

# 接触与大变形问题的光滑有限元分析\*

范亚杰, 李燕, 李中潘, 陈荟键, 冯志强

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

(本刊编委冯志强来稿)

**摘要:** 橡胶材料因具有良好的抗震、吸能作用,在实际工程中应用广泛.然而橡胶超弹性材料的碰撞属于强非线性问题,分析橡胶材料的接触碰撞和大变形问题对于提高装置的缓冲性能具有重要意义.光滑有限元法(smoothed finite element method, S-FEM)是一种弱形式的数值计算方法,相比于传统的有限元方法,光滑有限元法对网格的质量要求不高,允许单元在计算过程中发生较大的变形,且光滑域的构造比较灵活,在不增加自由度的前提下,可以达到较高的精度.在光滑有限元法的基础上,采用双势方法进行接触计算,以充分利用光滑有限元法计算大变形问题的优点和双势方法求解接触力的优势.通过与有限元软件 MSC.Marc 的数值结果对比,验证了该算法的准确性和能量守恒性,并且分析了摩擦因数对碰撞体的影响.

**关键词:** 接触; 大变形; 超弹性材料; 光滑有限元法; 双势方法

**中图分类号:** O343.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440251

## Smoothed Finite Element Analysis of Contact and Large Deformation Problems

FAN Yajie, LI Yan, LI Zhongpan, CHEN Huijian, FENG Zhiqiang  
(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P.R.China)

(Contributed by FENG Zhiqiang, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Rubber material is widely used in practical engineering due to its good seismic and energy absorption effect. However, the collision of hyperelastic materials is a strong nonlinear problem. It is of great significance to analyze the contact collision and large deformation of hyperelastic materials to improve the buffering performance of the device. The smoothed finite element method (S-FEM) is a weak form of numerical calculation method. Compared with the traditional finite element method, the smoothed finite element method has low requirements on the mesh quality, allows the element to undergo large deformation during the calculation process, where the construction of the smooth domain is more flexible. The S-FEM has high accuracy without

\* 收稿日期: 2023-08-17; 修订日期: 2023-11-29

基金项目: 国家自然科学基金(12002290)

作者简介: 范亚杰(1999—),男,硕士生(E-mail: fanyajie@my.swjtu.edu.cn);

李燕(1990—),女,副教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: yanli@swjtu.edu.cn);

李中潘(1997—),男,博士生(E-mail: 2017114420@my.swjtu.edu.cn);

陈荟键(1991—),男,博士生(E-mail: huijianc@foxmail.com);

冯志强(1963—),男,教授,博士生导师(E-mail: zhiqiang.feng@univ-evry.fr).

**引用格式:** 范亚杰, 李燕, 李中潘, 陈荟键, 冯志强. 接触与大变形问题的光滑有限元分析[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(2): 127-143.

additional degrees of freedom. Based on the S-FEM, the double potential method was applied to contact calculation, with both advantages of the S-FEM in calculating large deformation problems and advantages of the double potential method in solving contact force fully used. In comparison with the numerical results of finite element software MSC. Marc, the results of the proposed algorithm were verified with high accuracy and good energy conservation, and the effects of the friction coefficient on the collision body were analyzed.

**Key words:** contact; large deformation; hyperelastic material; smoothed finite element method; bi-potential theory

## 0 引言

接触和大变形问题广泛存在于工程应用当中,例如航天器的对接<sup>[1-2]</sup>、车辆制动<sup>[3]</sup>等。碰撞作为瞬时接触<sup>[4]</sup>,属于非光滑的动态现象,摩擦是接触表面结构非线性的最重要来源<sup>[5]</sup>。近年来,有着良好抗震和缓冲性能的超弹性材料应用广泛,例如在防弹衣中用来吸收枪支发射的子弹或爆炸碎片的冲击能量,应用到隔震支座中提高支座的抗震性能<sup>[6]</sup>,用在动车组的车钩缓冲装置中以提高装置的缓冲性能<sup>[7-8]</sup>。还有在动力学仿真研究中,捕捉物体的运动路径对相关领域有着重要的指导作用,比如预测物体的运动路径<sup>[9]</sup>,从而可以有效防止二次碰撞对于物体造成的损伤等情况,再结合材料的性能,探究物体接触面的应力、变形等,可以对车辆碰撞系统、缓冲材料的性能等领域的研究提供一定的指导,非光滑接触动力学仿真研究,在工程领域有着广阔的应用前景。

近年来,求解接触问题的数值算法发展迅速,例如罚函数法<sup>[10-11]</sup>和 Lagrange 乘子法等,虽然这些方法运用广泛,但却不能精确满足接触边界条件和摩擦定律,而且很难选择合适的罚因子。Lagrange 乘子法虽然满足法向方向上的接触边界条件,但因为引入了 Lagrange 乘子变量,Lagrange 乘子的迭代速度取决于罚因子,罚因子会根据碰撞间隙值的变化而更新。De Saxcé 和 Feng 等<sup>[12-13]</sup>提出了双势方法来求解接触问题,该方法在不增加自由度的前提下,既能准确地满足法向的 Signorini 接触条件,又能满足切向的 Coulomb 摩擦定律,使编程简单,在处理接触问题上具有较高的精度和效率。周洋靖等<sup>[14]</sup>将双势方法应用于非关联材料的弹塑性本构,Peng 等<sup>[15]</sup>在原始 Uzawa 算法的基础上,提出了一种具有更高效率的算法,并结合双势方法应用于软体材料的大变形仿真。

随着有限元法的深入应用,人们发现经典的有限元法存在一定的局限性和缺陷<sup>[16]</sup>,由于完全兼容的 Galerkin 弱形式使得线性三角形单元和四面体单元的精度较差;并且在计算过程中,对生成网格的质量要求很高,后来出现的混合有限元法、无网格法<sup>[17]</sup>等都在致力于解决这些问题。比如混合有限元法,其操作仍然局限在单元内部,无网格法虽然超越了单元的界限,但其通用性不是很强,同时无网格法的编程工作和对计算成本的消耗比有限元法高出很多。针对有限元法的不足,Liu<sup>[18]</sup>在有限元法的基础上,结合无网格法思想,提出了光滑有限元法(S-FEM)<sup>[19]</sup>,成功克服了以上难题,避免了映射过程的出现,使得域积分转化为沿着光滑域边界的线积分<sup>[20]</sup>,计算过程中不涉及形函数的梯度或导数<sup>[21]</sup>,不涉及 Jacobi 矩阵的求解。在一定程度上,光滑有限元法允许使用质量较差的单元,允许单元在计算过程中发生较大的变形。Li 等<sup>[22-23]</sup>利用光滑有限元法求解弹性和超弹性的接触问题,Yue 等<sup>[24]</sup>将该方法应用于接触和散射问题。

本文采用基于面元的光滑有限元法(CSFEM),在双势框架下求解超弹性体的接触大变形问题,首先介绍了求解动力学问题的隐式时间积分方法。其次利用双势方法求解得到局部接触力,再向全局转化,将其作为外力代入到整体方程中求解位移,在完全 Lagrange 框架下,将变形梯度光滑化,建立了超弹性材料的应变能密度函数表达式,最后通过与有限元软件 MSC.Marc 的数值算例对比,探究了不同摩擦因数对数值结果的影响,证明了该算法的准确性。

## 1 理论基础

### 1.1 时间积分计算

在考虑接触力的情况下,动力学控制方程可写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_A \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{R}_c = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{D}_A$  为阻尼矩阵,  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  为内力,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  为外力,  $\mathbf{R}_c$  为接触力;  $\ddot{\mathbf{u}}$  为加速度矢量,  $\dot{\mathbf{u}}$  为速度矢量。

本文采用隐式梯形法则,即 Tamma-Namburu<sup>[25]</sup> 方法进行时间积分:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}^t), \quad (2)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt = \Delta t[(1 - \xi)\mathbf{F}^t + \xi\mathbf{F}^{t+\Delta t}], \quad (3)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c dt = \Delta t\mathbf{R}_c^{t+\Delta t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t = \Delta t[(1 - \theta)\dot{\mathbf{u}}^t + \theta\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}], \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}$ ,  $\mathbf{u}$  为位移矢量,参数  $\xi$  和  $\theta$  的取值为  $0 \leq \xi \leq 1$  和  $0 \leq \theta \leq 1$ .采用分离非线性的方法,将材料非线性和接触非线性进行分离.通过 Newton-Raphson 迭代方法对动力学非线性方程组进行迭代,定义迭代步为  $i$ ,当  $i = 1$  时,  $\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{F}^t$  有

$$\mathbf{F}^{i+1} = \mathbf{F}_{\text{int}}^i + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}^{i+1} - \dot{\mathbf{u}}^i) = \mathbf{F}_{\text{int}}^i - \mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u} - \mathbf{D}_A^i \Delta \dot{\mathbf{u}}^i, \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵.根据式(1),得到关于位移的递归形式:

$$\tilde{\mathbf{K}}^i \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{F}}^i + \mathbf{R}_c^{i+1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}. \quad (8)$$

有效刚度矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}^i$  和有效力载荷  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  可由下式给出:

$$\tilde{\mathbf{K}}^i = \xi \mathbf{K}^i + \frac{\xi}{\theta \Delta t} \mathbf{D}_A^i + \frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M}^i, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^i = (1 - \xi)(\mathbf{F}_{\text{int}}^i + \mathbf{F}_{\text{ext}}^i) + \xi(\mathbf{F}_{\text{int}}^{i+\Delta t} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+\Delta t}) - \frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M}^i(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^t - \Delta t \dot{\mathbf{u}}^t). \quad (10)$$

本文中,Newton-Raphson 法求解过程的收敛精度从力和位移两个方向同时进行控制,在第  $i$  次迭代中

$$|\Delta \tilde{\mathbf{F}}^{(i)}| \leq \varepsilon_F, \quad (11)$$

$$|\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}| \leq \varepsilon_u. \quad (12)$$

只有式(11)和(12)同时满足,才能达到精度要求,其中收敛精度设置为  $\varepsilon_F = 0.001$ ,  $\varepsilon_u = 0.001$ .跳出迭代步后,进行速度的更新,如果满足收敛,速度更新为

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \dot{\mathbf{u}}^t + \frac{1}{\theta \Delta t}(\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t). \quad (13)$$

## 1.2 动态接触模型

假设两个物体上的点  $M$  和点  $N$  接触,  $M$  和  $N$  组成一个接触映射关系  $\alpha$ ,法向矢量为  $\mathbf{n}$ , Moreau<sup>[26]</sup> 揭示了接触模型的动态形式,将其扩展到刚体动力学的冲击问题当中,在动力学问题中,Signorini 模型使用的是基于速度的表达式:

$$S_{\text{Signorini}}(\dot{\mathbf{x}}_n^\alpha, r_n^\alpha) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_n^\alpha \geq 0, r_n^\alpha \geq 0, \dot{\mathbf{x}}_n^\alpha r_n^\alpha = 0, \quad (14)$$

其中,  $\dot{\mathbf{x}}_n^\alpha = \dot{\mathbf{x}}^\alpha \mathbf{n}$  表示沿法向量  $\mathbf{n}$  的相对速度,  $r_n^\alpha = r_n^\alpha \mathbf{n}$  为两物体之间的法向接触力.同样,在动态形式下, Coulomb 摩擦模型基于速度的表达式可以写为

$$C_{\text{Coulomb}}(\dot{\mathbf{x}}_t^\alpha, r_t^\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta = \|\mathbf{r}_t^\alpha\| - \mu r_n^\alpha \leq 0, \\ \dot{\mathbf{x}}_t^\alpha = -\lambda \frac{\mathbf{r}_t^\alpha}{\|\mathbf{r}_t^\alpha\|}, \quad \lambda \geq 0, \vartheta \lambda = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $\dot{\mathbf{x}}_t^\alpha$  为速度  $\dot{\mathbf{x}}^\alpha$  在切向方向  $\mathbf{t}$  上的分量,  $\mathbf{r}_t^\alpha$  为切向摩擦力,  $\mu$  为物体间的摩擦因数,  $\lambda$  为切向速度的模量.综合上述式子,基于速度的完全 Signorini-Coulomb 接触准则可写为

$$\begin{cases} r_n^\alpha = 0, \dot{x}_n^\alpha \geq 0, & \text{separating,} \\ r^\alpha \in \text{int } K_\mu, \dot{x}_n^\alpha = 0, \dot{x}_t^\alpha = \mathbf{0}, & \text{sticking,} \\ r^\alpha \in \text{bd } K_\mu, \dot{x}_n^\alpha = 0, -\dot{x}_t^\alpha = \lambda \frac{r_t^\alpha}{\|r_t^\alpha\|} (\lambda > 0), & \text{sliding,} \end{cases} \quad (16)$$

$\text{int } K_\mu$  和  $\text{bd } K_\mu$  表示 Coulomb 摩擦锥的内部和边界。

如图 1 所示, 两物体  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  发生碰撞,  $P_1$  和  $P_2$  分别为其接触节点. 基于节点  $P_1$  建立局部直角坐标系, 两点之间的距离可以表示为

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}(P_1) - \mathbf{x}(P_2) = x_t \mathbf{t} + x_n \mathbf{n}, \quad (17)$$

式中,  $x_t$  为接触位移在  $\mathbf{t}$  方向上的投影,  $x_n$  为接触位移在  $\mathbf{n}$  方向的投影,

$$x_t = \mathbf{t}^T \Delta \mathbf{u}, \quad x_n = \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{u}, \quad (18)$$

$$\mathbf{t} = \{1 \ 0\}^T, \quad \mathbf{n} = \{0 \ 1\}^T. \quad (19)$$

则

$$\mathbf{x} = \{x_t \ x_n\} = \{\mathbf{t}^T \Delta \mathbf{u} \ \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{u}\} = \{\mathbf{t}^T \ \mathbf{n}^T\} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}, \quad (20)$$

$\mathbf{H}$  是从局部坐标系到全局坐标系的转换矩阵. 若考虑初始间隙  $\mathbf{g}$ , 式(20)可以改写为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}. \quad (21)$$

同理, 在局部坐标系中, 接触力  $\mathbf{r}$  被定义为

$$\mathbf{r} = r_t \mathbf{t} + r_n \mathbf{n}. \quad (22)$$

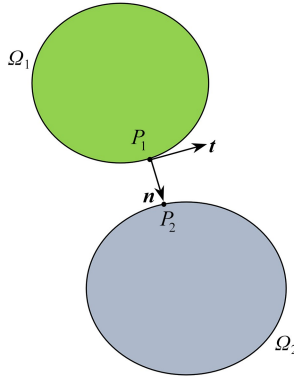


图 1 碰撞模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the collision model

根据虚功原理, 局部接触力和全局接触力有以下关系:

$$\mathbf{r}^T \delta \mathbf{x} = \mathbf{R}_c^T \delta \mathbf{u}. \quad (23)$$

可得到

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{H}^T \mathbf{r}. \quad (24)$$

根据以上推导, 得到整个接触系统的方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{R}_c = \mathbf{H}^T \mathbf{r}. \end{cases} \quad (25)$$

将式(7)代入到式(25)中, 可得到

$$\mathbf{x} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{R}_c) + \mathbf{g} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{R}_c + \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{g} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{r} + \mathbf{x}_f. \quad (26)$$

定义

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{H}^T, \\ \mathbf{x}_f = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{g}, \end{cases} \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{W}$  是基于接触系统构建的 Delassus 算子<sup>[27]</sup>. 为了在迭代过程之前降低问题的维数, 将式(7)重构为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{rr} & \tilde{\mathbf{K}}_{rc} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rc} & \tilde{\mathbf{K}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_r \\ \Delta \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{R}_c \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

其中,  $\Delta \mathbf{u}_c$  为接触点的位移矢量,  $\Delta \mathbf{u}_r$  为其他节点的位移矢量,  $\Delta \mathbf{u}_r$  通过以下方式被消除:

$$\Delta \mathbf{u}_r = \tilde{\mathbf{K}}_{rr}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{K}}_{rc} \Delta \mathbf{u}_c). \quad (29)$$

将式(29)代入到式(28),可以得到

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^* \Delta \mathbf{u}_c = \tilde{\mathbf{F}}^* + \mathbf{R}_c, \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^* = \tilde{\mathbf{K}}_{cc} - \tilde{\mathbf{K}}_{rc}^T \tilde{\mathbf{K}}_{rr}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{rc}, \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^* = -\tilde{\mathbf{K}}_{rc}^T \tilde{\mathbf{K}}_{rr}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (32)$$

由此可得

$$\mathbf{W}_{cc} = (\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^*)^{-1}. \quad (33)$$

### 1.3 双势接触理论

双势理论<sup>[12]</sup>是 De Saxcé 和 Feng 于 1991 年提出的.他们在 Legendre 定理的基础上,通过 Fenchel 不等式变换,建立了一组能够处理对偶变量的方程,用来处理与隐式标准材料有关的问题,并在此基础上,提出了双势函数的概念.在接触摩擦问题中,接触距离  $\mathbf{x}^\alpha$  和接触力  $\mathbf{r}^\alpha$  构成一组对偶变量,可以得到

$$b_c(-\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{r}^\alpha) = \prod_{K_\mu}(\mathbf{r}^\alpha) + \prod_{\mathfrak{R}_-}(-\mathbf{x}_n^\alpha) + \mu \mathbf{r}_n^\alpha \|\mathbf{x}_t^\alpha\|, \quad (34)$$

式中,  $\prod_{K_\mu}(\mathbf{r}^\alpha)$  和  $\prod_{\mathfrak{R}_-}(-\mathbf{x}_n^\alpha)$  为指示函数;  $K_\mu$  和  $\mathfrak{R}_-$  分别为指示函数的约束条件,  $K_\mu$  为 Coulomb 摩擦锥,  $\mathfrak{R}_- = (-\infty, 0]$ , 当指示函数满足其对应的约束条件时,值为 0, 否则为  $+\infty$ , 可定义为

$$\prod_{K_\mu}(\mathbf{r}^\alpha) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}^\alpha \in K_\mu, \\ +\infty, & \text{others,} \end{cases} \quad (35)$$

$$\prod_{\mathfrak{R}_-}(-\mathbf{x}_n^\alpha) = \begin{cases} 0, & -\mathbf{x}_n^\alpha \in (-\infty, 0], \\ +\infty, & \text{others.} \end{cases} \quad (36)$$

式(34)的隐式形式可写为

$$-\mathbf{x}^\alpha \in \frac{\partial b_c(-\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{r}^\alpha)}{\partial \mathbf{r}^\alpha}, \quad \mathbf{r}^\alpha \in \frac{\partial b_c(-\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{r}^\alpha)}{-\partial \mathbf{x}^\alpha}. \quad (37)$$

由式(34)可知,双势函数包含了接触力与切向位移的耦合项,它们不能拆分成两个独立的势函数.用增广 Lagrange 方法对式(37)进行处理可得到

$$\rho b_c(-\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{r}^{\alpha*}) - \rho b_c(-\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{r}^\alpha) \geq [(\mathbf{r}^\alpha - \rho \mathbf{x}^\alpha) - \mathbf{r}^\alpha] \cdot (\mathbf{r}^{\alpha*} - \mathbf{r}^\alpha), \quad (38)$$

其中,  $\rho$  为双势因子,取值可为柔度矩阵对角线元素最大值的倒数.增广 Lagrange 接触力  $\mathbf{r}^{\alpha*}$  可以表示为

$$\mathbf{r}^{\alpha*} = \mathbf{r}^\alpha - \rho [\mathbf{x}_t^\alpha + (\mathbf{x}_n^\alpha + \mu \|\mathbf{x}_t^\alpha\|) \mathbf{n}]. \quad (39)$$

增广 Lagrange 接触力  $\mathbf{r}^{\alpha*}$  在接触迭代中又被称为预测接触力,所以在得到  $\mathbf{r}^{\alpha*}$  后,需要在 Coulomb 摩擦锥上进行投影修正:

$$\mathbf{r}^\alpha = \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}^{\alpha*}). \quad (40)$$

如图 2 所示,图中  $K_\mu^*$  为对偶锥.在不同接触状态下,式(40)右端具体表达式为

$$\begin{cases} \text{separating:} & \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}^{\alpha*}) = \mathbf{0}, & \mu \|\mathbf{r}_t^{\alpha*}\| \leq -\mathbf{r}_n^{\alpha*}, \\ \text{sticking:} & \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}^{\alpha*}) = \mathbf{r}^{\alpha*}, & \|\mathbf{r}_t^{\alpha*}\| \leq \mu \mathbf{r}_n^{\alpha*}, \\ \text{sliding:} & \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}^{\alpha*}) = \mathbf{r}^{\alpha*} - \left( \frac{\|\mathbf{r}_t^{\alpha*}\| - \mu \mathbf{r}_n^{\alpha*}}{1 + \mu^2} \right) \left( \frac{\mathbf{r}_t^{\alpha*}}{\|\mathbf{r}_t^{\alpha*}\|} - \mu \mathbf{n} \right), & \text{others.} \end{cases} \quad (41)$$

利用 Uzawa 算法求解局部接触力,计算过程包含预测-修正两部分:

$$\begin{cases} \text{prediction:} & \mathbf{r}^{\alpha*(i+1)} = \mathbf{r}^{\alpha(i)} - \rho^{(i)} [\mathbf{x}_t^{(i)} + (\mathbf{x}_n^{(i)} + \mu \|\mathbf{x}_t^{(i)}\|) \mathbf{n}], \\ \text{correction:} & \mathbf{r}^{\alpha(i+1)} = \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}^{\alpha*(i+1)}), \end{cases} \quad (42)$$

其中,  $i$  和  $i + 1$  为迭代步. Uzawa 算法求解出局部接触力后, 通过式 (24) 将局部接触力转换为全局接触力, 将其代入到式 (7) 中即可求得  $\Delta \mathbf{u}$ .

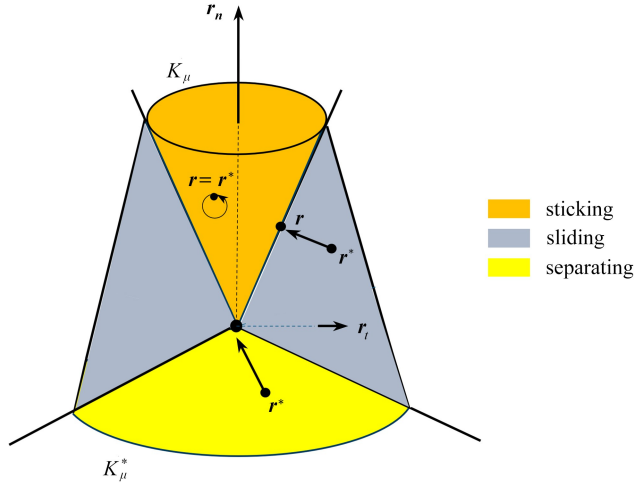


图2 Coulomb 摩擦锥

Fig. 2 Coulomb's frictional cone

### 1.4 光滑变形梯度

假设任意一个质点在初始构型中的几何位置为  $\mathbf{X}$ , 在当前构型中的几何位置为  $\mathbf{x}$ , 该质点的位移为  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ , 则该质点从初始构型到当前构型的变形梯度为

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}. \tag{43}$$

光滑有限元法是由有限元法结合应变光滑技术发展而来, 在 CSFEM 中, 光滑域的构造就是建立在 FEM-Q4 基础网格之上. 将问题域  $\Omega$  分成  $N_e$  个四边形单元, 满足单元之间无重叠, 无间隙, 即  $\Omega = \cup_{i=1}^{N_e} \Omega_i^e$  且  $\Omega_i^e \cap \Omega_j^e = \emptyset (i \neq j)$ , 对于任意一个四边形单元  $\Omega_i^e$ , 将其划分为  $N_s^e$  个四边形光滑域, 保证能够覆盖整个单元且光滑域之间无间隙, 如图 3 所示.

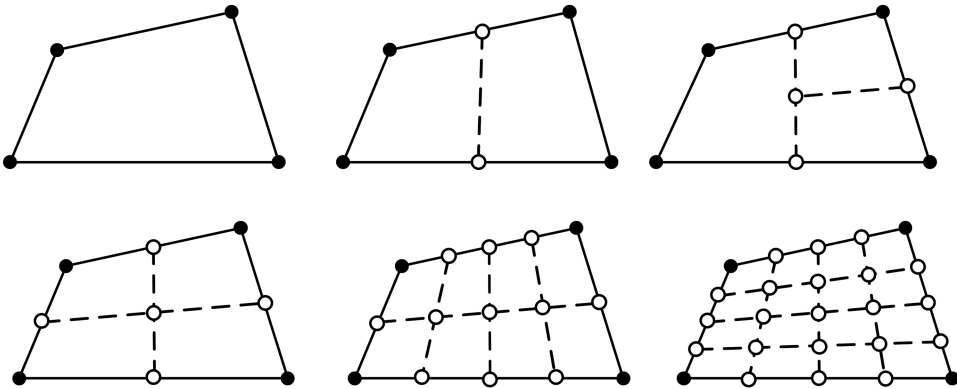


图3 四边形单元划分光滑域个数

Fig. 3 Numbers of smooth domains to be divided

在本文中, 将每个单元分别划分为 1, 2, 3, 4, 8 和 16 个光滑域, 用 CSFEM-1SD、CSFEM-2SD、CSFEM-3SD、CSFEM-4SD、CSFEM-8SD 和 CSFEM-16SD 来标记. 图 4 展示了 9 个四边形单元被划分为 36 个光滑域的情况.

在光滑有限元法当中, 通过光滑应变技术将光滑域内任意位置的应变光滑化. 任意一点  $\mathbf{x}_k$  处的光滑应变  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  有如下表示:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}_k) = \int_{\Omega_k^s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega, \tag{44}$$

$\Omega_k^s$  是  $\mathbf{x}_k$  所处的光滑域,  $\psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})$  是与  $\mathbf{x}_k$  相关的光滑函数,且满足  $\int_{\Omega_k^s} \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega = 1$ ,

$$\psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega = \begin{cases} 1/A_k^s, & \mathbf{x} \in \Omega_k^s, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_k^s. \end{cases} \tag{45}$$

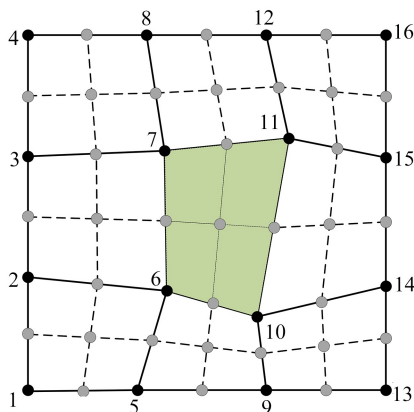


图 4 有限元背景网格被划分为 4 个光滑域

Fig. 4 The finite element background mesh divided into 4 smooth domains

本文采用的 Heaviside 型光滑函数如式(45)所示,  $A_k^s$  表示光滑域  $\Omega_k^s$  的面积,使用 Green 散度定理<sup>[28]</sup> 可得到

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}_k) &= \int_{\Omega_k^s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega_k^s} \nabla \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ &= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma, \end{aligned} \tag{46}$$

其中,  $\mathbf{L}$  是沿着光滑域边界的单位外法向矢量,  $\Gamma_k^s$  为光滑域的边界.注意在这个过程中只需要计算边界上的线积分而不需要计算面积分,并且不需要坐标的映射.

因此式(43)引入 Heaviside 型光滑函数,可以得到光滑变形梯度为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ij}(\mathbf{x}_k) &= \int_{\Omega_k^s} F_{ij}(\mathbf{x}_k) \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_k^s} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\Omega + \delta_{ij} = - \int_{\Omega_k^s} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})}{\partial X_j} u_i d\Omega + \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} d\Gamma + \delta_{ij} = \\ &= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} u_i n_j d\Gamma + \delta_{ij} = \bar{\nabla} u_{ij}(\mathbf{x}_k) + \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{47}$$

根据光滑变形梯度  $\bar{\mathbf{F}}$ , 得到右光滑 Cauchy-Green 变形张量  $\bar{\mathbf{C}}$ :

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}. \tag{48}$$

则光滑 Green-Lagrange 应变张量  $\bar{\mathbf{E}}$  为

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}), \tag{49}$$

其中,  $\mathbf{I}$  是单位张量.

在超弹性材料的本构关系中,应变能密度函数  $\mathbf{W}$  是应变张量的尺度函数,通过对光滑 Green-Lagrange 应变张量  $\bar{\mathbf{E}}$  求偏导得到第二光滑 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\bar{\mathbf{S}}$ :

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{E}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}}. \quad (50)$$

对应的四阶材料张量可以写为

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{E}}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{E}} \partial \bar{\mathbf{E}}}, \quad (51)$$

其分量形式为

$$D_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{E}_{ij} \partial \bar{E}_{kl}}. \quad (52)$$

Blatz-Ko 模型适用于描述大变形材料<sup>[29]</sup>,其应变能密度函数的表达式为

$$W = \frac{G_0}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right), \quad (53)$$

其中,  $G_0$  为剪切模量,  $I_i (i = 1, 2, 3)$  表示右光滑 Green-Lagrange 应变张量  $\bar{\mathbf{C}}$  的不变量.通过式(50),得到应力张量  $\bar{\mathbf{S}}$  关于 Green-Lagrange 应变张量  $\bar{\mathbf{E}}$  的表达式:

$$\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}) = G_0 [\eta(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})^{-1} - (2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})^{-2}], \quad (54)$$

其中,  $\eta = \sqrt{\det(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})}$ .那么材料张量有以下表达式:

$$\begin{aligned} D_{ijkl} = G_0 \{ & -2\eta(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} + \eta(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} + \eta(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} + \\ & 2[(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ik}^{-2}(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} + (2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I})_{ij}^{-2}] \}. \end{aligned} \quad (55)$$

## 2 数值算例

如图 5 所示,超弹性体的碰撞模型由三部分组成:超弹性体小球和两个对称的楔形刚体.其中,小球的圆心  $O$  点坐标为  $(0 \text{ m}, 0 \text{ m})$ , 半径  $R = 0.01 \text{ m}$ , 楔形体各顶点的坐标为  $A(0.005 \text{ m}, 0 \text{ m})$ ,  $B(0.015 \text{ m}, 0 \text{ m})$ ,  $C(0.015 \text{ m}, 0.035 \text{ m})$ ,  $D(0.012 \text{ m}, 0.035 \text{ m})$ , 给小球施加一个垂直的速度  $V_y = -30 \text{ m/s}$ , 小球密度  $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$ .用 Blatz-Ko 模型来描述超弹性小球,其剪切模量  $G = 3 \text{ MPa}$ , 接触区域摩擦因数  $\mu$  为 0.2.

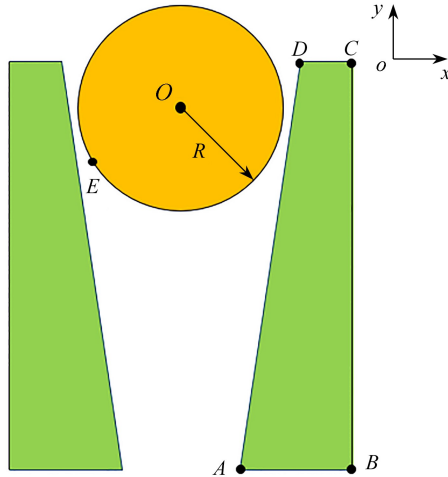


图 5 超弹性体的碰撞模型

Fig. 5 The collision model for hyperelastic bodies

表 1 展示了在不同摩擦因数下,超弹性小球到达最低点的不同时刻及其对应的最大应力值.图 6 为超弹性小球到达最低点时的 von Mises 应力云图.显然,3 种工况下的最大应力值的位置分布有着明显的差异:工况①小球下降得更低,导致变形更大,应力值更高,然而随着摩擦因数的增大,下降的高度越来越低,且最大应力的分布也逐渐移动到接触表面如工况③所示.



表 1 不同摩擦系数不同时刻下的 3 种工况

Table 1 Three conditions at different moments with different friction coefficients

condition	the moment the ball reaches the lowest point $T$ /ms	$\sigma_{\max}$ /Pa
① $\mu = 0.0$	0.87	8.32E6
② $\mu = 0.2$	0.70	4.37E6
③ $\mu = 0.4$	0.61	4.22E6

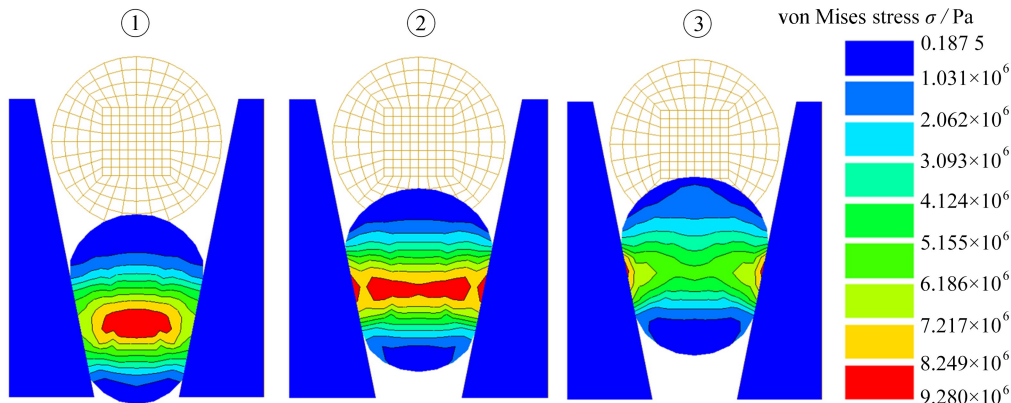


图 6 3 种工况下的 von Mises 应力图

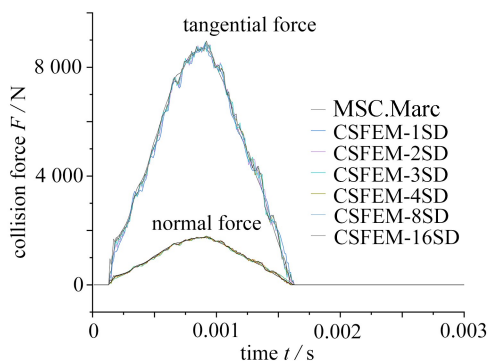
Fig. 6 The von Mises stress contours for 3 conditions

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

图 7(a)为点  $E$  的碰撞力-时间历程曲线.CSFEM 取不同的光滑域与 MSC.Marc 进行对比,可以发现,本文所用算法与 MSC.Marc 结果趋于一致,不过有较小的波动,原因是工业软件会对数据曲线进行平滑的处理.图 7(b)—(d)展示了 3 种摩擦系数下的能量-时间历程曲线.可以看出,无摩擦时,能量是完全守恒的,有摩擦时总能量减少,被摩擦效应耗散.摩擦系数从 0.2 增加至 0.4,总能的损耗几乎相同.事实上,随着摩擦因数的增大,摩擦力也增大,切向上的滑移也减小,所以能量的耗散不仅取决于摩擦力,还取决于接触面上的切向滑移。

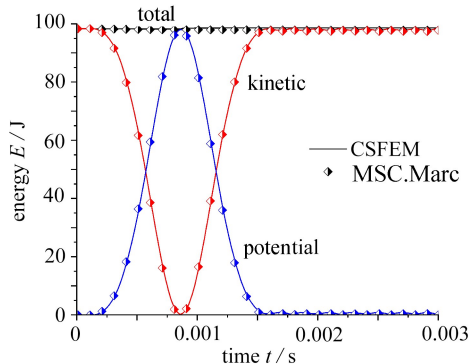
图 8 为超弹性小球上的  $O$  点在摩擦系数  $\mu = 0, 0.2, 0.4$  这 3 种情况下,  $x, y$  方向上的位移和速度随时间的变化曲线.可以看出:水平方向上的位移变化很小;竖直方向上的位移随着摩擦因数的增大,小球下降的高度越来越低,竖直方向上的速度也逐渐减小.水平方向上的速度随着摩擦因数的增大,其波动也更加剧烈,竖直方向上的速度随着摩擦因数的增大而不断减小。

本文程序运行环境为 Visual Studio 2019,编程语言为 C++.表 2 为 CSFEM 划分不同光滑域的情况下与传统有限元和商业软件 MSC.Marc 在同一台计算机上的计算效率对比.能明显看出,CSFEM 方法结合双势理论的计算效率高于传统有限元方法,略低于商业软件,且随着光滑域划分的数量增多,计算时间也越长。



(a) 节点  $E$  的碰撞力

(a) Collision forces of node  $E$



(b)  $\mu = 0$  时能量-时间历程曲线

(b) Energy-time histories for  $\mu = 0$

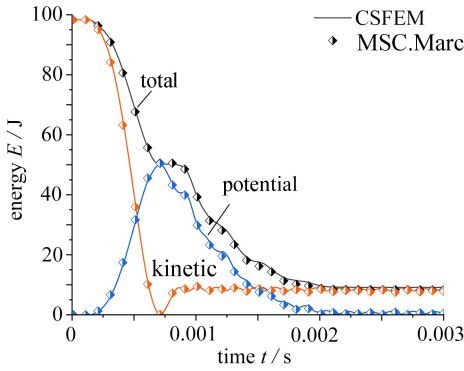
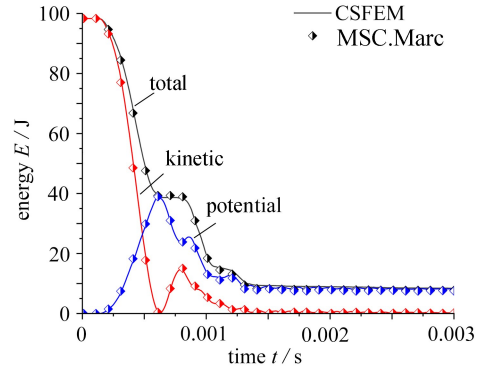
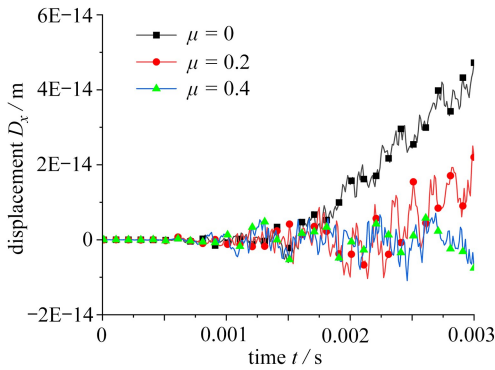
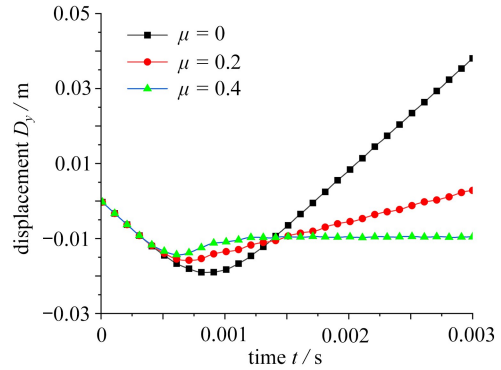
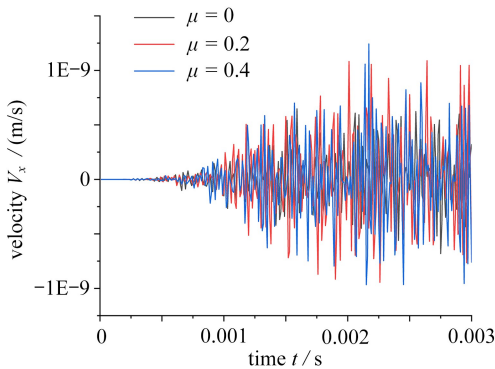
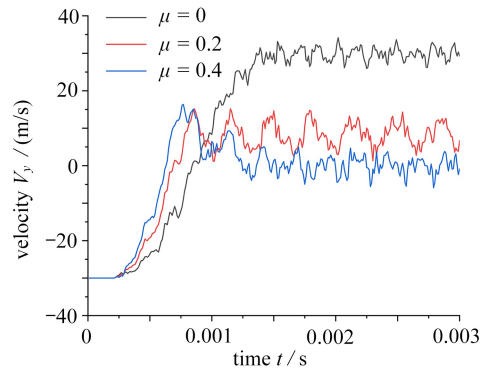
(c)  $\mu = 0.2$  时能量-时间历程曲线(c) Energy-time histories for  $\mu = 0.2$ (d)  $\mu = 0.4$  时能量-时间历程曲线(d) Energy-time histories for  $\mu = 0.4$ 

图7 与 MSC.Marc 的一致性对比

Fig. 7 Conformity comparison with MSC.Marc

(a) 节点  $O$  的  $x$  方向位移(a) The  $x$ -direction displacement of node  $O$ (b) 节点  $O$  的  $y$  方向位移(b) The  $y$ -direction displacement of node  $O$ (c) 节点  $O$  的  $x$  方向速度(c) The  $x$ -direction velocity of node  $O$ (d) 节点  $O$  的  $y$  方向速度(d) The  $y$ -direction velocity of node  $O$ 图8 摩擦因数对点  $O$  位移、速度的影响Fig. 8 Effects of the friction coefficient on displacements and velocities of point  $O$ 

如图9所示,超弹性小球半径  $R = 0.025$  m, 小球密度  $\rho$  为  $700 \text{ kg/m}^3$ , 给它施加一个向下的速度  $V_y = 1$  m/s; 下面的超弹性块长  $L = 0.16$  m, 高度  $h = 0.06$  m, 最下面是刚性板, 用 Blatz-Ko 模型来描述超弹性小球和超弹性块, 其剪切模量  $G = 3 \text{ MPa}$ . 接触带 1, 超弹性小球与超弹性体之间的接触区域; 接触带 2, 超弹性块与刚性板之间的接触区域, 两个接触区域摩擦因数均为 0.2.

表 2 计算效率对比结果

Table 2 Comparison results of calculation efficiency

	time integration method	contact algorithm	total CPU $T_{CPU} / s$
MSC.Marc	Newmark implicit	penalty	9.48
FEM	1st-order implicit	bi-potential	20.1
CSFEM-1SD	1st-order implicit	bi-potential	9.887
CSFEM-2SD	1st-order implicit	bi-potential	11.058
CSFEM-3SD	1st-order implicit	bi-potential	12.415
CSFEM-4SD	1st-order implicit	bi-potential	13.495
CSFEM-8SD	1st-order implicit	bi-potential	17.627
CSFEM-16SD	1st-order implicit	bi-potential	26.314

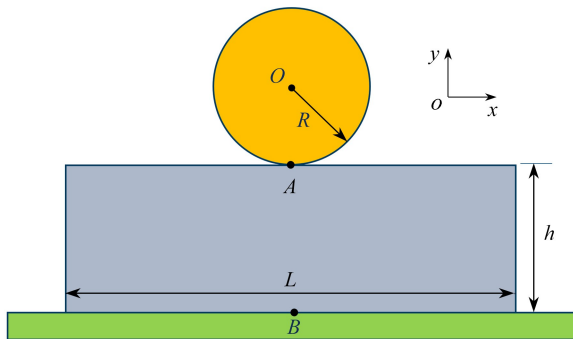


图 9 超弹性体碰撞模型

Fig. 9 The collision model for hyperelastic bodies

图 10 分别展示了  $T = 0.0005\text{ s}$ ,  $0.001\text{ s}$ ,  $0.0015\text{ s}$  和  $0.002\text{ s}$  这四个时刻下的 von Mises 应力云图,可以看到超弹性小球砸向超弹性块,小球和块发生变形并且最后分离的整个过程。

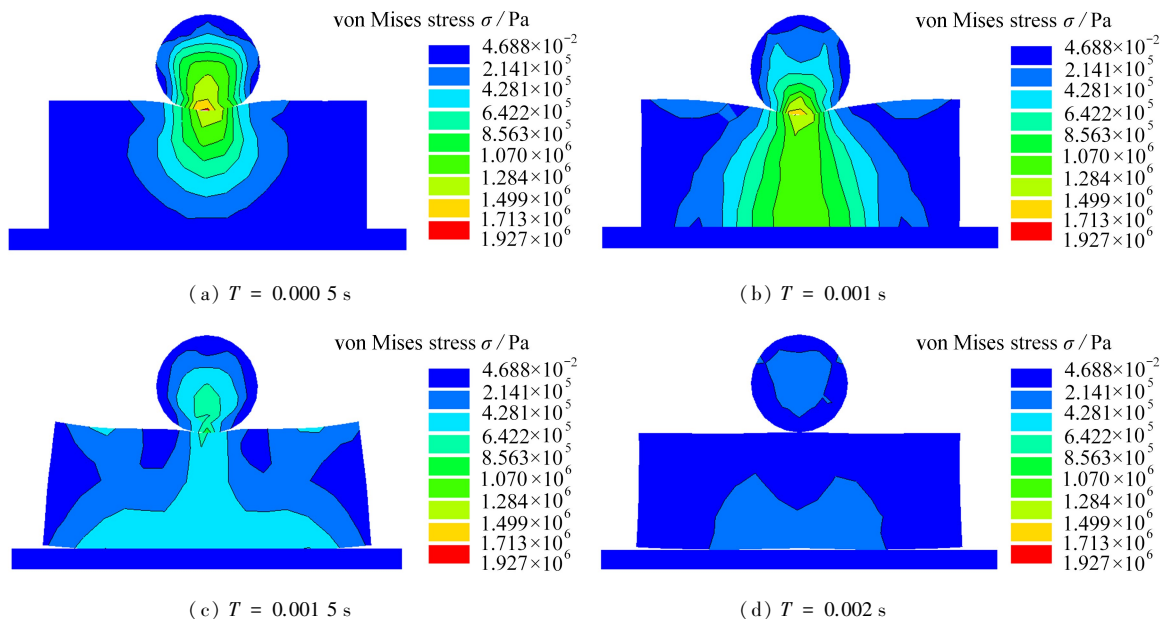


图 10 各个时刻下的 von Mises 应力图

Fig. 10 The von Mises stress diagrams at various moments

从图 11(a)可知在  $0.00095\text{ s}$  时刻,  $x$  方向上的变形位移最大值为  $0.00138\text{ m}$ ,同时还可以观察到,碰撞导致节点 A 左侧的节点往右拉,右侧节点往左拉,因此  $x$  方向上的位移时间历程曲线呈现反对称分布;从图 11(b)可知,  $y$  方向上的变形位移最大值为  $0.0072\text{ m}$ ,可以清楚地观察到点 A 附近的压痕最为明显,  $y$  方向

位移时间历程曲线呈现对称分布。

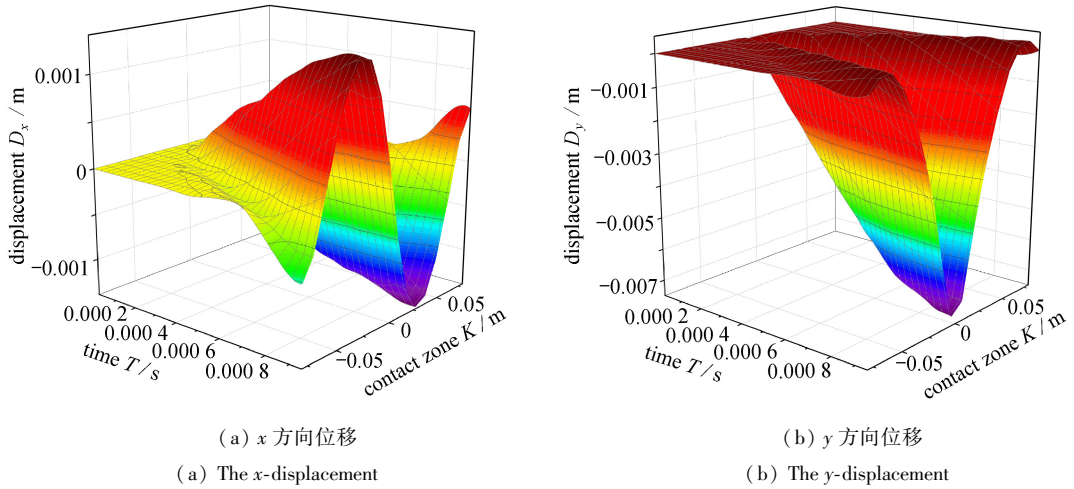


图 11 接触带 1 的节点位移-时间历程图

Fig. 11 Nodal displacement-time histories for contact zone 1

由图 12(a) 可知超弹性块上的点 A 和点 B 的速度时间分布, 小球一开始与超弹性块发生碰撞时, 点 A 与小球最先接触, 之后随着纵波向其底部传递, 最先传递到节点 B, 此时长方体块还未弹起, 开始产生振动现象。图 12(b) 为碰撞过程中的能量-时间历程曲线, 因为只给小球施加了法向上的速度, 在切向上没有发生明显的位移, 所以能量损耗很小, 图示结果与 MSC.Marc 吻合得比较好。

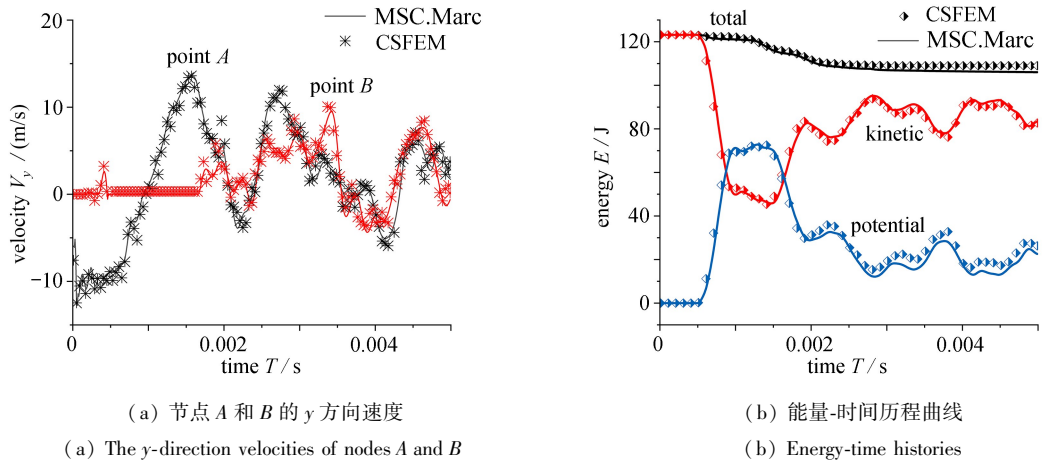


图 12 与 MSC.Marc 的一致性对比

Fig. 12 Conformity comparison with MSC.Marc

如图 13 所示, 基于上一个算例, 系统由一个超弹性小球碰撞增加为两个超弹性小球, 并以相同初速度  $V_y = -20 \text{ m/s}$  与超弹性板发生碰撞。接触带 1, 左边超弹性小球与超弹性板接触的区域; 接触带 2, 右边超弹性小球与超弹性板接触的区域; 接触带 3, 超弹性板与最下层的刚性板接触的区域。

图 14 为接触带 1-2 上的节点位移图, 能明显看出碰撞节点 A 和 B 两端的节点均被拉向两侧, 碰撞点 A 左侧区域向 x 负方向变形, 而碰撞点 B 右侧区域向 x 正方向变形, 因为两个超弹性小球速度相同, 所以碰撞点 A 和 B 处区域的压痕相同, 为  $0.00343 \text{ m}$ 。图 15 为碰撞产生的 von Mises 应力图, 与图 14 的结果相吻合, 碰撞点 A 和 B 的应力最大, 两次碰撞产生的应力相互影响, 在接触带 1 和 2 的中间节点发生波的汇聚, 波的能量相互影响产生一部分的耗散。

如图 16(a)、(b) 所示, 碰撞点 A 和 B 在  $0.00111 \text{ s}$  达到最大变形位移, 对应的值为  $-0.0046 \text{ m}$ , 两超弹性球同时与超弹性板发生碰撞。图 16(c) 为碰撞过程的能量-时间历程曲线, 在相同时间内, 系统出现了两次的动能和势能值相等的现象, 发现在  $0.002 \text{ s}$  之前 CSFEM 所计算出的能量与 MSC.Marc 比较吻合, 在  $0.002 \text{ s}$  之

后,因为两个超弹性小球、超弹性板和刚性板均已分离,不再产生摩擦效应,所以总能量应该是保持不变的, MSC.Marc 计算出的总能量仍有较小的下降,因此本文使用的算法更加精确。

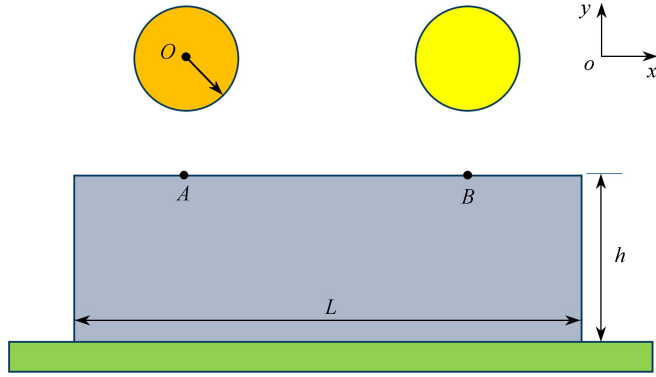
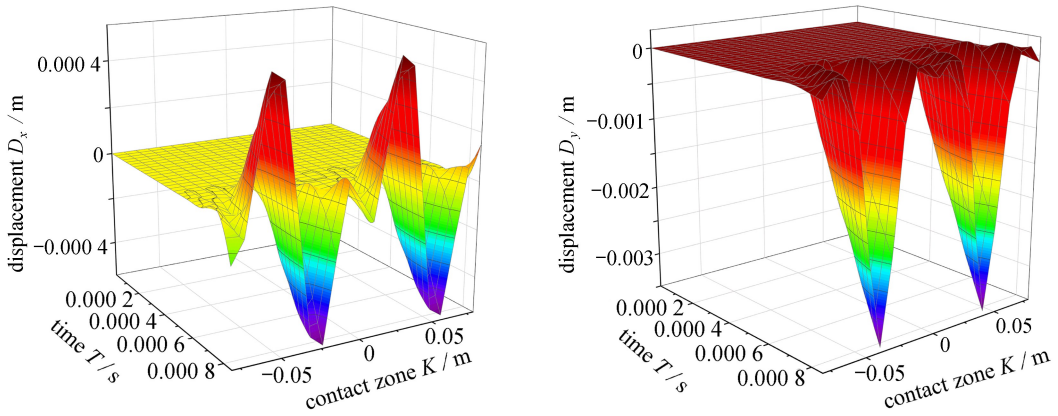


图 13 两个小球碰撞模型图  
Fig. 13 The model for 2 colliding balls



(a) x 方向位移 (a) x-displacement  
(b) y 方向位移 (b) y-displacement

图 14 接触带 1-2 的节点位移-时间历程图 ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -20 \text{ m/s}$ )

Fig. 14 Nodal displacement-time histories of contact zones 1-2 ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -20 \text{ m/s}$ )

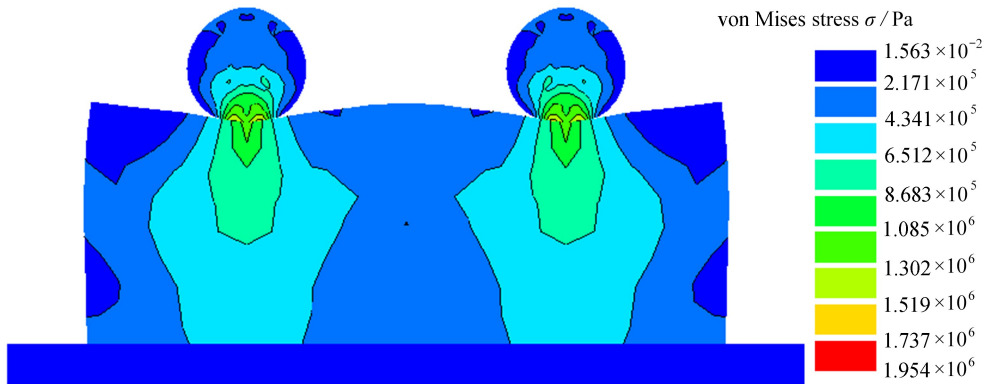


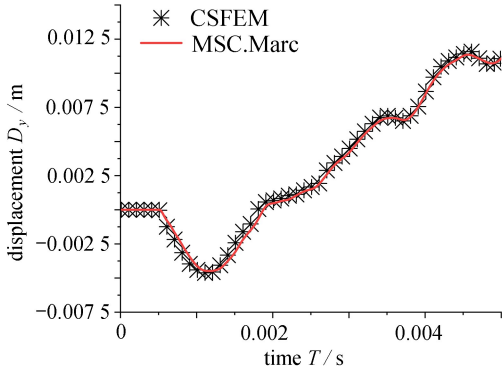
图 15 Von Mises 应力图 ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -20 \text{ m/s}$ )

Fig. 15 The von Mises stress contour ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -20 \text{ m/s}$ )

给左边小球施加  $V_y = -20 \text{ m/s}$  的速度,右边小球施加  $V_y = -10 \text{ m/s}$  的速度,使其产生非对称碰撞。

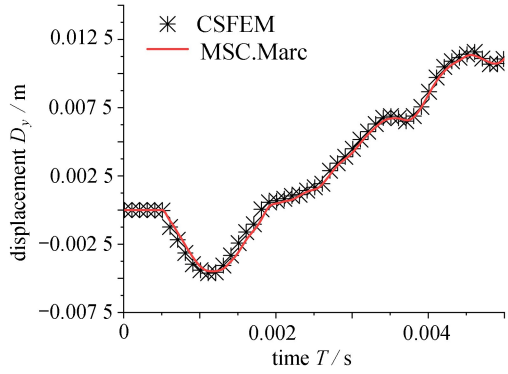
图 17 为接触带 1-2 上的节点位移图,随着时间的增加,接触区域逐渐增大,两处碰撞也相互产生影响,碰撞点 A 左侧区域向 X 正方向发生变形,碰撞点 B 右侧区域也向 X 正方向变形。点 A 处压痕明显更大,

为 0.004 58 m .



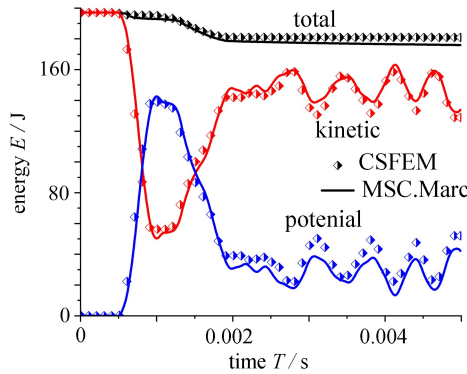
(a) 节点 A 的 y 方向位移

(a) The y-direction displacement of node A



(b) 节点 B 的 y 方向位移

(b) The y-direction displacement of node B

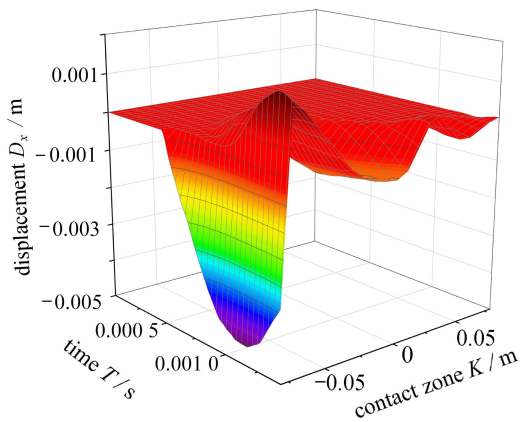


(c) 能量-时间历程曲线

(c) Energy-time histories

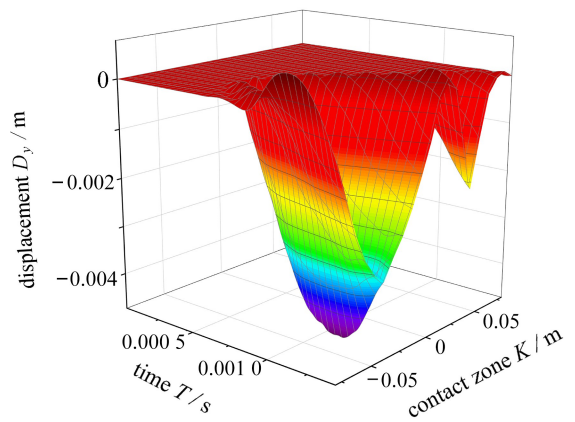
图 16 与 MSC.Marc 的一致性对比 ( $V_{y0,L} = -20$  m/s,  $V_{y0,R} = -20$  m/s)

Fig. 16 Conformity comparison with MSC.Marc ( $V_{y0,L} = -20$  m/s,  $V_{y0,R} = -20$  m/s)



(a) x 方向位移

(a) x-displacement



(b) y 方向位移

(b) y-displacement

图 17 接触带 1-2 的节点位移-时间历程图 ( $V_{y0,L} = -20$  m/s,  $V_{y0,R} = -10$  m/s)

Fig. 17 Nodal displacement-time histories for contact zones 1-2 ( $V_{y0,L} = -20$  m/s,  $V_{y0,R} = -10$  m/s)

图 18 为超弹性体的 von Mises 应力云图,在接触带 1 处最先产生应力,碰撞点 A 和 B 处区域应力较大.两次碰撞产生的应力相互影响,在接触带 1 和 2 的中间节点发生波的汇聚,波的能量相互影响,产生一部分的耗散.接触带 1 产生的波最快到达接触带 3,使得超弹性板左侧开始脱离刚性板,并向两侧扩展;接触带 2

产生的波传递到接触带 3 时,超弹性板右侧也逐渐脱离刚性板.

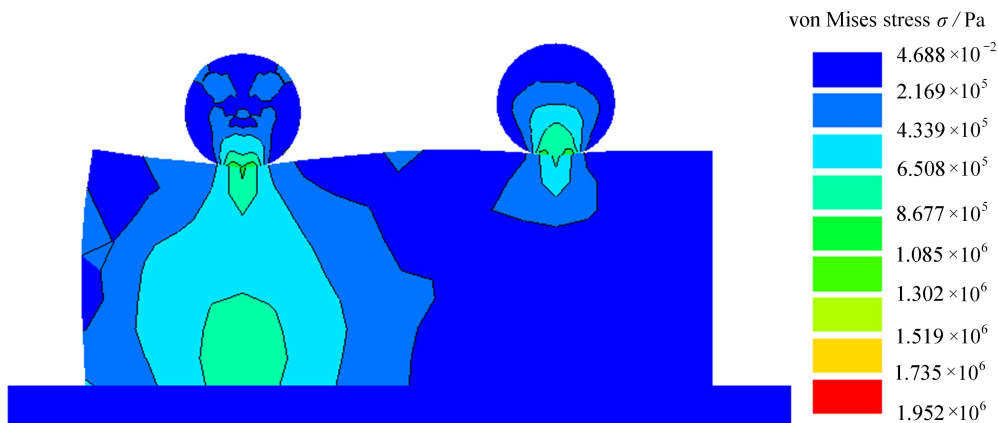
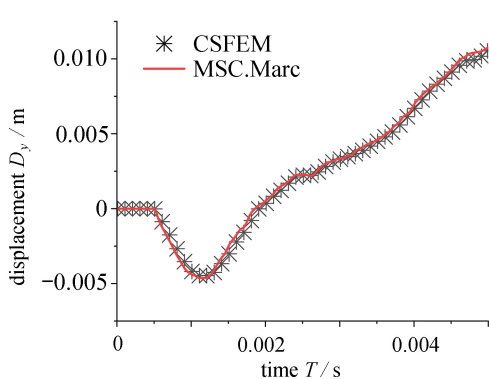


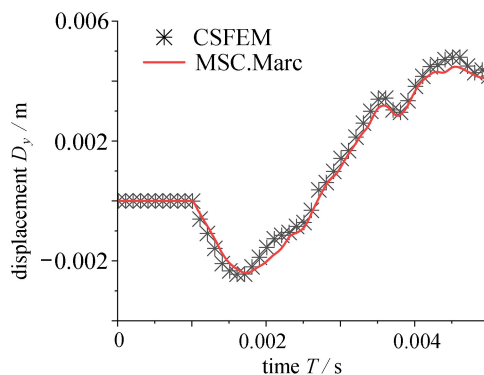
图 18 Von Mises 应力图 ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -10 \text{ m/s}$ )

Fig. 18 The von Mises stress contour ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -10 \text{ m/s}$ )



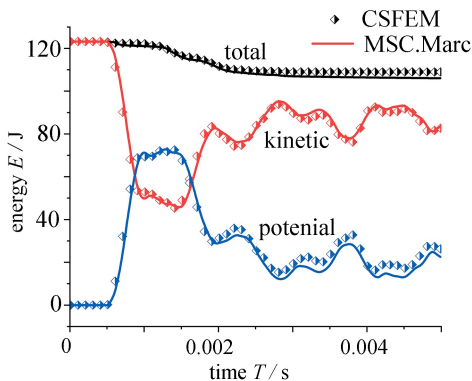
(a) 节点 A 的 y 方向位移

(a) The y-direction displacement of node A



(b) 节点 B 的 y 方向位移

(b) The y-direction displacement of node B



(c) 能量-时间历程曲线

(c) Energy-time histories

图 19 与 MSC.Marc 的一致性对比 ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -10 \text{ m/s}$ )

Fig. 19 Conformity comparison with MSC.Marc ( $V_{y0,L} = -20 \text{ m/s}$ ,  $V_{y0,R} = -10 \text{ m/s}$ )

如图 19(a)所示,明显看出点 A 最先与小球发生碰撞,碰撞点 A 和 B 分别在 0.001 1 s 和 0.001 7 s 时发生最大位移,对应的值为 0.004 6 m 和 0.002 4 m.两次碰撞的速度不同,而且发生碰撞的时刻也不同,在左边超弹性小球与超弹性块接触时,右边小球就与超弹性块发生了碰撞.因此,两次碰撞会相互影响,节点位移曲线也因第二次碰撞的影响而不平滑,图示结果和 MSC.Marc 所得的数值结果吻合良好.

图 19(b)同上一对称碰撞算例一样,后续过程中,两个超弹性小球、超弹性板和刚性板均已分离,不再产生摩擦效应,所以总能量应该保持不变,MSC.Marc 计算出的总能量仍有较小的下降,因此本文使用的算法更加准确。

### 3 结 论

本文发展了一种数值方法来处理超弹性体的接触碰撞和大变形问题,该方法结合了 CSFEM 和计算接触摩擦的双势理论.利用光滑有限元法在求解大变形问题上的优点,结合双势方法计算接触力的优势,从而达到较高的精度要求.最后,根据数值结果分析,得到了以下结论:

- 1) 在分析碰撞体的变形时,本文所用算法数值精度较高,与 MSC.Marc 计算出的结果基本一致,并且满足了能量守恒或耗散定律.
- 2) 碰撞力的大小,能量的耗散,不仅受摩擦因数的影响,也会受到接触界面结构的影响.
- 3) 用橡胶作为缓冲材料,适当增加碰撞面的摩擦因数,能得到较好的抗冲击性能.

### 参考文献 (References):

- [1] YASKEVICH A. Real time math simulation of contact interaction during spacecraft docking and berthing[J]. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2014, **4**: 1-15.
- [2] HUGHES P C. *Spacecraft Attitude Dynamics*[M]. Courier Corporation, 2012.
- [3] SUN Y, ZHAI W M, GUO Y. A robust non-Hertzian contact method for wheel-rail normal contact analysis[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2018, **56**(10/12): 1899-1921.
- [4] BROGLIATO B. *Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control*[M]. Springer, 2016.
- [5] ZHANG J, WANG Q. Modeling and simulation of a frictional translational joint with a flexible slider and clearance[J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, **38**(4): 367-389.
- [6] 聂攀. SMA 弹簧-摩擦支座在网壳结构隔震控制中的参数分析[D]. 北京: 北京建筑大学, 2016. (NIE Pan. Parametric analysis of SMA spring-friction bearings in the seismic control of mesh-shell structures[D]. Beijing: Beijing University of Architecture, 2016. (in Chinese))
- [7] 杨静, 潘文, 苏何先, 等. 天然橡胶支座大变形压剪性能的双非线性超弹性理论和实验研究[J]. 工程力学, 2022, **39**(8): 200-222. (YANG Jing, PAN Wen, SU Hexian, et al. Double nonlinear hyperelastic theory and experimental research on the large deformation of natural rubber bearing in compression and shear[J]. *Engineering Mechanics*, 2022, **39**(8): 200-222. (in Chinese))
- [8] 郑伟, 闫立志, 张泽云, 等. 动车组车钩缓冲装置橡胶缓冲器失效机理分析及优化[J]. 城市轨道交通研究, 2022, **25**(6): 171-175. (ZHENG Wei, YAN Lizhi, ZHANG Zeyun, et al. Failure mechanism analysis and performance optimization of rubber draft gear of coupler buffer in EMU[J]. *Urban Mass Transit*, 2022, **25**(6): 171-175. (in Chinese))
- [9] 罗操群, 孙加亮, 文浩, 等. 多刚体系统分离策略及释放动力学研究[J]. 力学学报, 2020, **52**(2): 503-513. (LUO Caoqun, SUN Jialiang, WEN Hao, et al. Research on separation strategy and deployment dynamics of a space multi-rigid-body system[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, **52**(2): 503-513. (in Chinese))
- [10] BELYTSCHKO T, NEAL M O. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **31**(3): 547-572.
- [11] FRANCAVILLA A, ZIENKIEWICZ O C. A note on numerical computation of elastic contact problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **9**(4): 913-924.
- [12] DE SAXCÉ G, FENG Z Q. New inequality and functional for contact with friction: the implicit standard material approach[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1991, **19**(3): 301-325.
- [13] FENG Z Q, JOLI P, CROS J M, et al. The bi-potential method applied to the modeling of dynamic problems with friction[J]. *Computational Mechanics*, 2005, **36**(5): 375-383.
- [14] 周洋靖, 冯志强, 彭磊. 双势积分算法在非关联材料中的应用[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 11-28.



- (ZHOU Yangjing, FENG Zhiqiang, PENG Lei. Application of the bi-potential integration algorithm to non-associated materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 11-28. (in Chinese))
- [15] PENG L, FENG Z Q, JOLI P, et al. Bi-potential and co-rotational formulations applied for real time simulation involving friction and large deformation[J]. *Computational Mechanics*, 2019, **64**(3): 611-623.
- [16] THOMASJ R H. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*[M]. Prentice-Hall, 1987.
- [17] LI Y D, LI Y, FENG Z Q. A coupled particle model with particle shifting technology for simulating transient viscoelastic fluid flow with free surface[J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, **488**: 112213.
- [18] LIU G R. On G space theory[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2009, **6**(2): 257-289.
- [19] LIU G R. An overview on meshfree methods: for computational solid mechanics[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2016, **13**(5): 1630001.
- [20] LIU G R, TRUNG N T. *Smoothed Finite Element Methods*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [21] LIU G R, DAI K Y, NGUYEN T T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. *Computational Mechanics*, 2007, **39**(6): 859-877.
- [22] LI Y, CHEN Q W, FENG Z Q. A cell-based smoothed finite element method for multi-body contact analysis within the bi-potential formulation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2023, **148**: 256-266.
- [23] CHEN Q W, LI Y, FENG Z Q, et al. Contact analysis within the bi-potential framework using cell-based smoothed finite element method [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2021, **19**(6): 2141004.
- [24] YUE J, LIU G R, LI M, et al. A cell-based smoothed finite element method for multi-body contact analysis using linear complementarity formulation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, **141**: 110-126.
- [25] TAMMA K K, NAMBURU R R. A robust self-starting explicit computational methodology for structural dynamic applications: architecture and representations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **29**(7): 1441-1454.
- [26] MOREAU J J. Quadratic programming in mechanics: dynamics of one-sided constraints[M]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1966, **4**(1): 153-158.
- [27] DE SAXCÉ G, FENG Z Q. The bipotential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, **28**(4/8): 225-245.
- [28] GAO Y, STRANG G. Dual extremum principles in finite deformation elastoplastic analysis[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 1989, **17**: 257-267.
- [29] BLATZ P J, KO W L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials[J]. *Transactions of the Society of Rheology*, 1962, **6**(1): 223-252.