

一维纳米准晶层合梁的非局部振动、 屈曲与弯曲研究*

原庆丹¹, 郭俊宏^{1,2}

(1. 内蒙古工业大学 理学院 力学系, 呼和浩特 010051;
2. 内蒙古工业大学 航空学院, 呼和浩特 010051)

摘要: 基于非局部理论, 建立了一维纳米准晶层合简支深梁模型, 研究了其自由振动、屈曲行为及其弯曲变形问题. 采用伪 Stroh 型公式, 导出了纳米梁的控制方程, 并通过传递矩阵法获得简支边界条件下纳米准晶层合梁固有频率、临界屈曲载荷及弯曲变形广义位移和广义应力的精确解. 通过数值算例, 分析了高跨比、层厚比、叠层顺序及非局部效应对一维纳米准晶层合简支梁固有频率、临界屈曲载荷和弯曲变形的影响. 结果表明: 固有频率和临界屈曲载荷随着非局部参数增大而减小; 外层准晶弹性常数更高时, 固有频率和临界屈曲载荷更大; 叠层顺序对纳米准晶梁的力学行为有较大影响. 所得的精确解可为纳米尺度下梁结构的各种数值方法和实验结果提供参考.

关键词: 纳米准晶; 简支梁; 自由振动; 屈曲; 弯曲; 非局部效应

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440260

Nonlocal Vibration, Buckling and Bending of 1D Layered Quasicrystal Nanobeams

YUAN Qingdan¹, GUO Junhong^{1,2}

(1. *Department of Mechanics, College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, P.R.China;*
2. *School of Aeronautics, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, P.R.China*)

Abstract: Based on the nonlocal theory, a 1D layered nano-quasicrystal (QC) simply supported beam model was established to investigate the free vibration, buckling behavior, and bending deformation of nano-QC beams. The pseudo-Stroh formula was used to derive the governing equations for the nanobeam. Using the transfer matrix method, exact solutions of the natural frequency, the critical buckling load, the generalized displacement and the generalized stress for bending problems of layered nano-QC beams was obtained under simply supported boundary conditions. The effects of the height-span ratio, the layer thickness ratio, the stacking sequence, and the nonlocal effect on the natural frequency, the critical buckling load and the bending deforma-

* 收稿日期: 2023-08-28; 修订日期: 2023-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(12072166); 内蒙古自治区科技计划项目(2021GG0254); 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费(JY20220075)

作者简介: 原庆丹(1999—), 女, 硕士生(E-mail: 783694647@qq.com);

郭俊宏(1981—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: jhguo@imut.edu.cn).

引用格式: 原庆丹, 郭俊宏. 一维纳米准晶层合梁的非局部振动、屈曲与弯曲研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(2): 208-219.

tion of layered nano-QC simply supported beams were analyzed. The results show that, the natural frequency and the critical buckling load decrease with increasing nonlocal parameter. The bigger the outer-layer quasicrystal elastic constant is, the higher the natural frequency and the buckling critical load will be. The stacking sequence has a significant effect on the mechanical behavior of nano-QC beams. The obtained exact solution provides a reference for various numerical methods and experimental results of nanoscale beam structures.

Key words: nano-quasicrystal; simply supported beam; free vibration; buckling; bending; nonlocal effect

0 引 言

以色列科学家 Shechtman 于 1982 年在急冷凝固的 Al-Mn 合金中观测到了五次对称电子衍射图像,1984 年准晶被首次报道后^[1],引起了各界的广泛关注。准晶是一种具有特殊对称性,原子常呈定向有序排列,但不具有周期重复性的固体结构^[2]。由于原子排列的特殊性,准晶具有很多优异性能,如高硬度、高强度、不黏性、耐腐蚀等^[3]。因此,准晶常用作表面改性材料,可涂覆于炊具表面和太阳能工业薄膜等,作为结构材料的增强相,可提升材料的整体性能^[4],并且在航空航天、汽车制造等领域也有着广泛的应用^[5]。

当准晶材料尺寸为纳米级时,能有效提高结构的强度和韧性。作为一种超微粒子,纳米准晶因其结构精细而具有优异的形态可控性,可以作为各种应用的活性材料^[6]。到目前为止,数百种准晶已经被发现^[7],随着制备技术的发展,纳米准晶的制备取得了丰富的成果。Barua 等^[8]采用机械合金化技术制备了 Al-Cu-Fe 纳米合金,分析了球磨时间和热处理对准晶相形成的影响。Singh 等^[9]通过冷铸和挤压得到了含有纳米准晶相的 Mg-Zn-Y 合金,拉伸和压缩时的屈服强度高达 400 MPa。由于纳米准晶具有以上性质,因此经常被用来制造纳米器件和纳米传感器等。

梁板结构作为建筑结构中的重要组成部分,吸引了大量学者进行研究。在宏观尺度下,Wang 等^[10]对具有非理想界面的一维六方准晶层合板的振动和弯曲变形进行了研究,分析了非理想界面参数对材料力学性能的影响。在微纳米尺度下,结构的尺度效应不可忽略^[11],经典连续介质力学已不适用于研究纳米结构的力学性能。人们为了更好地研究微纳米材料,提出了考虑尺度效应的偶应力理论^[12]、非局部理论^[13]、应变梯度理论^[14]等理论。基于非局部理论,Waksmanski 和 Pan^[15]导出了具有非局部效应的简支多层准晶纳米板的解析解。Li 等^[16]研究了功能梯度多层二维准晶纳米板的非局部效应。Zhang 等^[17]研究了多层一维六方压电准晶纳米板在表面电弹性载荷作用下的静态弯曲变形问题。Sun 等^[18]通过伪 Stroh 型公式和传递矩阵法得到了二维准晶层状纳米板非局部振动频率和临界屈曲载荷的精确解。除此之外,很多学者利用其他理论对准晶材料进行了研究,如 Guo 等^[19]研究了具有修正偶应力效应的一维准晶层合板的振动响应。Zhang 等^[20]基于非局部应变梯度理论,研究了功能梯度多层准晶纳米板的静态弯曲变形问题。

相对而言,关于准晶梁的研究较少,Huang 等^[21]考虑非局部效应的影响,研究了具有简支和固支边界条件的双层压电准晶纳米梁的静态问题。Li 和 Xiao^[22]基于修正偶应力研究了不同边界条件下一维压电准晶纳米梁的自由振动,分析了边界条件对固有频率的影响。Sun 和 Guo^[23]利用状态空间-微分求积法,研究了一维准晶层合梁在各种边界条件下的振动响应和弯曲变形。基于经典弹性理论,陈韬等^[24]将伪 Stroh 型公式和传递矩阵法相结合,获得了一维六方准晶层合梁自由振动和屈曲问题的精确解。

纳米梁作为重要而常见的纳米结构之一,在微纳机电系统、原子力显微镜^[25]、生物传感器和混频器等领域中有着广泛应用。Zhang 等^[26]提出了级联纳米梁光谱仪设计方案,提高了光谱仪的测量分辨率;Huang 等^[27]用石墨烯浆液加强电池的阳极,增加了锂电池的容量。实验中很难生成块体准晶,一般制备的准晶尺度是微米或纳米级的,准晶与晶体材料组成的复合材料^[28-29]可有效提升基底材料的力学性能。Chang 等^[30]将 Al-Cu-Fe 准晶合金层与钕层结合形成多层涂层,发现退火后的多层结构由于准晶强化而表现出较高的流变应力。然而,目前缺乏纳米尺度下层状准晶梁理论方面的研究。为了揭示准晶增强纳米复合材料的变形机制,为工程中准晶用于纳米器件的表面涂层和增强复合材料提供科学依据,非常有必要研究纳米准晶层合梁结构的力学行为。因此,本文基于非局部理论,建立纳米准晶层合简支深梁模型,研究了其自由振动、屈曲和弯曲问题的力学行为,结合伪 Stroh 型公式和传递矩阵法,导出其固有频率、临界屈曲载荷和弯曲变形的精确解,

分析高跨比、层厚比、叠层顺序以及非局部效应对准晶层合简支梁力学行为的影响,为纳米准晶结构的设计优化提供了理论依据。

1 问题描述和基本方程

根据准周期方向的维数,可以把准晶分为一维准晶、二维准晶、三维准晶,而它们的结构均为三维的。本文建立一维六方准晶的二维多层深梁模型,梁长为 L ,宽度为 b ,总厚度为 h ,如图1所示,准周期方向沿 x_3 轴方向。

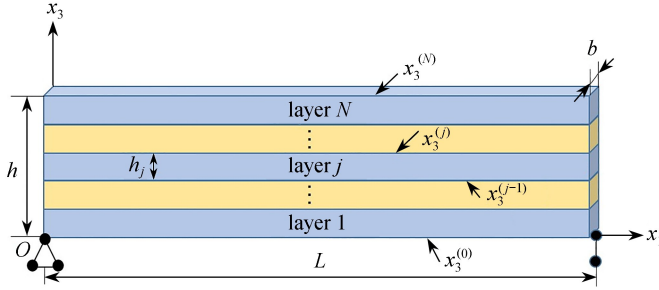


图1 一维纳米准晶层合二维简支梁模型

Fig. 1 A 2D layered simply-supported beam for 1D nano-quasicrystals

基于一维准晶的线弹性理论,应变-位移关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = w_{i,j}, \quad (1)$$

其中 $i, j = x, z$ (或 $1, 3$);下标中的逗号表示求偏导; u_i, w_i 分别表示声子场和相位子场的弹性位移; $\varepsilon_{ij}, \omega_{ij}$ 分别表示声子场和相位子场的应变张量。

在非局部理论中,一维六方准晶的本构关系为^[31]

$$\begin{cases} (1 - l^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + R_{ijkl} \omega_{kl}, \\ (1 - l^2 \nabla^2) H_{ij} = R_{klj} \varepsilon_{kl} + K_{ijkl} \omega_{kl}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 σ_{ij} 表示声子场应力; H_{ij} 表示相位子场应力; C_{ijkl} 表示声子场弹性常数; K_{ijkl} 表示相位子场弹性常数; R_{ijkl} 表示声子场与相位子场的耦合弹性常数; ∇^2 是二维 Laplace 算子, $l = e_0 a$ 是非局部参数,其中 a 为内部特征长度, e_0 为与给定材料相关的常数。

运动学方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = f_i, \\ H_{ij,j} = g_i, \end{cases} \quad (3)$$

其中对于自由振动问题, $f_i = \rho u_{i,t,t}, g_i = \rho w_{i,t,t}$;对于屈曲问题, $f_i = \bar{\sigma}_{11} u_{i,11}, g_i = 0$;对于弯曲问题, $f_i = g_i = 0$ 。 ρ 表示密度,下标 t 表示时间, $\bar{\sigma}_{11}$ 表示轴向压缩载荷。

对于简支的多层准晶纳米梁,声子场和相位子场的边界条件可以写成

$$u_3 = w_3 = \sigma_{11} = 0, \quad x_1 = 0, L. \quad (4)$$

考虑层 j ,其下界面和上界面分别位于 $x_3 = x_3^{(j-1)}$ 和 $x_3 = x_3^{(j)}$ 。因此,层 j 的厚度可表示为

$$h_j = x_3^{(j)} - x_3^{(j-1)}, \quad (5)$$

其中纳米梁的底部为 $x_3^{(0)} = 0$,而纳米梁的顶部为 $x_3^{(N)} = h$ 。

假设多层纳米准晶梁的界面均是完美黏结的,满足如下连续性边界条件:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{t}^{(j)} - \mathbf{t}^{(j-1)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{u}^{(j)} = [u_1^{(j)}, u_3^{(j)}, w_3^{(j)}]^T$, $\mathbf{t}_1^{(j)} = [\sigma_{13}^{(j)}, \sigma_{33}^{(j)}, H_{33}^{(j)}]^T$ 分别表示层 j 的广义位移和广义应力,上标 T 表示矩阵或向量的转置。

2 问题解答

根据简支边界条件(4),一维纳米准晶层合梁的广义位移的通解可表示为

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = e^{\phi} \begin{Bmatrix} a_1 \cos(px_1) \\ a_2 \sin(px_1) \\ a_3 \sin(px_1) \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

其中 $p = n\pi/L$, a_1, a_2, a_3 是待定的未知常数, n 为正整数. 对于准晶层合梁的自由振动问题, $\phi = sx_3 + i\omega t$; 对于准晶层合梁的屈曲与弯曲问题, $\phi = sx_3$, ω 是角频率, s 是待确定的特征值.

假设广义应力的一般解为

$$\mathbf{t} \triangleq \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = e^{\phi} \begin{Bmatrix} b_1 \cos(px_1) \\ b_2 \sin(px_1) \\ b_3 \sin(px_1) \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

引入两个向量 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ 和 $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$, 通过推导可得到如下控制方程:

$$\{\mathbf{Q} + m(1 + l^2 p^2)\mathbf{I} + s(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) + s^2(\mathbf{T} - ml^2\mathbf{I})\}\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_{13}p & R_1p \\ -C_{44}p & 0 & 0 \\ -R_3p & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{33} & R_2 \\ 0 & R_2 & K_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -C_{11}p^2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{44}p^2 & -R_3p^2 \\ 0 & -R_3p^2 & -K_2p^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

\mathbf{I} 是对角矩阵. 对于准晶层合梁的自由振动问题, $m = \rho\omega^2$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1)$; 对于准晶层合梁的屈曲问题, $m = \bar{\sigma}_{11}p^2$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 0)$; 对于准晶层合梁的弯曲问题, $m = 0$.

为了求解控制方程(9), 引入中间向量 \mathbf{d} ,

$$\mathbf{d} = (-\mathbf{R}^T + s\mathbf{T})\mathbf{a} = -\frac{1}{s}(\mathbf{Q} + s\mathbf{R})\mathbf{a}. \quad (11)$$

可得如下特征系统:

$$\mathbf{N} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T} - ml^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}^T & (\mathbf{T} - ml^2\mathbf{I})^{-1} \\ -(\mathbf{Q} + m(1 + l^2 p^2)\mathbf{I}) - \mathbf{R}(\mathbf{T} - ml^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}^T & -\mathbf{R}(\mathbf{T} - ml^2\mathbf{I})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

从式(12)中可以得到 6 个特征值 $s_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 和特征向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} .

利用传递矩阵法^[24], 可获得广义位移和广义应力的一般解为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x_3) \\ \mathbf{t}(x_3) \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_j(x_3 - x_3^{j-1})\mathbf{P}_{j-1}(h_{j-1}) \cdots \mathbf{P}_2(h_2)\mathbf{P}_1(h_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{t}(0) \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

其中传递矩阵 $\mathbf{P}_j(x_3 - x_3^{j-1})$ 为

$$\mathbf{P}_j(x_3 - x_3^{j-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \langle e^{s_j^*(x_3 - x_3^{j-1})} \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (15)$$

且

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \mathbf{A}_2 = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6], \\ \mathbf{B}_1 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \mathbf{B}_2 = [\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6], \\ \langle e^{s^* x_3} \rangle = \text{diag}[e^{s_1 x_3}, e^{s_2 x_3}, e^{s_3 x_3}, e^{-s_1 x_3}, e^{-s_2 x_3}, e^{-s_3 x_3}]. \end{cases} \quad (16)$$

由于研究的二维准晶梁的结构相对简单, 本文采用传递矩阵法, 指数函数的数值计算是稳定的. 但对于

各向异性层状复合材料板、壳等复杂结构,如采用传递矩阵法,指数函数可能会导致数值计算不稳定的现象,为此研究者们提出了新的计算方法,如双变量位置(DVP)法^[32]、节点耦合矩阵法和传统矩阵法相结合的方法^[33]等。

2.1 振动与屈曲

对梁的自由振动和屈曲问题,梁的上下表面自由,得到

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(h) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ 和 \mathbf{C}_4 是 $\mathbf{C} = \mathbf{P}_N(h_N)\mathbf{P}_{N-1}(h_{N-1})\cdots\mathbf{P}_2(h_2)\mathbf{P}_1(h_1)$ 的子矩阵。当 \mathbf{C}_3 的行列式为零时,可求出纳米准晶梁自由振动的固有频率或临界屈曲载荷。

2.2 弯曲

对梁的弯曲问题,梁的下表面是自由的,梁的上表面受到声子场载荷 σ_{33} , 则边界条件为

$$\mathbf{t}(h) = [0, \sigma_0 \sin(px_1), 0]^T, \quad \mathbf{t}(0) = [0, 0, 0]^T. \quad (18)$$

从式(14)可得

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{C}_3^{-1} \mathbf{t}(h). \quad (19)$$

将式(18)和(19)代入式(14)中,即可得到纳米准晶梁任一点处的广义位移和广义应力的精确解。

3 数值算例

我们将考虑由一维准晶 Al-Ni-Co (QC1) 和另一种一维准晶材料 (QC2) 制成的 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种层合梁,分析高跨比、层厚比、非局部参数、叠层顺序对其自由振动的固有频率和临界屈曲载荷及弯曲变形的影响。QC1 和 QC2 的材料性能^[23]如表 1 所示。

表 1 Al-Ni-Co 准晶(QC1)和 QC2 的材料系数
Table 1 Material properties of Al-Ni-Co quasicrystals QC1 and QC2

	$C_{11} / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$C_{13} / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$C_{33} / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$C_{44} / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$R_1 / (10^9 \text{ N/m}^2)$
QC1	234.33	66.63	232.22	70.19	8.846
QC2	150	90	130	50	1.5
	$R_2 = R_3 / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$K_1 / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$K_2 / (10^9 \text{ N/m}^2)$	$\rho / (10^3 \text{ kg/m}^3)$	
QC1	8.846	122	24	4.186	
QC2	1.2	0.3	0.18	4.186	

3.1 自由振动

为了验证本文准晶深梁模型的正确性,首先将本文结果与宏观尺度下状态空间-微分求积法(SSDQM)得到的数值解^[23]以及伪 Stroh 型方法得到的精确解^[24]进行比较,见表 2,其中高跨比 $h/L = 0.1$,固有频率的无量纲形式为 $\Omega = \omega L / \sqrt{C_{\max} / \rho_{\max}}$ 。从表中可以看出,本文模型的结果与已有方法所得结果吻合很好。因此,下面将该模型用于分析纳米准晶层合梁的自由振动问题。

Wang 等^[34]研究了碳纳米管的本构关系和非局部连续力学中小尺度参数,采用梯度法获得材料的非局部参数 $l = e_0 a = 0.04 \text{ nm}$,其中 e_0 的取值取决于晶格动力学中的晶体结构和物理性质。因此,本文所取的非局部参数的范围是 $0 \text{ nm} \leq l < 0.04 \text{ nm}$,即 $l/L = 0, 0.015, 0.03$ 。取高跨比 $h/L = 0.1$,得到 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种叠层顺序下准晶层合简支梁的前四阶固有频率,见表 3,其中梁模型各层的厚度均相同。可以看出,在相同阶的固有频率下,随着非局部参数 l 的增大,准晶层合梁的固有频率呈递减趋势,这是因为非局部效应导致纳米梁的刚度减小,从而降低了固有频率。通过比较两种准晶层合梁的固有频率可以发现, QC1/QC2/QC1 层合梁的固有频率比 QC2/QC1/QC2 层合梁高,所以高弹性常数的准晶因具有较高的刚度更适合作为涂层。

图 2 显示了 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种准晶层合简支梁的第一阶固有频率随高跨比 h/L 的变化。从图中可知:两种纳米准晶层合梁的一阶固有频率随着高跨比的增加而增大,表明增加厚度可以提高准晶层合梁的固有频率。

表 2 准晶均匀筒支梁的前四阶固有频率

Table 2 The first four natural frequencies of the quasicrystal homogenous simply supported beam

h/L	mode	present frequency	SSDQM ^[23]	Stroh formula ^[24]
0.1	1	0.267 7	0.267 6	0.267 2
	2	0.982 3	0.982 3	0.982 3
	3	1.016 4	1.014 7	1.014 7
	4	1.968 7	1.968 7	1.968 7
0.15	1	0.392 7	0.392 3	0.392 6
	2	0.983 1	0.983 1	0.983 1
	3	1.412 1	1.407 9	1.412 1
	4	1.979 0	7.978 8	1.979 0
0.2	1	0.508 2	0.507 4	0.508 2
	2	0.984 4	0.984 4	0.984 4
	3	1.707 3	1.700 7	1.707 3
	4	2.009 8	2.008 3	2.009 8

表 3 两种叠层顺序下准晶筒支梁的前四阶固有频率

Table 3 The first four natural frequencies of quasicrystal simply supported beams under two different stacking sequences

l/L	QC1/QC2/QC1				QC2/QC1/QC2			
	1	2	3	4	1	2	3	4
0	0.264 1	0.796 6	0.996 8	1.551 3	0.175 5	0.553 2	0.679 1	1.008 2
0.015	0.263 9	0.794 8	0.993 8	1.497 3	0.175 1	0.551 4	0.672 6	0.976 8
0.03	0.263 3	0.787 0	0.985 6	1.087 7	0.173 8	0.545 4	0.653 6	0.860 2

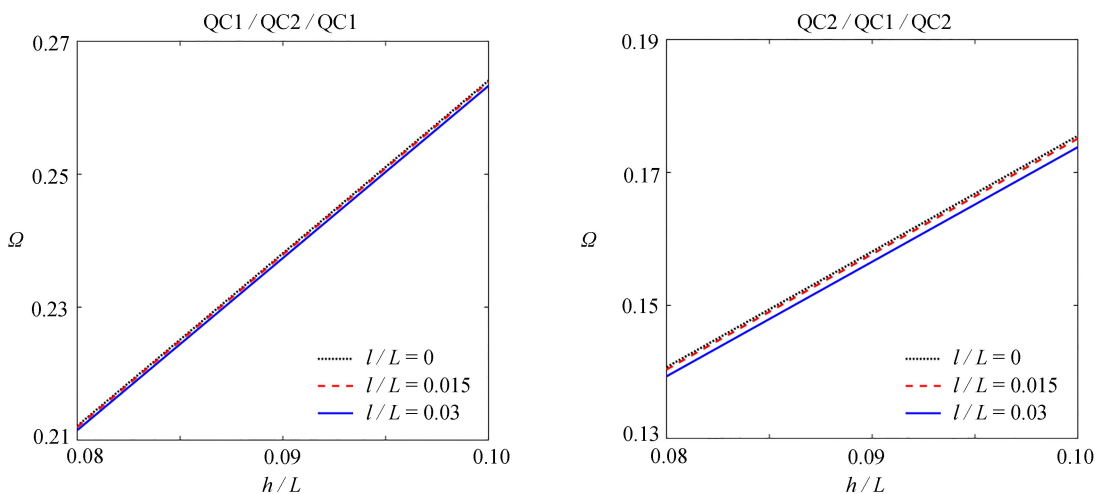


图 2 两种叠层顺序下准晶层合筒支梁的第一阶固有频率随 h/L 的变化

Fig. 2 Variations of the 1st-order natural frequency of quasicrystal layered simply supported beams with h/L under two different stacking sequences

图 3 显示了 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种准晶层合筒支梁的第一阶固有频率随层厚比 h_1/h_2 的变化。从图中可知:在层厚比 h_1/h_2 小于 1 时,两种准晶层合筒支梁的固有频率变化幅度较大;当层厚比 h_1/h_2 大于 1 时,固有频率的增长变化趋于平缓。当 h_1/h_2 约为 0.13 时,两种准晶层合梁具有相同的固有频率。随着 h_1/h_2 的增大,非局部效应的影响更加明显。

图 4 为在不同非局部参数 l 下 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种准晶层合梁沿厚度方向的模态,其中 u_{\max} 为 u_1, u_3, w_3 中的最大值。从图中可以观察到,随着非局部参数的增大,声子场位移模态逐渐增加,而相位子场位移模态逐渐减小,且两种准晶层合筒支梁的振型都是关于中间层对称的。

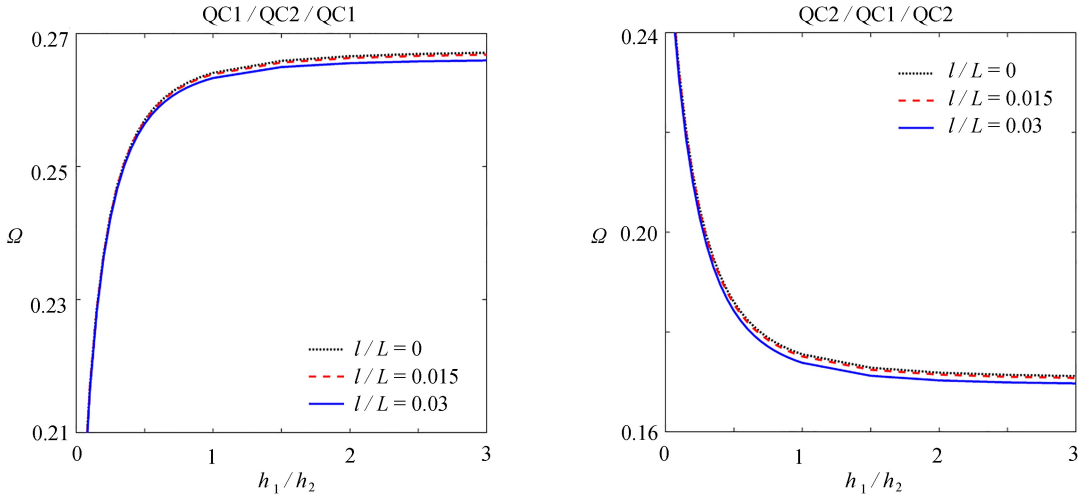


图3 两种叠层顺序下准晶层合简支梁的第一阶固有频率随 h_1/h_2 的变化

Fig. 3 Variations of the 1st-order natural frequency of quasicrystal layered simply supported beams with h_1/h_2 under two different stacking sequences

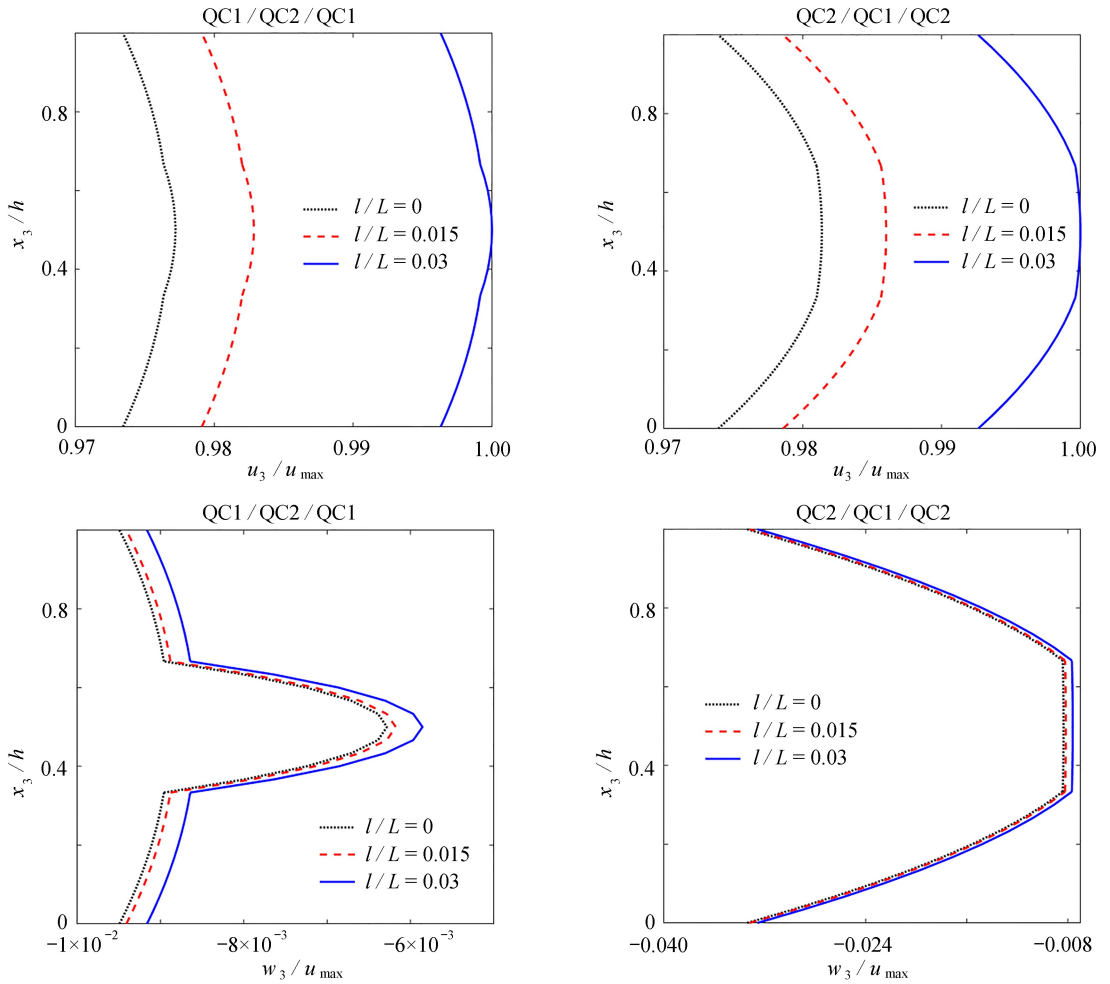


图4 不同非局部参数下准晶层合简支梁一阶模态沿厚度方向的变化

Fig. 4 Variations of the 1st mode shape of quasicrystal layered simply supported beams along the thickness direction under different nonlocal parameters

3.2 屈曲

为了分析纳米准晶层合简支梁的屈曲问题,首先将单层简支梁模型结果与已有解^[24]进行对比,见表 4,其中材料参数为 $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.23$, 临界屈曲载荷的无量纲形式为 $\bar{N}_{cr} = N_{cr} \times L^2 / (EI)$. 可以发现,本文模型所得解与已有解吻合很好.

表 4 均匀准晶简支梁的临界屈曲载荷 (\bar{N}_{cr})

Table 4 Critical buckling loads (\bar{N}_{cr}) of the homogenous simply supported beam

h/L	0.1	0.05	0.02
present results	10.091 1	10.336 0	10.406 6
exact solutions ^[24]	10.090 0	10.340 0	10.410 0

表 5 给出了在非局部参数 l 影响下两种准晶层合梁高跨比为 0.1, 0.15, 0.2 时的临界屈曲载荷值, 其中 $\bar{\sigma}_{cr} = \sigma_{cr} / C_{max}$, 且梁模型各层的厚度均相同.

表 5 两种叠层顺序下纳米准晶层合简支梁的临界屈曲载荷 ($\bar{\sigma}_{cr}$)

Table 5 Critical buckling loads ($\bar{\sigma}_{cr}$) of nano-quasicrystal layered simply supported beams under two different stacking sequences

l/L	QC1/QC2/QC1			QC2/QC1/QC2		
	$h/L = 0.1$	$h/L = 0.15$	$h/L = 0.2$	$h/L = 0.1$	$h/L = 0.15$	$h/L = 0.2$
0	$7.068 0 \times 10^{-3}$	$1.512 79 \times 10^{-2}$	$2.520 23 \times 10^{-2}$	$3.123 3 \times 10^{-3}$	$6.848 0 \times 10^{-3}$	$1.176 00 \times 10^{-2}$
0.015	$7.057 4 \times 10^{-3}$	$1.510 49 \times 10^{-2}$	$2.516 37 \times 10^{-2}$	$3.107 9 \times 10^{-3}$	$6.815 2 \times 10^{-3}$	$1.170 49 \times 10^{-2}$
0.03	$7.026 3 \times 10^{-3}$	$1.503 79 \times 10^{-2}$	$2.505 06 \times 10^{-2}$	$3.062 8 \times 10^{-3}$	$6.717 7 \times 10^{-3}$	$1.154 15 \times 10^{-2}$

图 5 显示了 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种纳米准晶层合简支梁的临界屈曲载荷随高跨比 h/L 的变化. 从图中可以看出, 两种纳米准晶梁的临界屈曲载荷均随着高跨比的增加而逐渐增大.

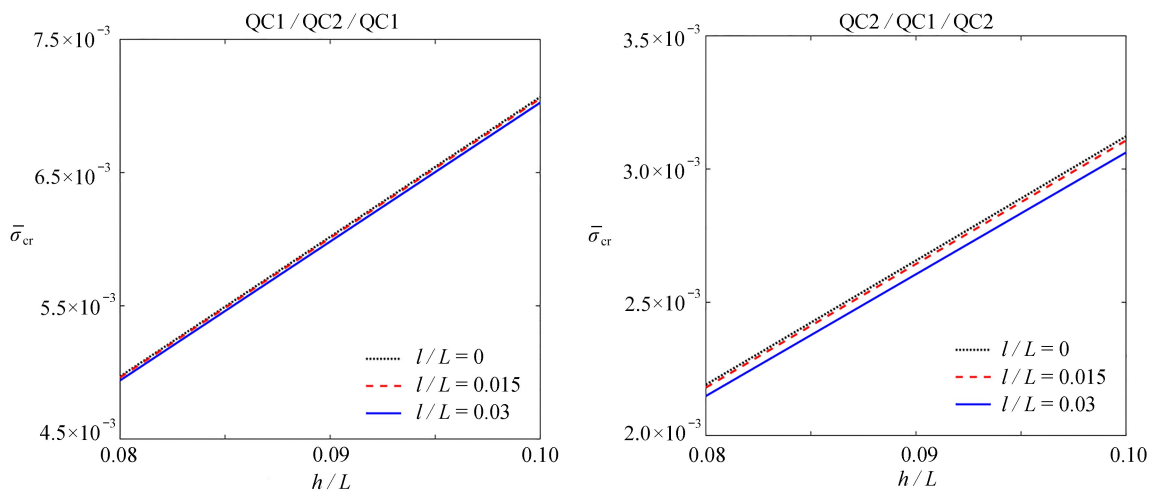


图 5 两种纳米准晶层合简支梁的临界屈曲载荷随高跨比 h/L 的变化

Fig. 5 Variations of the critical buckling loads of nano-quasicrystal layered simply supported beams with h/L

图 6 显示了 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 两种纳米准晶层合简支梁的临界屈曲载荷随层厚比 h_1/h_2 的变化. 从图中可知, 随着 h_1/h_2 的增加, QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2 的临界屈曲载荷的变化趋势相反. 当层厚比 h_1/h_2 小于 1 时, 两种纳米准晶梁的临界屈曲载荷变化明显; 当层厚比大于 1 时, 临界屈曲载荷逐渐趋于平稳. 当 h_1/h_2 约为 0.13 时, 两种准晶层合梁具有相同的临界屈曲载荷. 随着 h_1/h_2 的增大, 非局部效应的影响更加显著.

3.3 弯曲

假设在纳米准晶层合梁的上表面仅受声子场载荷作用, 即 $\sigma_0 = 1 \text{ N/m}^2$. 图 7 和 8 分别显示了两种叠层顺序下广义位移和广义应力沿厚度方向的变化, 其中层合梁的尺寸 $h/L = 0.1$, 且各层的厚度均相同. 从图中可以看出, 叠层顺序对声子场位移的影响相对较小, 而对相位子场位移和相位子场应力的影响较大. 随着非

局部参数的增加,声子场位移 u_3 的幅值逐渐增大,而相位子场位移 w_3 的幅值逐渐减小.非局部参数对 QC1/QC2/QC1 相位子场的应力几乎没有影响,但对 QC2/QC1/QC2 相位子场的应力的影响较大.

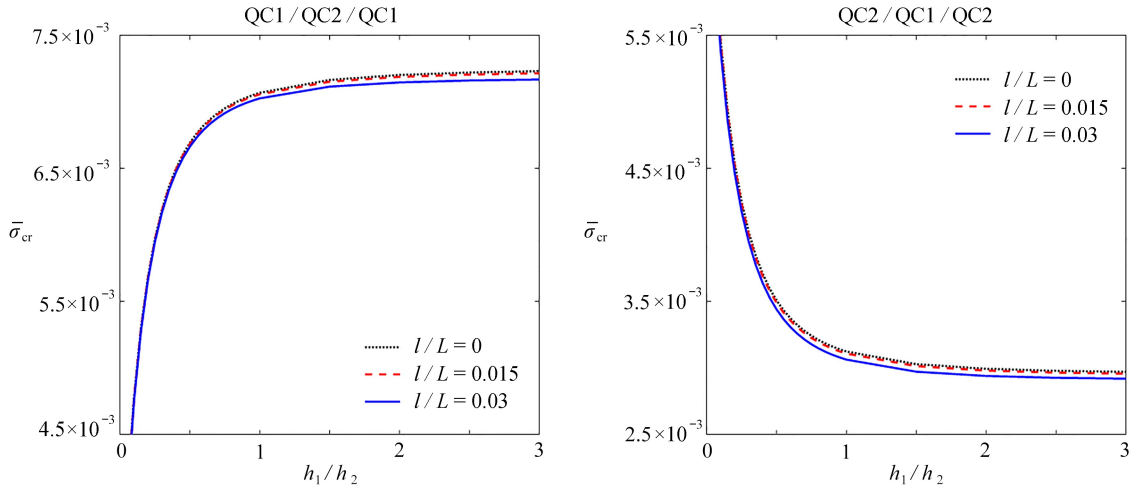


图6 两种纳米准晶层合简支梁的临界屈曲载荷随层厚比 h_1/h_2 的变化

Fig. 6 Variations of the critical buckling loads of nano-quasicrystal layered simply supported beams with h_1/h_2

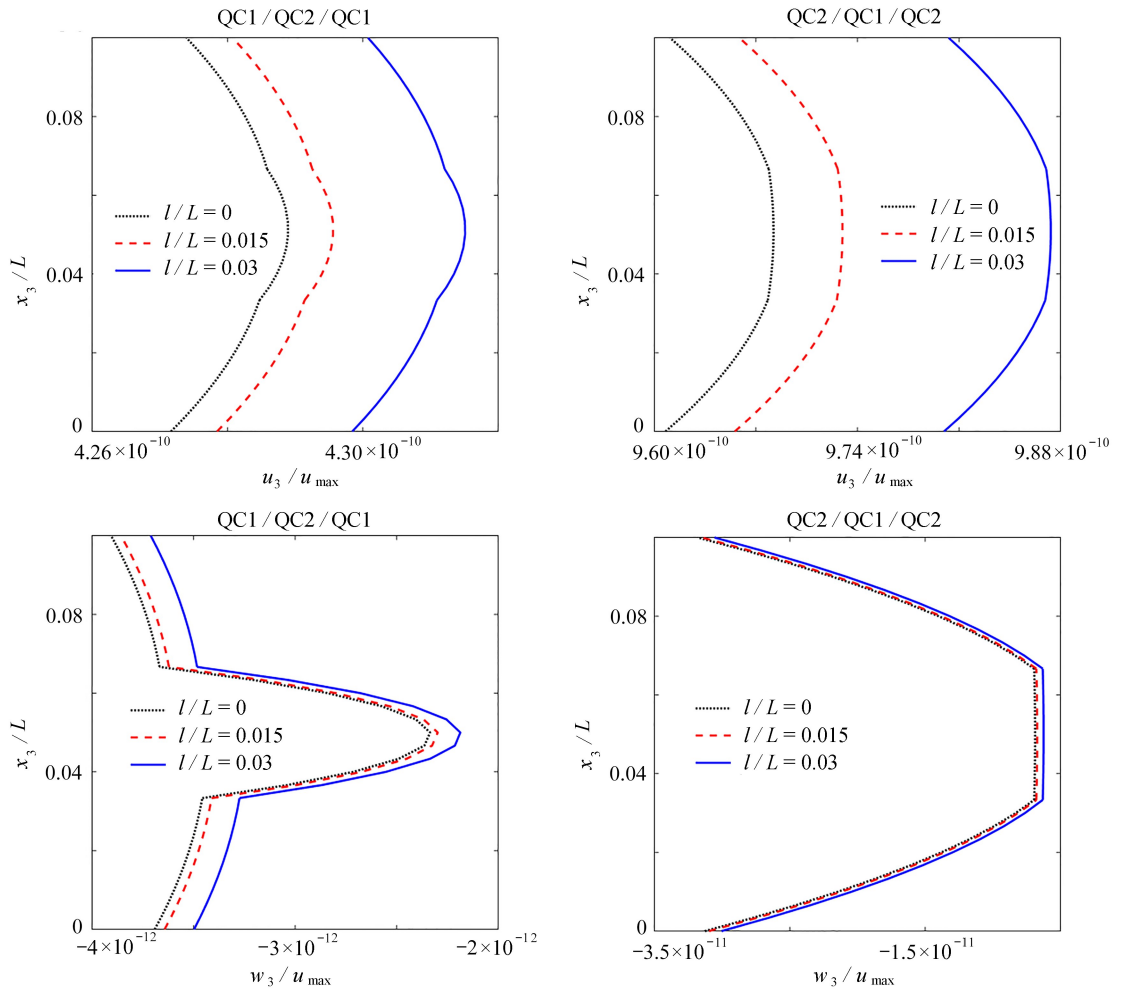


图7 声子场位移 u_3 和相位子场位移 w_3 沿层合梁厚度方向的变化

Fig. 7 Variations of phonon displacement u_3 and phason displacement w_3 along the thickness direction of layered beams

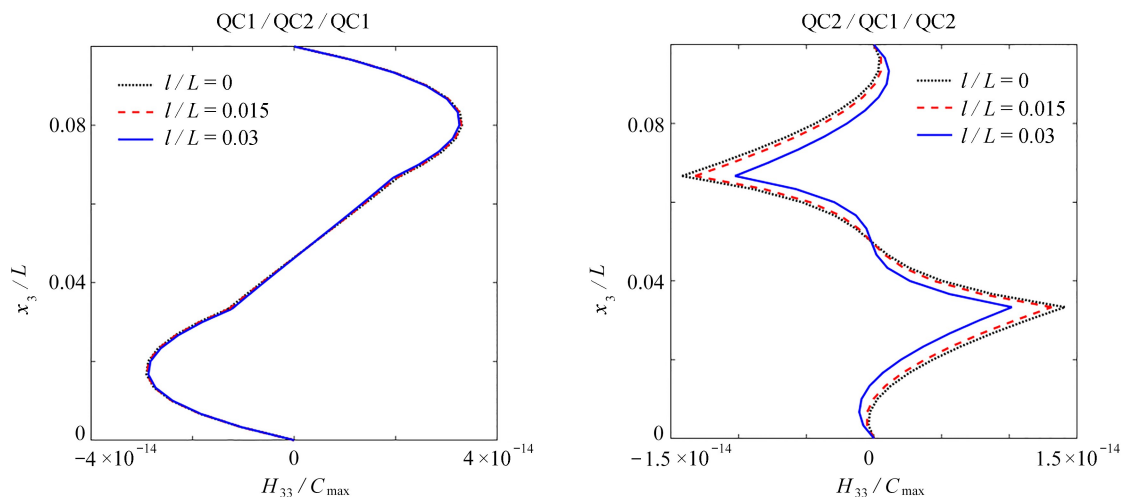


图 8 相位子场应力沿层合梁厚度方向的变化

Fig. 8 Variations of the phason stress along the thickness direction of layered beams

4 结 论

本文基于非局部理论,研究了一维准晶多层纳米梁的自由振动、屈曲和弯曲问题,将伪 Stroh 型公式和传递矩阵法相结合,导出了简支边界条件下一维纳米准晶层合深梁自由振动、屈曲和弯曲问题的精确解.通过数值算例分析,得出了如下结论:

1) 纳米准晶层合简支梁的固有频率和临界屈曲载荷均随着高跨比的增加而增大,表明厚度的增加可提高纳米准晶层合梁的固有频率和临界屈曲载荷.

2) 随着层厚比的增加, QC1/QC2/QC1 层合梁的固有频率和临界屈曲载荷逐渐增大,但 QC2/QC1/QC2 层合梁的固有频率和临界屈曲载荷逐渐减小. QC1/QC2/QC1 层合梁的固有频率和临界屈曲载荷高于 QC2/QC1/QC2 层合梁,这是由于 QC1 材料具有较高的刚度,更适用于作表面涂层.

3) 准晶层合梁的自由振动固有频率和临界屈曲载荷均随着非局部参数 l 的增大而减小,这是因为非局部效应使得纳米梁的刚度减小,从而降低其固有频率和临界屈曲载荷.

4) 叠层顺序对一维准晶纳米层合梁的力学性能有较大影响,特别是对相位子场的影响要大于对声子场的影响.

参考文献 (References):

- [1] SHECHTMAN D, BLECH I, GRATIAS D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. *Physical Review Letters*, 1984, **53**(20): 1951-1953.
- [2] 胡承正, 杨文革, 王仁卉, 等. 准晶的对称性和物理性质[J]. 物理学进展, 1997, **17**(4): 345-375. (HU Chengzheng, YANG Wenge, WANG Renhui, et al. Quasicrystal symmetry and physical properties[J]. *Progress in Physics*, 1997, **17**(4): 345-375. (in Chinese))
- [3] 高媛媛, 刘官厅. 一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(2): 210-222. (GAO Yuanyuan, LIU Guanting. Analytical solutions to problems of elliptical holes with 4 edge cracks in 1D orthorhombic quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 210-222. (in Chinese))
- [4] 李志强, 徐洲, 李小平, 等. 准晶材料的应用研究进展[J]. 材料导报, 2002, **16**(2): 9-11. (LI Zhiqiang, XU Zhou, LI Xiaoping, et al. Progress in research on application of quasicrystalline materials[J]. *Materials Reports*, 2002, **16**(2): 9-11. (in Chinese))
- [5] 胡克强, 高存法, 付佳维, 等. 无限大压电准晶介质中两个圆柱夹杂的干涉作用[J]. 内蒙古工业大学学报, 2023, **42**(3): 230-236. (HU Keqiang, GAO Cunfa, FU Jiawei, et al. Interference of two cylindrical inclusions in an infinite piezoelectric quasicrystal medium[J]. *Journal of Inner Mongolia University of Technology*,

- 2023, **42**(3): 230-236. (in Chinese))
- [6] GADIYAR C, LOIUDICE A, D'AMBRA F, et al. Nanocrystals as precursors in solid-state reactions for size- and shape-controlled polyelemental nanomaterials[J]. *Journal of the American Chemical Society*, 2020, **142**(37): 15931-15940.
- [7] 郭丽辉, 范天佑. 准晶弹性理论边值问题的可解性[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(8): 949-957. (GUO Lihui, FAN Tianyou. Solvability on boundary-value problems of elasticity of three-dimensional quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(8): 949-957. (in Chinese))
- [8] BARUA P, MURTY B S, SRINIVAS V. Mechanical alloying of Al-Cu-Fe elemental powders[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2001, **304**(1/2): 863-866.
- [9] SINGH A, OSAWA Y, SOMEKAWA H, et al. Ultra-fine grain size and isotropic very high strength by direct extrusion of chill-cast Mg-Zn-Y alloys containing quasicrystal phase[J]. *Scripta Materialia*, 2011, **64**(7): 661-664.
- [10] WANG H T, GUO J H, JIANG X, et al. Bending and vibration of one-dimensional hexagonal quasicrystal layered plates with imperfect interface[J]. *Acta Mechanica*, 2022, **233**(10): 4029-4046.
- [11] 魏悦广. 机械微型化所面临的科学难题-尺度效应[J]. *世界科技研究与发展*, 2000, **22**(2): 57-61. (WEI Yueguang. Size effect, a hard topic for machine-miniaturization[J]. *World Sci-Tech R&D*, 2000, **22**(2): 57-61. (in Chinese))
- [12] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [13] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [14] AIFANTIS E C. Strain gradient interpretation of size effects[J]. *International Journal of Fracture*, 1999, **95**(1/4): 299-314.
- [15] WAKSMANSKI N, PAN E. Nonlocal analytical solutions for multilayered one-dimensional quasicrystal nanoplates[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2017, **139**(2): 021006.
- [16] LI Y, YANG L Z, ZHANG L L, et al. Size-dependent effect on functionally graded multilayered two-dimensional quasicrystal nanoplates under patch/uniform loading[J]. *Acta Mechanica*, 2018, **229**(8): 3501-3515.
- [17] ZHANG L, GUO J H, XING Y M. Bending deformation of multilayered one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal nanoplates with nonlocal effect[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, **132/133**: 278-302.
- [18] SUN T Y, GUO J H, PAN E. Nonlocal vibration and buckling of two-dimensional layered quasicrystal nanoplates embedded in an elastic medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 1077-1094.
- [19] GUO J H, ZHANG M, CHEN W Q, et al. Free and forced vibration of layered one-dimensional quasicrystal nanoplates with modified couple-stress effect[J]. *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2020, **63**(7): 124-125.
- [20] ZHANG L, GUO J H, XING Y M. Bending analysis of functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal multilayered simply supported nanoplates based on nonlocal strain gradient theory[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2021, **34**(2): 237-251.
- [21] HUANG Y Z, CHEN J, ZHAO M, et al. Electromechanical coupling characteristics of double-layer piezoelectric quasicrystal actuators[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, **196**(8): 106293.
- [22] LI Y S, XIAO T. Free vibration of the one-dimensional piezoelectric quasicrystal microbeams based on modified couple stress theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, **96**: 733-750.
- [23] SUN T Y, GUO J H. Free vibration and bending of one-dimensional quasicrystal layered composite beams by using the state space and differential quadrature approach[J]. *Acta Mechanica*, 2022, **233**(8): 3035-3057.
- [24] 陈韬, 郭俊宏, 田园. 一维六方准晶层合筒支梁自由振动与屈曲的精确解[J]. *固体力学学报*, 2023, **44**(1): 109-119. (CHEN Tao, GUO Junhong, TIAN Yuan. Exact solution of free vibration and buckling of one-dimensional hexagonal simply-supported and layered quasicrystal beams[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2023, **44**(1): 109-119. (in Chinese))

- [25] MAHDAVI M H, FARSHIDAINFAR A, TAHANI M, et al. A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever[J]. *Ultramicroscopy*, 2008, **109**(1): 54-60.
- [26] ZHANG J H, CHENG Z W, DONG J J, et al. Cascaded nanobeam spectrometer with high resolution and scalability[J]. *Optica*, 2022, **9**(5): 517-521.
- [27] HUANG Q Y, LOVERIDGE M J, GENIESER R, et al. Electrochemical evaluation and phase-related impedance studies on silicon-few layer graphene (FLG) composite electrode systems[J]. *Scientific Reports*, 2018, **8**(1): 1386.
- [28] 马文赛, 刘方浩, 李东霄, 等. 特殊对称铺设复合材料层合矩形板的全局动力学研究[J]. 内蒙古工业大学学报, 2023, **42**(2): 109-115. (MA Wensai, LIU Fanghao, LI Dongxiao, et al. Global dynamics of a special symmetrically laid composite laminated rectangular plate[J]. *Journal of Inner Mongolia University of Technology*, 2023, **42**(2): 109-115. (in Chinese))
- [29] 娄阁, 陈思. 三维针织/机织混合聚氨酯基复合材料的压缩性能研究[J]. 内蒙古工业大学学报, 2023, **42**(3): 252-256. (LOU Ge, CHEN Si. Compression properties of three-dimensional knitted/woven hybrid polyurethane matrix composites[J]. *Journal of Inner Mongolia University of Technology*, 2023, **42**(3): 252-256. (in Chinese))
- [30] CHANG S Y, CHEN B J, HSIAO Y T, et al. Preparation and nanoscopic plastic deformation of toughened Al-Cu-Fe-based quasicrystal/vanadium multilayered coatings[J]. *Materials Chemistry and Physics*, 2018, **213**: 277-284.
- [31] GUO J H, SUN T Y, PAN E. Three-dimensional nonlocal buckling of composite nanoplates with coated one-dimensional quasicrystal in an elastic medium[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, **185**: 272-280.
- [32] LIU H, PAN E, CAI Y C. General surface loading over layered transversely isotropic pavements with imperfect interfaces[J]. *Advances in Engineering Software*, 2018, **115**: 268-282.
- [33] FENG X, FAN X Y, LI Y, et al. Static response and free vibration analysis for cubic quasicrystal laminates with imperfect interfaces[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2021, **90**(14): 104365.
- [34] WANG Q, WANG C M. The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes[J]. *Nanotechnology*, 2007, **18**(7): 075702.