \in W \mid w_h|_K \in P_m(K), \forall K \in \mathfrak{S}_h\},$$

其中  $P_m(K)$  表示  $K$  上的关于空间变量的次数不超过  $m$  的多项式空间.

用  $V_{kl}([0, T])$  和  $W_{kl}([0, T])$  表示由定义在  $\bar{J}$  上的,关于时间变量  $t$  的次数不超过  $l$  的分段多项式组成的空间,即

$$V_{kl}([0, T]) = \{v_k \in H^1(J) \mid v_k|_{J_n} \in P_l(J_n), \forall J_n \in \Gamma_k\},$$

$$W_{kl}([0, T]) = \{w_k \in H^1(J) \mid w_k|_{J_n} \in P_l(J_n), \forall J_n \in \Gamma_k\},$$

其中  $P_l(J_n)$  表示  $J_n$  上的关于时间变量  $t$  的次数不超过  $l$  的多项式空间.

定义空间  $V_{hk} = V_{hm}(\Omega) \otimes V_{kl}([0, T])$  和  $W_{hk} = W_{hm}(\Omega) \otimes W_{kl}([0, T])$ .记时空片  $S_h^n = \Omega \times J_n$ ,则  $V_{kl}^n$  和  $W_{kl}^n$  分别表示  $V_{kl}$  和  $W_{kl}$  在每个时空片  $S_h^n$  上的关于时间变量  $t$  的分段多项式组成的空间.在此基础上,记  $V_{hk}^n = V_{hm} \otimes V_{kl}^n$  和  $W_{hk}^n = W_{hm} \otimes W_{kl}^n$ ,即  $V_{hk}^n$  和  $W_{hk}^n$  为每个时空片  $S_h^n$  上的时空近似多项式空间.

相应于式(4)的连续时空混合有限元格式为:求  $\{u^{hk}, p^{hk}\} : [t_{n-1}, t_n] \rightarrow V_{hk}^n \times W_{hk}^n$  满足

$$\int_{J_n} (u_t^{hk}, v^{hk}) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, v^{hk}) dt, \quad \forall v^{hk} \in V_{hk}^n, \quad (5a)$$

$$\int_{J_n} [(p_t^{hk}, \omega^{hk}) + \alpha(p^{hk}, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla u^{hk}, \nabla \omega^{hk}) + \beta(\sin u^{hk}, \omega^{hk})] dt = \int_{J_n} (f, \omega^{hk}) dt, \quad \forall \omega^{hk} \in W_{hk}^n, \quad (5b)$$

对式(5)两边从 1 到  $N$  求和,可得

$$\int_0^T (u_t^{hk}, v^{hk}) dt = \int_0^T (p^{hk}, v^{hk}) dt, \quad \forall v^{hk} \in V_{hk}, \quad (6a)$$

$$\int_0^T [(p_t^{hk}, \omega^{hk}) + \alpha(p^{hk}, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla u^{hk}, \nabla \omega^{hk}) + \beta(\sin u^{hk}, \omega^{hk})] dt = \int_0^T (f, \omega^{hk}) dt, \quad \forall \omega^{hk} \in W_{hk}. \quad (6b)$$

## 2 数值解的稳定性

**定理 1** 如果  $f \in L^2(J; L^2(\Omega))$ ,则  $\{u^{hk}, p^{hk}\}$  有如下稳定性:

$$\begin{cases} \int_0^T \|u^{hk}\|^2 dt \leq c \left( \|u^{hk}(0)\|^2 + \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right), \\ \int_0^T \|p^{hk}\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla u^{hk}\|^2 dt \leq c \left( \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right). \end{cases} \quad (7)$$

**证明** 在式(5b)中,取  $\omega^{hk} = u_t^{hk}$ ,

$$\int_{J_n} [(p_t^{hk}, u_t^{hk}) + \alpha(p^{hk}, u_t^{hk}) + \gamma(\nabla u^{hk}, \nabla u_t^{hk}) + \beta(\sin u^{hk}, u_t^{hk})] dt =$$

$$\int_{J_n} (f, u_i^{hk}) dt, \quad (8)$$

在式(5a)中,取  $v^{hk} = p_i^{hk}, v^{hk} = p^{hk}, v^{hk} = \sin u^{hk}, v^{hk} = f$ , 分别得到

$$\begin{cases} \int_{J_n} (u_i^{hk}, p_i^{hk}) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, p_i^{hk}) dt, \int_{J_n} (u_i^{hk}, p^{hk}) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, p^{hk}) dt, \\ \int_{J_n} (u_i^{hk}, \sin u^{hk}) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, \sin u^{hk}) dt, \int_{J_n} (u_i^{hk}, f) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, f) dt. \end{cases} \quad (9)$$

将上式所得结果代入式(8),可得

$$\begin{aligned} & \int_{J_n} [(p_i^{hk}, p^{hk}) + \alpha(p^{hk}, p^{hk}) + \gamma(\nabla u^{hk}, \nabla u_i^{hk})] dt = \\ & \int_{J_n} [(f, p^{hk}) - \beta(\sin u^{hk}, p^{hk})] dt. \end{aligned} \quad (10)$$

由  $(p_i^{hk}, p^{hk}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p^{hk}\|^2$  及  $(\nabla u_i^{hk}, \nabla u^{hk}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u^{hk}\|^2$  整理得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|p^{hk}\|^2 dt + \alpha \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt + \frac{\gamma}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|\nabla u^{hk}\|^2 dt = \\ & \int_{J_n} (f, p^{hk}) dt - \beta \int_{J_n} (\sin u^{hk}, p^{hk}) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

再由 Cauchy 不等式和 Young 不等式有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|p^{hk}\|^2 dt + \alpha \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt + \frac{\gamma}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|\nabla u^{hk}\|^2 dt \leq \\ & \frac{1}{2} \int_{J_n} \|f\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\sin u^{hk}\|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt. \end{aligned} \quad (12)$$

又由  $\sin u^{hk}$  的有界性,可知

$$\int_{J_n} \|\sin u^{hk}\|^2 dt \leq \int_{J_n} \|u^{hk}\|^2 dt. \quad (13)$$

最后由  $\|u^{hk}\| \leq \|\nabla u^{hk}\|$ , 将上式整理,可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|p^{hk}(t_n)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla u^{hk}(t_n)\|^2 - \frac{1}{2} \|p^{hk}(t_{n-1})\|^2 - \frac{\gamma}{2} \|\nabla u^{hk}(t_{n-1})\|^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \int_{J_n} \|f\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\nabla u^{hk}\|^2 dt. \end{aligned} \quad (14)$$

对上式从 1 到  $N$  求和,可得

$$\begin{aligned} & \|p^{hk}(t_N)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(t_N)\|^2 \leq c \left( \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right) + \\ & \int_0^T \|p^{hk}\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla u^{hk}\|^2 dt. \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)运用 Gronwall 引理再整理,可知

$$\|p^{hk}(t_N)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(t_N)\|^2 \leq c \left( \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right). \quad (16)$$

在式(5a)中,取  $v^{hk} = u^{hk}$ ,

$$\int_{J_n} (u_i^{hk}, u^{hk}) dt = \int_{J_n} (p^{hk}, u^{hk}) dt, \quad (17)$$

由  $(u_i^{hk}, u^{hk}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{hk}\|^2$  得

$$\frac{1}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|u^{hk}\|^2 dt = \int_{J_n} (p^{hk}, u^{hk}) dt. \quad (18)$$

根据 Cauchy 不等式,可知

$$\frac{1}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|u^{hk}\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{J_n} \|u^{hk}\|^2 dt, \quad (19)$$

对上式整理,可得

$$\|u^{hk}(t_n)\|^2 \leq c \left( \|u^{hk}(t_{n-1})\|^2 + \int_{J_n} \|p^{hk}\|^2 dt \right) + \int_{J_n} \|u^{hk}\|^2 dt. \quad (20)$$

对式(20)从1到 $N$ 求和,可得

$$\|u^{hk}(t_N)\|^2 \leq c \left( \|u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|p^{hk}\|^2 dt \right) + \int_0^T \|u^{hk}\|^2 dt. \quad (21)$$

再由 Gronwall 引理可知

$$\|u^{hk}(t_N)\|^2 \leq c \left( \|u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|p^{hk}\|^2 dt \right). \quad (22)$$

最后将式(16)代入上式中,可得

$$\|u^{hk}(t_N)\|^2 \leq c \left( \|u^{hk}(0)\|^2 + \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right). \quad (23)$$

对  $t \in (0, T]$ , 在  $(0, T]$  内通过类似式(16)和(23)的推导,有

$$\|p^{hk}(t)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(t)\|^2 \leq c \left( \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right),$$

$$\|u^{hk}(t)\|^2 \leq c \left( \|u^{hk}(0)\|^2 + \|p^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla u^{hk}(0)\|^2 + \int_0^T \|f\|^2 dt \right).$$

进而,上式在  $t \in (0, T]$  上做积分可得定理的结论.  $\square$

### 3 数值解的误差估计

为了研究  $\{u^{hk}, p^{hk}\}$  的误差估计,引入一些相关时空投影及其性质.首先引入  $p \in H^1(\Omega)$  的 Ritz 投影  $R_h^p: H^1(\Omega) \rightarrow W_{hm}(\Omega)$  满足

$$(R_h^p \nabla p, \nabla \varphi) = (\nabla p, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in W_{hm}(\Omega). \quad (24)$$

在  $L^2$  意义下,  $R_h^p$  可进一步延拓到时空投影  $R_h^p: L^2(J; H^1(\Omega)) \rightarrow W_{hm}(\Omega) \times L^2(J)$ , 满足

$$\int_0^T (R_h^p \nabla p, \nabla \varphi) dt = \int_0^T (\nabla p, \nabla \varphi) dt, \quad \forall \varphi \in W_{hm}(\Omega) \times L^2(J). \quad (25)$$

定义关于时间  $t$  的投影算子  $R_k^p: H^1(J) \rightarrow W_{kl}(J)$ , 满足

$$\int_0^T (R_k^p \sigma)_t \psi_t dt = \int_0^T \sigma_t \psi_t dt, \quad \forall \psi \in W_{kl}(J). \quad (26)$$

在  $L^2$  意义下,  $R_k^p$  可进一步延拓到时空投影  $R_k^p: H^1(J; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega) \times W_{kl}(J)$ , 满足

$$\int_0^T ((R_k^p p)_t, \psi_t) dt = \int_0^T (p_t, \psi_t) dt, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega) \times W_{kl}(J), \quad (27)$$

且  $R_k^p p(t_n) = p(t_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ). 进一步,  $R_h^p$  和  $R_k^p$  满足如下性质.

**引理 1**  $R_h^p$  和  $R_k^p$  由式(25)和(27)定义,则下列结论成立.

① 设  $p \in H^2(J; L^2(\Omega)) \cap L^2(J; H^1(\Omega))$ , 则

$$\begin{cases} (R_h^p p)_t = R_h^p p_t, & (R_h^p p)_{tx} = (R_h^p p_x)_t, & R_h^p R_k^p p_t = R_k^p R_h^p p_t, \\ \|R_h^p p\| \leq \|p\|, & \|R_k^p p\|_{H^1(J)} \leq \|p\|_{H^1(J)}. \end{cases} \quad (28)$$

② 对任意的  $p \in H^1(J) \cap H^r(J)$ , 存在与时间步长  $k$  无关的常数  $c$ , 满足

$$\|R_k^p p - p\|_{H^s(J)} \leq ck^{r-s} \|p\|_{H^r(J)}, \quad 1 \leq r \leq l+1, s = 0, 1. \quad (29)$$

③ 如果  $p \in L^2(\Omega) \cap H^r(\Omega)$ , 则存在与空间步长  $h$  无关的常数  $c$ , 有下面的估计式成立:

$$\|R_h^p p - p\|_s \leq ch^{r-s} \|p\|_r, \quad 1 \leq r \leq m+1, s = 0, 1. \quad (30)$$

④ 如果  $p \in H^1(J; H^r(\Omega)) \cap H^1(J; L^2(\Omega))$ , 则有

$$\|(p - R_h^p p)(t)\|_{L^2(J; H^s(\Omega))} \leq ch^{r-s} \|p(t)\|_{L^2(J; H^r(\Omega))}, \quad 1 \leq r \leq m+1, s = 0, 1. \quad (31)$$

⑤ 如果  $p \in H^1(J; L^2(\Omega)) \cap H^r(J; L^2(\Omega))$ , 则存在与时间步长  $k$  无关的常数  $c$ , 满足

$$\| (p - R_k^p p)(t) \|_{H^s(J; L^2(\Omega))} \leq ck^{r-s} \| p(t) \|_{H^r(J; L^2(\Omega))}, \quad 1 \leq r \leq l+1, s=0,1. \quad (32)$$

⑥ 如果  $p \in H^1(J; L^2(\Omega)) \cap H^{l+1}(J; L^2(\Omega))$ , 且  $p \in H^1(J; L^2(\Omega)) \cap H^1(J; H^{m+1}(\Omega))$ , 则有

$$\| p - R_h^p R_k^p \|_{H^r(J; H^s(\Omega))} \leq c \{ h^{m+1-s} \| p \|_{H^r(J; H^{m+1}(\Omega))} + k^{l+1-r} \| p \|_{H^{l+1}(J; H^s(\Omega))} \}. \quad (33)$$

**证明** 设  $\psi \in W_{hk}$ , 且满足  $\psi(\cdot, 0) = \psi(\cdot, t_n) = 0$ . 由于

$$\begin{aligned} \int_0^T (R_h^p p_t, \psi) dt &= \int_0^T (p_t, \psi) dt = - \int_0^T (p, \psi_t) dt = \\ &= - \int_0^T (R_h^p p, \psi_t) dt = \int_0^T ((R_h^p p)_t, \psi) dt, \end{aligned}$$

所以  $(R_h^p p)_t = R_h^p p_t$ , 即式(28)中第一式得证.

$$\begin{aligned} \int_0^T ((R_k^p p_x)_t, \varphi_t) dt &= \int_0^T ((p_t)_x, \varphi_t) dt = - \int_0^T (p_t, (\varphi_t)_x) dt = \\ &= - \int_0^T ((R_k^p p)_t, (\varphi_t)_x) dt = \int_0^T ((R_k^p p)_{tx}, \varphi_t) dt, \end{aligned}$$

可得式(28)中第二式. 类似地, 由

$$\begin{aligned} \int_0^T (R_h^p R_k^p p_t, \varphi_t) dt &= \int_0^T (R_k^p p_t, \varphi_t) dt = \int_0^T (p_t, \varphi_t) dt = \\ &= \int_0^T (R_h^p p_t, \varphi_t) dt = \int_0^T (R_k^p R_h^p p_t, \varphi_t) dt, \end{aligned}$$

可得式(28)中第三式. 进一步, 由式(28)中第四式, 可得

$$\begin{aligned} \| p - R_h^p R_k^p p \| &\leq \| p - R_h^p p \| + \| R_h^p (p - R_k^p p) \| \leq \\ &\leq \| p - R_h^p p \| + \| p - R_k^p p \|. \end{aligned}$$

结合式(31)和(32), 易得式(33).

引理中其余结论都是有限元分析标准结果, 参见文献[13-16]. □

为了研究  $u^{hk}$  的误差估计, 在空间上, 引入  $u \in H^1(\Omega)$  的 Ritz 投影  $R_h^u: H^1(\Omega) \rightarrow V_{hm}(\Omega)$ , 满足

$$(R_h^u \nabla u, \nabla \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V_{hm}(\Omega). \quad (34)$$

如果  $u \in H^1(\Omega)$ , 则有  $\| R_h^u \nabla u \| \leq \| \nabla u \|$ . 若  $u \in H^1(\Omega) \cap H^r(\Omega)$ , 则有  $\| R_h^u u - u \|_s \leq ch^{r-s} \| u \|_r$ ,  $1 \leq r \leq m+1, s=0,1$  成立, 具体证明见文献[13-16].

在  $L^2$  意义下,  $R_h^u$  可进一步延拓到时空投影  $R_h^u: L^2(J; H^1(\Omega)) \rightarrow V_{hm}(\Omega) \times L^2(J)$ , 满足

$$\int_0^T (R_h^u \nabla u, \nabla \varphi) dt = \int_0^T (\nabla u, \nabla \varphi) dt, \quad \forall \varphi \in V_{hm}(\Omega) \times L^2(J). \quad (35)$$

此外, 还需定义关于时间  $t$  的投影算子  $R_k^u: L^2(J) \rightarrow V_{kl}(J)$ , 使得  $u \in L^2(J)$  满足

$$\int_0^T (R_k^u u) \zeta dt = \int_0^T u \zeta dt, \quad \forall \zeta \in V_{kl}(J). \quad (36)$$

显然  $\| R_k^u u \|_{L^2(J)} \leq \| u \|_{L^2(J)}$ , 且对任意的  $u \in H^r(J) \cap L^2(J)$ ,  $R_k^u u$  满足  $\| R_k^u u - u \|_{H^s(J)} \leq ck^{r-s} \| u \|_{H^r(J)}$  ( $-l+1 \leq s \leq 1 \leq r \leq l+1$ ).

将  $R_k^u$  进一步延拓到时空投影  $R_k^u: L^2(J; H^1(\Omega)) \rightarrow H^1(\Omega) \times V_{kl}(J)$ , 满足

$$\int_0^T ((R_k^u u), \zeta) dt = \int_0^T (u, \zeta) dt, \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega) \times V_{kl}(J). \quad (37)$$

**引理 2**  $R_h^u$  和  $R_k^u$  由式(35)和(37)定义, 则有下列结论成立.

① 如果  $u \in H^2(J; H^2(\Omega)) \cap L^2(J; H^1(\Omega))$ , 则有

$$(R_h^u u)_t = R_h^u u_t, \quad \nabla (R_k^u u) = R_k^u \nabla u, \quad R_h^u R_k^u \nabla u = R_k^u R_h^u \nabla u, \quad R_h^u R_k^u u = R_k^u R_h^u u. \quad (38)$$

② 如果  $u \in L^2(J; H^1(\Omega)) \cap H^r(J; H^1(\Omega))$ , 则有

$$\| (u - R_k^u u)(t) \|_{H^s(J; H^1(\Omega))} \leq ck^{r-s} \| u(t) \|_{H^r(J; H^1(\Omega))}, \quad 0 \leq r \leq l+1, s=0,1. \quad (39)$$

③ 如果  $u \in L^2(J; H^r(\Omega)) \cap L^2(J; H^1(\Omega))$ , 有

$$\| (u - R_h^u u)(t) \|_{L^2(J; H^s(\Omega))} \leq ch^{r-s} \| u(t) \|_{L^2(J; H^r(\Omega))}, \quad 1 \leq r \leq m+1, s=0,1. \quad (40)$$

④ 如果  $u \in H^{l+1}(J; H^s(\Omega)) \cap L^2(J; H^{m+1}(\Omega))$ , 且  $u \in L^2(J; H^1(\Omega))$ ,  $s=0,1$ , 有

$$\| u - R_h^u R_k^u u \|_{L^2(J; H^s(\Omega))} \leq c \{ h^{m+1-s} \| u \|_{L^2(J; H^{m+1}(\Omega))} + k^{l+1} \| u \|_{H^{l+1}(J; H^s(\Omega))} \}. \quad (41)$$

**证明** 只证式(38)中最后一个等式,其他的证明和引理1类似,也可参看文献[13-16].

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} (R_h^u R_k^u u, \Delta \psi) dt &= - \int_0^{t_n} (R_h^u \nabla (R_k^u u), \nabla \psi) dt = - \int_0^{t_n} (R_k^u \nabla u, \nabla \psi) dt = \\ &= - \int_0^{t_n} (\nabla u, \nabla \psi) dt = - \int_0^{t_n} (\nabla (R_h^u u), \nabla \psi) dt = \\ &= \int_0^{t_n} (R_h^u u, \Delta \psi) dt = \int_0^{t_n} (R_k^u R_h^u u, \Delta \psi) dt. \end{aligned} \quad \square$$

此外,我们还要引入时空投影算子  $A_h: L^2(J; H_0^1(\Omega)) \rightarrow V_{hm}(\Omega) \times L^2(J)$  如下:

$$\int_0^T (A_h u, \phi) dt = \int_0^T (\nabla u, \nabla \phi) dt, \quad \forall \phi \in V_{hm}(\Omega) \times L^2(J).$$

为证明连续时空混合有限元解的误差估计,我们将误差改写为下面形式,记

$$\begin{cases} u - u^{hk} = (u - R_h^u R_k^u u) + (R_h^u R_k^u u - u^{hk}) = \eta + \zeta, \\ p - p^{hk} = (p - R_h^p R_k^p p) + (R_h^p R_k^p p - p^{hk}) = \rho + \theta. \end{cases} \quad (42)$$

用式(4)和(5)相减,可得

$$\int_{J_n} (u_t - u_t^{hk}, v^{hk}) dt = \int_{J_n} (p - p^{hk}, v^{hk}) dt, \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} \int_{J_n} [ (p_t - p_t^{hk}, \omega^{hk}) + \alpha(p - p^{hk}, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla(u - u^{hk}), \nabla \omega^{hk}) + \\ \beta(\sin u - \sin u^{hk}, \omega^{hk}) ] dt = 0. \end{aligned} \quad (43b)$$

则得到误差方程:

$$\int_{J_n} (\eta_t, v^{hk}) + (\zeta_t, v^{hk}) dt = \int_{J_n} (\rho, v^{hk}) + (\theta, v^{hk}) dt, \quad (44a)$$

$$\begin{aligned} \int_{J_n} [ (\rho_t, \omega^{hk}) + \alpha(\rho, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla \eta, \nabla \omega^{hk}) + \beta(\sin u - \sin u^{hk}, \omega^{hk}) ] dt + \\ \int_{J_n} [ (\theta_t, \omega^{hk}) + \alpha(\theta, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla \zeta, \nabla \omega^{hk}) ] dt = 0. \end{aligned} \quad (44b)$$

**定理2** 设  $\{u, p\}$  和  $\{u^{hk}, p^{hk}\}$  分别为式(4)和(5)的解.假设  $\{u, p\}$  足够光滑,空间  $\Omega$  是正则空间,且  $R_h^u R_k^u u(0) = u^{hk}(0)$ ,  $R_h^p R_k^p p(0) = p^{hk}(0)$ , 则存在与  $h$  和  $k$  无关的常数  $c > 0$  使得如下估计成立:

$$\| p - p^{hk} \|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq ch^{m+1} ( \| u \|_{L^2(J; H^{m+1}(\Omega))} + \| p \|_{H^1(J; H^{m+1}(\Omega))} ) + ck^l ( \| u \|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} + \| p \|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} ), \quad (45)$$

$$\| u - u^{hk} \|_{L^2(J; H^1(\Omega))} \leq ch^m ( \| u \|_{L^2(J; H^{m+1}(\Omega))} + \| p \|_{H^1(J; H^{m+1}(\Omega))} ) + ck^l ( \| u \|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} + \| p \|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} ). \quad (46)$$

**证明** 在式(44b)中选取  $\omega^{hk} = \theta$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{J_n} [ (\theta_t, \theta) + \alpha(\theta, \theta) + \gamma(\nabla \zeta, \nabla \theta) ] dt = \\ - \int_{J_n} [ (\rho_t, \theta) + \alpha(\rho, \theta) + \gamma(\nabla \eta, \nabla \theta) - \beta(\sin u - \sin u^{hk}, \theta) ] dt. \end{aligned} \quad (47)$$

在式(44a)中选取  $v^{hk} = A_h \zeta$ , 有

$$\int_{J_n} (\nabla \theta, \nabla \zeta) dt = \int_{J_n} [ (\nabla \eta_t, \nabla \zeta) + (\nabla \zeta_t, \nabla \zeta) - (\nabla \rho, \nabla \zeta) ] dt. \quad (48)$$

将式(48)代入式(47)中,则有

$$\int_{J_n} [ (\theta_t, \theta) + \alpha(\theta, \theta) + \gamma(\nabla \zeta_t, \nabla \zeta) ] dt =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{J_n} [(\rho_t, \theta) + \alpha(\rho, \theta) + \gamma(\nabla\eta, \nabla\theta) - \beta(\sin u - \sin u^{hk}, \theta)] dt - \\
& \gamma \int_{J_n} [(\nabla\eta_t, \nabla\zeta) + \gamma(\nabla\rho, \nabla\zeta)] dt.
\end{aligned} \tag{49}$$

由 Cauchy 不等式及  $\sin u$  的性质可知

$$\begin{aligned}
& \|\theta(t_n)\|^2 - \|\theta(t_{n-1})\|^2 + \alpha \int_{J_n} \|\theta\|^2 dt + \gamma \|\nabla\zeta(t_n)\|^2 - \gamma \|\nabla\zeta(t_{n-1})\|^2 \leq \\
& c \int_{J_n} \|\rho_t\|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_{J_n} \|\theta\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\rho\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\eta\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\zeta\|^2 dt + \\
& \gamma \int_{J_n} (\nabla\eta, \nabla\theta) dt - \gamma \int_{J_n} (\nabla\eta_t, \nabla\zeta) dt + \gamma \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla\zeta) dt.
\end{aligned} \tag{50}$$

在式(50)中

$$\begin{aligned}
& \int_{J_n} (\nabla\eta, \nabla\theta) dt = \int_{J_n} (\nabla u - R_h^u R_k^u \nabla u, \nabla\theta) dt = \\
& \int_{J_n} (\nabla u - R_h^u \nabla u + R_h^u \nabla u - R_h^u R_k^u \nabla u, \nabla\theta) dt = \\
& \int_{J_n} (R_h^u (\nabla u - R_k^u \nabla u), \nabla\theta) dt,
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{J_n} (\nabla\eta_t, \nabla\zeta) dt = \int_{J_n} (\nabla u_t - R_h^u R_k^u \nabla u_t, \nabla\zeta) dt = \\
& \int_{J_n} (\nabla u_t - R_h^u \nabla u_t + R_h^u \nabla u_t - R_h^u R_k^u \nabla u_t, \nabla\zeta) dt = \\
& \int_{J_n} (R_h^u (\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t), \nabla\zeta) dt \leq \\
& c \int_{J_n} \|R_h^u (\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + \varepsilon \int_{J_n} \|\nabla\zeta\|^2 dt,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla\zeta) dt = \int_{J_n} (\nabla p - R_h^p R_k^p \nabla p, \nabla\zeta) dt = \\
& \int_{J_n} (\nabla p - R_h^p \nabla p + R_h^p \nabla p - R_h^p R_k^p \nabla p, \nabla\zeta) dt = \\
& \int_{J_n} (R_h^p \nabla p - R_h^p R_k^p \nabla p, \nabla\zeta) dt \leq \\
& c \int_{J_n} \|R_h^p (\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt + \varepsilon \int_{J_n} \|\nabla\zeta\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{53}$$

代入可知

$$\begin{aligned}
& \|\theta(t_n)\|^2 - \|\theta(t_{n-1})\|^2 + \alpha \int_{J_n} \|\theta\|^2 dt + \gamma \|\nabla\zeta(t_n)\|^2 - \gamma \|\nabla\zeta(t_{n-1})\|^2 \leq \\
& c \int_{J_n} \|\rho_t\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\rho\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\eta\|^2 dt + c \int_{J_n} \|\zeta\|^2 dt + \\
& \int_{J_n} (R_h^u (\nabla u - R_k^u \nabla u), \nabla\theta) dt + c \int_{J_n} \|R_h^u (\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + \\
& c \int_{J_n} \|\nabla\zeta\|^2 dt + c \int_{J_n} \|R_h^p (\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{54}$$

对  $n$  从 1 到  $N$  求和, 可得

$$\begin{aligned}
& \|\theta(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\theta\|^2 dt + \gamma \|\nabla\zeta(t_N)\|^2 \leq \\
& c \int_0^T \|\rho_t\|^2 dt + c \int_0^T \|\rho\|^2 dt + c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + c \int_0^T \|\nabla\zeta\|^2 dt + \\
& c \int_0^T \|R_h^u (\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + c \int_0^T \|R_h^p (\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{55}$$



由 Gronwall 引理可知

$$\begin{aligned} & \|\nabla \zeta(t_N)\|^2 \leq \\ & c \int_0^T \|\rho_t\|^2 dt + c \int_0^T \|\rho\|^2 dt + c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \\ & c \int_{J_n} \|R_h^u(\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + c \int_0^T \|R_h^p(\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (56)$$

再由式(55)和(56),可得

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\theta\|^2 dt & \leq c \int_0^T \|\rho_t\|^2 dt + c \int_0^T \|\rho\|^2 dt + c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \\ & c \int_0^T \|R_h^u(\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + c \int_0^T \|R_h^p(\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla \zeta\|^2 dt & \leq c \int_0^T \|\rho_t\|^2 dt + c \int_0^T \|\rho\|^2 dt + c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \\ & c \int_0^T \|R_h^u(\nabla u_t - R_k^u \nabla u_t)\|^2 dt + c \int_0^T \|R_h^p(\nabla p - R_k^p \nabla p)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (58)$$

将式(33)和(41)分别与式(58)和(57)结合,并利用三角不等式,得到定理结论.  $\square$

## 4 数值算例

下面验证本文构造的连续时空混合有限元格式的有效性和可行性,以及理论分析结果的合理性.设空间区间  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , 时间区间  $\bar{J} = [0, 1]$ ,  $f(x, t) = (2 + 2t)(x - x^2)^2 - 2t^2(1 - 2x)^2 + 4t^2(x - x^2) + \sin(t^2(x - x^2)^2)$ , 精确解为  $u(x, t) = t^2(x - x^2)^2$  的非线性 sine-Gordon 方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} + \sin u = f(x, t), & x \in [0, 1], t \in (0, 1], \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (59)$$

本文所构造格式统一时间和空间变量,将一维问题(1)当作时间变量  $t$  和空间变量  $x$  的二维问题来处理.将二维区域  $[0, 1] \times [0, 1]$  剖分成  $m \times n$  个矩形单元.时间和空间方向采用二次多项式作为基函数,数值求解问题(1).

表1和表2中出现的  $\|\cdot\|_a$  为  $\|\cdot\|_{L^2([0, T]; L^2(I))}$ .表1和表2分别采取线性基函数和一个剖分步长固定,而另一步长折半减少的方式分析  $\|p - p^{hk}\|_{L^2([0, T]; L^2(I))}$  和  $\|u - u^{hk}\|_{L^2([0, T]; L^2(I))}$  的误差和收敛阶.从表中数据可以看出,当一个步长折半递减时,两项误差的收敛阶均接近二阶最优收敛.

表1 用线性基函数和  $k = 1/200$  时,关于空间方向的误差和收敛阶

Table 1 Error and convergence rates in the space direction with the linear basis function and  $k = 1/200$

$h$	$\ p - p^{hk}\ _a$	rate $\log_2(k)$	$\ u - u^{hk}\ _a$	rate $\log_2(k)$
1/4	4.739 6E-3		1.781 9E-3	
1/8	1.330 1E-3	1.833 3	4.985 6E-4	1.837 6
1/16	3.409 2E-4	1.964 0	1.278 7E-4	1.963 1
1/32	8.578 9E-5	1.990 6	3.217 3E-5	1.990 8

表2 用线性基函数和  $k = 1/200$  时,关于时间方向的误差和收敛阶

Table 2 Error and convergence rates in the time direction with the linear basis function and  $k = 1/200$

$h$	$\ p - p^{hk}\ _a$	rate $\log_2(k)$	$\ u - u^{hk}\ _a$	rate $\log_2(k)$
1/4	8.072 5E-4		3.590 1E-4	
1/8	2.537 4E-4	1.669 7	9.153 6E-5	1.971 6
1/16	6.484 0E-5	1.968 4	2.293 7E-5	1.996 7
1/32	1.664 3E-5	1.962 0	5.793 9E-6	1.985 0

图1—4分别给出时空线性基函数和时空二次基函数取步长  $h = 1/40, k = 1/40$  时的真解  $u, p$  和数值解  $u^{hk}, p^{hk}$  的对比图.实验数据说明本文所提出时空格式能够有效求解 sine-Gordon 方程,且理论分析结果合理.

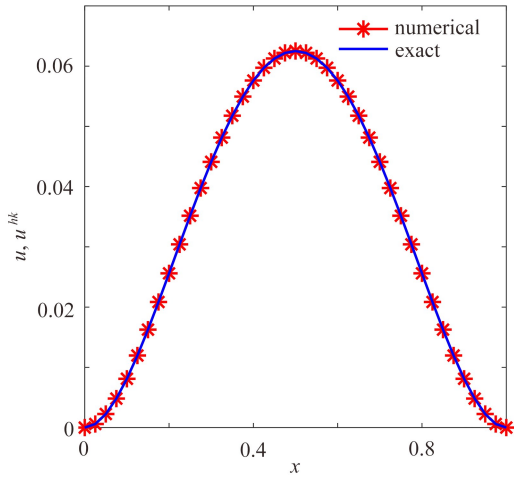


图 1 线性基函数,  $u$  和  $u^{hk}$  的对比

Fig. 1 Comparison between  $u$  and  $u^{hk}$  with linear basis function

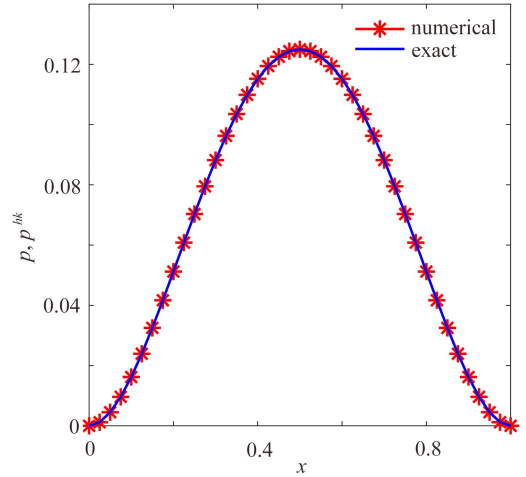


图 2 线性基函数,  $p$  和  $p^{hk}$  的对比

Fig. 2 Comparison between  $p$  and  $p^{hk}$  with linear basis function

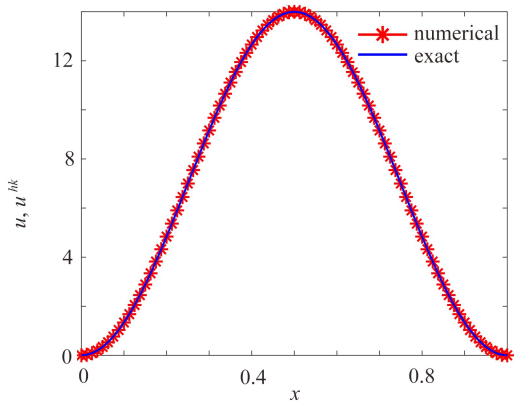


图 3 二次基函数,  $u$  和  $u^{hk}$  的对比 ( $t = T$ )

Fig. 3 Comparison between  $u$  and  $u^{hk}$  with the quadratic basis function ( $t = T$ )

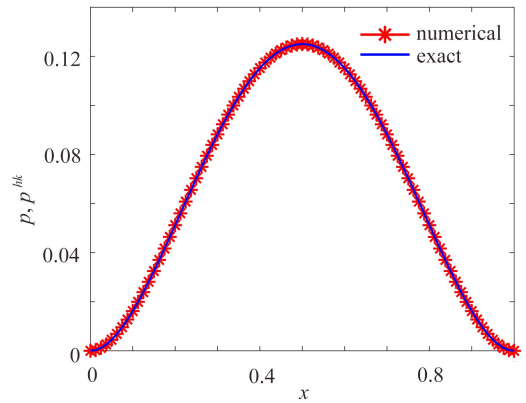


图 4 二次基函数,  $p$  和  $p^{hk}$  的对比 ( $t = T$ )

Fig. 4 Comparison between  $p$  and  $p^{hk}$  with the quadratic basis function ( $t = T$ )

表 3 和表 4 中出现的  $\|\cdot\|_b$  表示为  $t = T$  时刻的  $\|\cdot\|_{L^2(t)}$ . 在表 3、表 4、图 5、图 6 中,  $u_{CN}$  和  $u_{ST}$  分别表示文献[12]的  $H^1$ -Galerkin 混合格式和本文所提时空格式所得数值解.

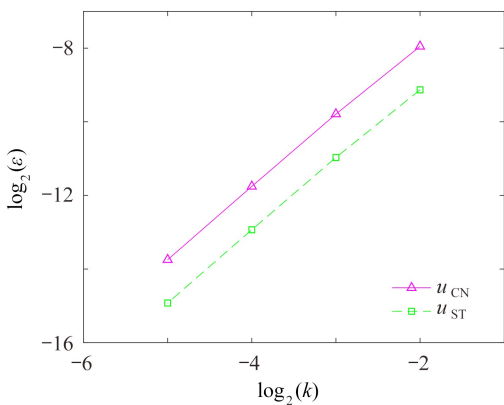


图 5 线性基函数,  $t = T$  的收敛阶对比

Fig. 5 Comparison of convergence rates at time  $t = T$  for the linear basis function

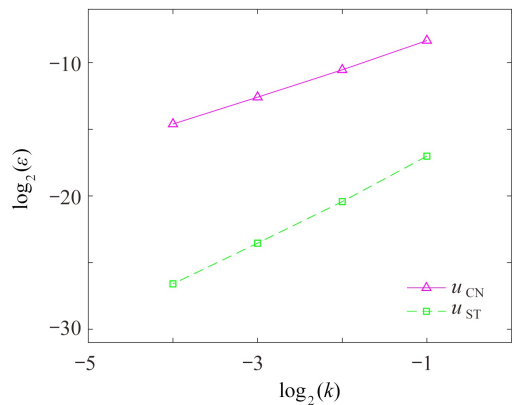


图 6 二次基函数,  $t = T$  的收敛阶对比

Fig. 6 Comparison of convergence rates at time  $t = T$  for the quadratic basis function

表3 线性基函数,  $t = T$ 时刻的误差和收敛阶Table 3 Error and convergence rates at time  $t = T$  for the linear basis function

$k(k = 10h)$	1/4	1/8	1/16	1/32
$\ u - u_{CN}\ _b$	4.035 9E-3	1.128 9E-3	2.892 0E-4	7.272 5E-5
rate $\log_2(k)$		1.837 9	1.964 8	1.991 5
$\ u - u_{ST}\ _b$	1.782 0E-3	4.985 7E-4	1.278 7E-4	3.217 2E-5
rate $\log_2(k)$		1.837 6	1.963 1	1.990 8
$\ p - p_{CN}\ _b$	8.669 2E-3	2.375 9E-3	6.010 2E-4	1.505 1E-4
rate $\log_2(k)$		1.867 4	1.982 9	1.997 5
$\ p - p_{ST}\ _b$	8.497 0E-3	2.365 9E-3	6.001 4E-4	1.504 6E-4
rate $\log_2(k)$		1.826 4	1.968 9	1.995 7

表4 二次基函数,  $t = T$ 时刻的误差和收敛阶Table 4 Error and convergence rates at time  $t = T$  for the quadratic basis function

$k(k = 10h)$	1/2	1/4	1/8	1/16
$\ u - u_{CN}\ _b$	3.068 6E-3	6.695 7E-4	1.617 0E-4	4.003 1E-5
rate $\log_2(k)$		2.196 3	2.049 9	2.014 2
$\ u - u_{ST}\ _b$	7.529 1E-6	7.082 6E-7	8.170 7E-8	9.852 2E-9
rate $\log_2(k)$		3.410 1	3.115 7	3.052 0
$\ p - p_{CN}\ _b$	3.538 7E-3	5.569 8E-4	1.221 2E-4	1.880 6E-5
rate $\log_2(k)$		2.667 5	2.189 3	2.699 0
$\ p - p_{ST}\ _b$	7.511 3E-5	8.248 3E-6	7.801 6E-7	7.875 8E-8
rate $\log_2(k)$		3.186 9	3.402 3	3.308 2

由表3和图5的数据可知,本文采用的时空线性多项式基函数的方法和文献[12]中利用的空间线性多项式基函数方法相比,未知量 $u, p$ 的收敛阶均为二阶,但是本文所提时空格式的误差明显小于文献[12]方法的误差.由表4和图6的数据可以看出,文献[12]中利用空间二次多项式基函数的格式收敛阶为二阶,而本文中利用时空二次多项式基函数的方法对 $u, p$ 的收敛阶达到三阶.本文所提时空格式通过增加时间基函数多项式次数可提高收敛阶数和计算精度且允许用大时间步长.

## 5 总结与展望

本文通过引入辅助函数 $p = u_t$ ,针对sine-Gordon方程初边值问题构造了连续时空混合有限元格式.格式均在时空有限元的框架下进行研究,因此具有时空高阶精度,并且能够更好地近似多个物理量.本文给出了sine-Gordon方程的连续时空混合有限元格式的稳定性,引入混合投影,并讨论了投影算子的性质,给出了数值解的误差估计,最后通过数值结果看出格式的有效性和可行性以及理论分析结果的合理性.研究内容和结论是sine-Gordon方程时空混合有限元方法理论研究的新进展.在接下来的研究工作中,该研究的思想可推广应用于更多类型偏微分方程的初边值问题.

## 参考文献(References):

- [1] JIWARI R, PANDIT S, MITTAL R C. Numerical simulation of two-dimensional sine-Gordon solitons by differential quadrature method[J]. *Computer Physics Communications*, 2012, **183**(3): 600-616.
- [2] XIA Hong, TENG Fei, LUO Zhendong. A reduced-order extrapolating finite difference iterative scheme for 2D generalized nonlinear sine-Gordon equation[J]. *Applied and Computational Mathematics*, 2018, **7**(1): 19-25.
- [3] GUO Benyu, PASCUAL P J, RODRIGUEZ J, et al. Numerical solution of the sine-Gordon equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1986, **18**(1): 1-14.
- [4] ARGYRIS J, HAASE M, HEINRICH J C. Finite element approximation to two-dimensional sine-Gordon solitons[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, **86**(1): 1-26.
- [5] LIU Yang, LI Hong. Numerical solutions of  $H^1$ -Galerkin mixed finite element method for a damped sine-Gor-

- don equation[J]. *Applied Mathematics*, 2009, **22**(3): 579-588.
- [6] 常晓慧, 李宏, 何斯日古楞. Sobolev 方程的  $H^1$ -Galerkin 时空混合有限元分裂格式[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2020, **35**(4): 470-486.(CHANG Xiaohui, LI Hong, HE Siriguleng.  $H^1$ -Galerkin space time mixed finite element splitting scheme for one-dimensional Sobolev equation[J]. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, 2020, **35**(4): 470-486.(in Chinese))
- [7] 李宏, 黄春霞, 何斯日古楞, 等. Sine-Gordon 方程的三次配点法[J]. 工程数学学报, 2014, **31**(2): 254-266.(LI Hong, HUANG Chunxia, HE Siriguleng, et al. A qualocation method for sine-Gordon equation[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2014, **31**(2): 254-266.(in Chinese))
- [8] 许秋滨, 张鲁明. 二维广义非线性 sine-Gordon 方程的一个 ADI 格式[J]. 应用数学学报, 2007, **30**(5): 836-846.(XU Qiubin, ZHANG Luming. An ADI scheme for the generalized nonlinear sine-Gordon equation in two dimensions[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2007, **30**(5): 836-846.(in Chinese))
- [9] LAI Huilin, MA Changfeng. An implicit scheme of lattice Boltzmann method for sine-Gordon equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, **25**(6): 2118-2120.
- [10] MA Limin, WU Zongmin. A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using multiquadric quasi-interpolation[J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(8): 3099-3013.
- [11] HASHEMI M S. Numerical study of the one-dimensional coupled nonlinear sine-Gordon equations by a novel geometric meshless method[J]. *Engineering With Computers*, 2021, **37**(4): 3397-3407.
- [12] 石东洋, 张斐然. Sine-Gordon 方程的一类低阶非协调有限元分析[J]. 计算数学, 2011, **33**(3): 289-297.(SHI Dongyang, ZHANG Feiran. A class of low order nonconforming finite element analysis for Sine-Gordon equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2011, **33**(3): 289-297.(in Chinese))
- [13] ADAMS R A. *Sobolev Spaces*[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [14] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.(LUO Zhendong. *Fundamentals and Applications of Mixed Finite Element Method*[M]. Beijing: Science Press, 2006.(in Chinese))
- [15] AZIZ A K, MONK P. Continuous finite elements in space and time for the heat equation[J]. *Mathematics of Computation*, 1989, **52**(186): 255-274.
- [16] LUO Zhendong, CHEN Goong. *Proper Orthogonal Decomposition Methods for Partial Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press of Elsevier, 2018.