

# 多孔介质中单相气体局部流动的均质化建模\*

李树光, 曲凯

(大连海事大学 理学院, 辽宁 大连 116026)

**摘要:** 该文研究了渐近均质法在单相气体渗流理论中的应用, 开发了气体在孔隙尺度下流动的数学模型和数值方法. 基于渐近均质法, 建立了周期单元上描述周期性多孔结构孔隙尺度下单相气体流动的局部问题. 讨论了局部问题的特殊数学性质和物理意义. 利用一种基于对称性和反对称性扩展的简化方法, 提出了求解局部问题的最小二乘有限元方法, 克服了由于平均算子和周期性边界条件引起的数值困难. 局部问题的求解能够获得单孔内速度和压力的精确分布, 并且在仅知道孔隙几何形状的情况下评估多孔介质的渗透性. 在局部问题的基础上, 通过理论分析获得了微管中 Poiseuille 流动的解析解, 验证了所提出的数学模型和数值算法. 最后, 考虑了一种三维周期性多孔结构, 获得了单孔中气体局部流动的数值结果和多孔介质的渗透系数.

**关键词:** 渐近均质法; 多孔介质; 局部流动; 渗透性; 最小二乘有限元

**中图分类号:** O3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440246

## Homogenization Modeling of Single-Phase Gas Local Flow in Porous Media

LI Shuguang, QU Kai

(School of Science, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, P.R.China)

**Abstract:** The application of asymptotic homogenization method was investigated based on the filtration theory for single-phase gas, and the mathematical model and numerical method for the gas flow at the pore scale were developed. With the asymptotic homogenization method, a local problem of periodic cells was established to describe the local flow process of a single-phase gas at the pore scale of the periodic porous medium. The special mathematical properties and physical significance of the local problem were discussed. With a simplified approach based on symmetric and antisymmetric extensions, a least squares finite element method for the local problem was proposed, to overcome the numerical difficulties due to averaging operators and periodic boundary conditions. The solution of the local problem was obtained with accurate local velocity and pressure distributions in a single pore, and with gas permeability evaluation of porous media only in knowledge of the pore geometry. Beyond the local problem, the analytical solution of the Poiseuille flow in microtubes was obtained through theoretical analysis, to verify the proposed mathematical model and the numerical algorithm. Finally, a 3D periodic porous structure was considered, and numerical results of local flow in a single pore and permeability coefficients in porous media were obtained.

**Key words:** asymptotic homogenization method; porous medium; local flow; permeability; least squares finite element

\* 收稿日期: 2023-08-17; 修订日期: 2023-11-12

基金项目: 辽宁省博士科研启动基金计划(2022-BS-093)

作者简介: 李树光(1990—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: shuguangli2008@126.com).

引用格式: 李树光, 曲凯. 多孔介质中单相气体局部流动的均质化建模[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(2): 175-183.

## 0 引言

多孔介质中的气体流动广泛存在于自然现象和工业技术中,因而对其开展数学建模研究具有重要的科学意义和应用价值<sup>[1]</sup>,如地质层中天然气的输运<sup>[2]</sup>,飞机油箱内多孔阀的油气过滤,飞行器外壳热防护材料的气动烧蚀等.然而,由于测量技术的局限性和多孔介质空间结构的复杂性,使得这种流动的研究非常困难,大多数工作仅能获得多孔介质中气体流动的宏观结果.许多研究是根据 Darcy 定律及其修正,从宏观现象分析孔隙中气体的流动.这种情况下,单孔中所发生的局部效应仅作为整体特征的简单估计(如 Darcy 定律中平均流速和实验中渗透系数的确定),未充分考虑孔隙中流动的真实过程.孔隙中的流动对渗流的整体影响非常重要<sup>[3]</sup>;孔隙的几何特征和局部流动决定了渗流的渗透性.因此,有必要准确描述孔隙中的局部流动.

许多学者应用多种方法研究了多孔介质孔隙中的局部流动,如均质化和体积平均模型<sup>[4]</sup>,孔隙网络(“管束”)模型<sup>[5]</sup>,分数阶模型<sup>[6]</sup>等.每种方法都有其优缺点,对于渗流问题的研究,描述孔隙中发生的实际物理过程以及微宏观过程之间的理论联系至关重要.因此,本文采用了文献[7]中提出的针对周期性复合材料建模的渐近均质法,该方法能够有效模拟多孔介质孔隙中的物理过程.目前,渐近均质法已经被广泛应用于解决多孔材料的热力学问题<sup>[8]</sup>、复合材料有效性能预测<sup>[9-10]</sup>,以及材料渗透性能估计<sup>[11]</sup>等问题.

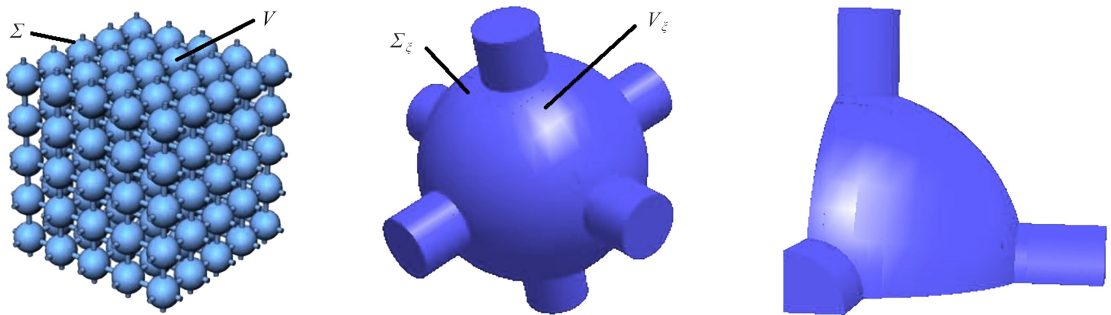
应用渐近均质法获得的描述局部流动的数学模型具有一些特殊性<sup>[12]</sup>,主要是:通常具有积分-微分类型的均匀化限制和周期性边界条件所构成的约束条件.这使得局部问题的理论意义和求解方法有别于经典的数学模型.一些研究数值求解了周期单元上的局部问题,包括罚函数有限元法<sup>[13]</sup>、光滑粒子流体动力学(SPH)方法<sup>[14]</sup>等.但是少有讨论局部问题的特殊性和复杂约束条件的求解方法.

本文的目的是研究周期单元上气体的局部流动问题,提出了一种基于对称性和反对称性扩展的简化方法,开发求解局部问题的最小二乘有限元法,通过微管中 Poiseuille 流动的解析解验证了相关模型和算法.

## 1 多孔介质中气体流动的连续介质力学模型

### 1.1 多孔介质的几何模型

考虑如图 1 所示的正交各向异性多孔介质,建立如下假设:① 多孔介质的微观结构具有周期性特征;② 多孔介质无死孔;③ 周期单元是孔隙中充满气体的纤维和纤维材料所组成的区域;④ 周期单元关于局部直角坐标系中的坐标平面具有几何和物理的对称性,这使得能够将计算区域简化为 1/8 周期单元.



(a) 多孔介质的微观结构

(b) 多孔介质的周期单元

(c) 多孔介质的 1/8 周期单元

(a) The microstructure of the porous medium

(b) Periodic cell of the porous medium

(c) 1/8 periodic cell of the porous medium

图 1 多孔介质的几何模型(显示为气体所占的孔隙)

Fig. 1 Geometric modeling of the porous medium (showing the porosity occupied by gas)

图 1 中,  $V$  表示整个孔隙所占的区域,其边界(固-气边界)用  $\Sigma$  表示,  $V_\xi$  表示周期单元,  $\Sigma_\xi$  表示孔隙中气体与固体的边界.

### 1.2 气体流动的力学方程组

多孔介质中气体的流动由可压缩 Navier-Stokes 方程组描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\rho$  是密度,  $\mathbf{v}$  是速度,  $\mathbf{T}$  是 Cauchy 应力张量,  $\otimes$  表示张量积。

对气体介质设置如下假设: ① 孔隙中的气体介质为理想气体; ② 气体是各向同性的 Newton 黏性介质, 黏性系数非常小且不为零; ③ 气体的质量力密度为零; ④ 气体的运动是等温等压的; ⑤ 气体的体积黏度系数<sup>[12]</sup>为零, 即  $\lambda + 2\mu/3 = 0$ , 其中  $\lambda$  和  $\mu$  是黏度系数。

根据各向同性线黏性介质的本构关系, Cauchy 应力张量可写为

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

其中,  $p$  是压力,  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$  是黏性应力张量,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T)/2$  是应变率张量。

考虑理想气体的状态方程:

$$p = \rho R \theta_0, \quad (3)$$

其中,  $R$  是气体常数;  $\theta_0$  是恒定温度。

在固气界面, 设置无滑移边界条件:

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

初始时刻  $t = t_0$  的给定压力为

$$p|_{t=t_0} = p_0. \quad (5)$$

## 2 多孔介质中气体流动的局部建模

### 2.1 局部建模中渐近均质法的尺度放大

定义  $L$  为整个多孔介质的特征长度,  $l$  为周期单元的特征长度,  $\kappa = l/L \ll 1$  为不同尺度之间特征长度的比例小参数, 并通过小参数将宏观坐标系  $\mathbf{x}$  和局部坐标系  $\boldsymbol{\xi}$  联系起来。描述孔隙中流动的所有函数  $f$  是准周期性的(即取决于  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\xi}$ ), 包括速度  $\mathbf{v}$ 、压力  $p$  和密度  $\rho$ 。函数的两尺度微分可通过以下规则:  $\nabla f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{1}{\kappa} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f$ , 其中  $\nabla_{\mathbf{x}}$  和  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$  分别是全局坐标和局部坐标的微分算子。此外, 引入函数  $f$  在域  $V_{\boldsymbol{\xi}}$  的平均算子  $\langle f \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} f dV$ , 其中  $\varphi_p = \int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} dV$  为介质的孔隙度。

根据多孔介质的周期性假设, 速度  $\mathbf{v}$ 、压力  $p$  和密度  $\rho$  由小参数  $\kappa$  的渐近展开式表示:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa^2 \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \dots, \\ p = p^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa p^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa^2 p^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \dots, \\ \rho = \rho^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa \rho^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa^2 \rho^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \dots. \end{cases} \quad (6)$$

根据气体黏性的假设, 可以得到  $\mu = \mu^0 \kappa^2$ 。

将式(6)和黏性假设代入系统(1)–(5)并以小参数  $\kappa$  的幂次进行分组后, 得到周期单元上的局部问题如下:

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} - \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p^{(1)} + \mu^0 \Delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}, \\ p^{(1)} = R \theta_0 \rho^{(1)}, \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \llbracket \mathbf{v}^{(0)} \rrbracket = 0, \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \\ \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\boldsymbol{\xi}}', \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{v}^{(0)}$ ,  $p^{(1)}$  和  $\rho^{(1)}$  是未知函数。符号  $\llbracket \cdot \rrbracket$  表示周期性边界条件, 周期单元为  $-1/2 \leq \xi_i \leq 1/2$ 。局部问题中的压力梯度  $\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)}$  仅取决于全局坐标  $\mathbf{x}$ , 看作局部问题的“输入数据”。

进一步考虑三维多孔结构, 气体沿着局部坐标轴运动时, 由于局部问题(7)的线性性质, 其解可表示为

“输入数据”  $\nabla_x p^{(0)}$  的线性函数:

$$p^{(1)} = - \sum_{\alpha=1}^3 P^{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) p_{,\alpha}^{(0)}, \quad v_i^{(0)} = - \frac{1}{\mu_0} \sum_{\alpha=1}^3 V_i^{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) p_{,\alpha}^{(0)}, \quad (8)$$

其中,  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ ,  $f_{,i} = \partial f / \partial \xi_i$ , 函数  $P^{(\alpha)}$  和  $V_i^{(\alpha)}$  依赖于  $\boldsymbol{\xi}$ .

将表达式(8)代入局部问题(7), 消掉  $p_{,i}^{(0)}$  后, 得到一组需要确定函数  $P^{(\alpha)}$  和  $V_i^{(\alpha)}$  的局部问题, 这些问题不包含描述气体物理性质的常量, 也不依赖于“输入数据”:

$$\begin{cases} V_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ P_{/i}^{(\alpha)} - V_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \\ \langle P^{(\alpha)} \rangle = 0, \quad \llbracket V_i^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket P^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \\ V_i^{(\alpha)}|_{\Sigma_{\boldsymbol{\xi}}} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3. \quad (9)$$

当多孔结构退化为在一个坐标方向上没有其他流动通道的情况下, 引入函数  $h_i^{(\alpha)}$ :

$$h_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & i \neq \alpha \text{ or } i = \alpha, P_{,\alpha}^{(0)} = 0, \\ 1, & i = \alpha, P_{,\alpha}^{(0)} \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

## 2.2 局部问题的物理意义

通过分析系统(9)可得结论: 在局部层面上, 当系统(9)固定一个  $\alpha$  的值, 也就确定一个伪不可压缩线性流体的稳态流动问题, 并且系统(9)的解仅由孔的几何形状决定. 因此, 系统(9)适用于在上述假设框架下计算多孔介质中气体的流动.

问题(9)有一些特定的属性. 首先, 式(6)中的函数  $p^{(1)}$  表示压力  $p$  相对于  $p^{(0)}$  平均值的压力脉冲, 即:  $\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + O(\kappa^2)$  和  $\bar{p} = \langle p^{(1)} \rangle$ . 由于  $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ , 所以函数  $p^{(1)}$  可以是正的, 也可以是负的. 其次, 条件  $\langle p^{(1)} \rangle = 0$  的存在使得问题(9)具有积分形式的约束条件, 再结合周期性边界条件, 从根本上区别于经典的 Stokes 问题. 此外, 问题(9)是多孔介质中气体运动模型在均质化理论下得到的局部模型, 注意到问题(9)中气体介质的可压缩性在局部流动描述中已不再体现.

## 2.3 局部问题在 1/8 周期单元上的简化

进一步, 考虑将局部问题简化为 1/8 周期单元上的问题, 从而进行数值求解. 因此, 根据解的对称和反对称原理得到以下关于解的延续性定理<sup>[11-12]</sup>.

**定理 1** 设周期单元  $V_{\boldsymbol{\xi}}$  的三维结构具有相对于坐标面  $\xi_1 O \xi_2, \xi_1 O \xi_3, \xi_2 O \xi_3$  的镜像对称性, 因此, 问题(9)的解  $P^{(\alpha)}$  和  $V_i^{(\alpha)}$  是通过定义于 1/8 周期单元(第一象限  $\{\xi_i: 0 \leq \xi_i \leq 1/2\}$ ) 函数  $\tilde{P}^{(\alpha)}$  和  $\tilde{V}_i^{(\alpha)}$  进行对称或反对称扩展得到的, 函数  $\tilde{P}^{(\alpha)}$  和  $\tilde{V}_i^{(\alpha)}$  是以下问题的解:

$$\begin{cases} \tilde{V}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{/i}^{(\alpha)} - \tilde{V}_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3. \\ \tilde{V}_i^{(\alpha)}|_{\Sigma_{\boldsymbol{\xi}}} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

当  $\alpha = 1$ , 函数  $\tilde{P}^{(\alpha)}$  和  $\tilde{V}_i^{(\alpha)}$  以对称或反对称扩展到整个周期单元上时, 其符号变化如图 2 所示. 当  $\alpha = 2, 3$  时, 可采用类似的置换方式进行. 图 2 中的符号“+”表示从第一象限扩展到其他象限时函数不更改符号(即对称扩展), 符号“-”表示符号更改(即反对称扩展).

利用系统(11)的解进行对称和反对称扩展, 在 1/8 周期单元的边界平面上设置如下边界条件:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \xi_1 = 1/2: \quad \tilde{V}_{1/1}^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_2^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_3^{(1)} = 0, \quad \tilde{P}^{(1)} = 0, \\ \xi_2 = 0, \xi_2 = 1/2: \quad \tilde{V}_{1/2}^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_2^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_{3/2}^{(1)} = 0, \quad \tilde{P}^{(1)} = 0, \\ \xi_3 = 0, \xi_3 = 1/2: \quad \tilde{V}_{1/3}^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_{2/3}^{(1)} = 0, \quad \tilde{V}_3^{(1)} = 0, \quad \tilde{P}^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

## 2.4 渗透性的确定

求解局部问题(9)事实上就是仅仅根据孔的几何形状来计算多孔介质的渗流特性. 可将式(8)改写为

$$v_i^{(0)} = - \frac{1}{\mu_0} V_i^{(j)} p_{,j}^{(0)}, \text{ 并作用平均算子, 得到渗流问题的 Darcy 定律:}$$

$$\langle v_i^{(0)} \rangle = -\frac{K_i^j}{\mu^0} p_j^{(0)}, \quad (13)$$

其中,  $K_i^j = \mu^0 \langle V_i^{(j)} \rangle$  是多孔介质渗透张量的分量。

事实上,将平均算子作用于局部问题(9),根据  $\langle p^{(1)} \rangle = 0$  的条件,得到关系:  $\langle V_{ij}^{(\alpha)} \rangle = h_i^{(\alpha)}$ 。这表明平均流速仅与  $\mu^0$  有关,且  $\langle V_i^{(\alpha)} \rangle$  是对角阵。进一步分析:因为  $\alpha \neq \beta$  的函数  $V_\beta^{(\alpha)}$  是反对称的(如图 2),所以二阶张量  $\mathbf{K} = (K_i^j)$  是对角线的。若  $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$ ,则多孔介质是各向同性的,否则是各向异性的。需要注意的是,由于速度分量  $V_i^{(j)}$  与多孔介质中气体的物理性质无关,因此,无量纲渗透系数  $K_i^j$  仅由单孔的几何形状确定。

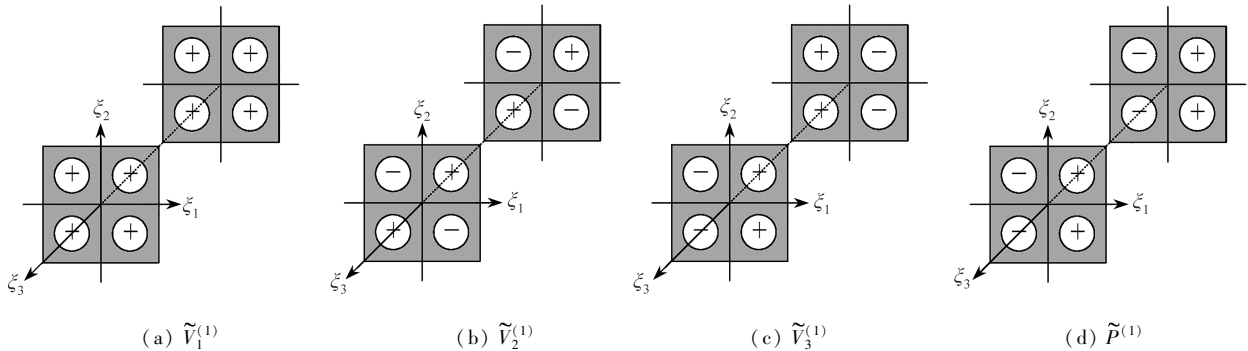


图 2 对称或反对称扩展中局部问题  $L^{(1)}$  的解的符号变化

Fig. 2 Symbolic changes of solutions to local problem  $L^{(1)}$  in symmetric or antisymmetric extensions

### 3 局部问题的最小二乘有限元数值解法

本节开发求解局部问题的数值方法。 $H^m(\Omega)$  表示在  $\Omega$  中  $m \geq 0$  阶的标准 Sobolev (或 Hilbert) 空间,  $(\cdot, \cdot)_{m,h}$  表示 Sobolev 空间中的相应内积,  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  表示相应范数。空间  $L^2(\Omega)$  由平方可积的函数组成,空间  $H_0^1(\Omega)$  由  $H^1(\Omega)$  空间中边界上值为零的函数组成<sup>[15]</sup>。通过取控制方程(11)中残差的  $L^2$  范数平方和来构建与速度-压力-应力相关的标准  $L^2$  范数最小二乘函数的一阶系统<sup>[16]</sup>:

$$J(V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)}; h_i^{(\alpha)}) = \frac{1}{2} (\|R_1\|_{\Omega,0}^2 + \|R_2\|_{\Omega,0}^2 + \|R_3\|_{\Omega,0}^2),$$

其中,  $R_1 = V_{/i}^{(\alpha)}$ ,  $R_2 = P_{/i}^{(\alpha)} - V_{ij}^{(\alpha)} - h_i^{(\alpha)}$ ,  $R_3 = \tau_{ij}^{(\alpha)} - (V_{ij}^{(\alpha)} + V_{ji}^{(\alpha)})$ 。

选择并替换适当有限元近似值作为场变量  $(V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)})$  之后,获得残差  $(R_1, R_2, R_3)$ 。最小化问题的解  $\delta J = 0$ , 就是计算的解  $\mathbf{U} = (V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)}) \in \Psi$ 。因此,对所有的  $\delta \mathbf{U} = (\delta V_i^{(\alpha)}, \delta P^{(\alpha)}, \delta \tau_{ij}^{(\alpha)}) \in \Psi$  均有下式:

$$B((V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)}), (\delta V_i^{(\alpha)}, \delta P^{(\alpha)}, \delta \tau_{ij}^{(\alpha)})) = \Xi(\delta V_i^{(\alpha)}, \delta P^{(\alpha)}, \delta \tau_{ij}^{(\alpha)}), \quad \forall (\delta V_i^{(\alpha)}, \delta P^{(\alpha)}, \delta \tau_{ij}^{(\alpha)}) \in \Psi, \quad (14)$$

其中,  $\Psi = \{(V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)}) \in [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)] \times [H^1(\Omega)]^3\}$ ,  $(\delta V_i^{(\alpha)}, \delta P^{(\alpha)}, \delta \tau_{ij}^{(\alpha)})$  表示变量集  $(V_i^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)})$  的相应变分,  $\Psi$  是相应的函数空间。由此产生的双线性形式  $B(\cdot, \cdot)$  和线性形式  $\Xi(\cdot, \cdot)$  可写为

$$B(\mathbf{U}, \delta \mathbf{U}) = \int_{\Omega} \{ (\delta V_{/i}^{(\alpha)}) (V_{/i}^{(\alpha)}) + (\delta P_{/i}^{(\alpha)} - \delta \tau_{ij}^{(\alpha)}) (P_{/i}^{(\alpha)} - \tau_{ij}^{(\alpha)}) + [\delta \tau_{ij}^{(\alpha)} - (\delta V_{ij}^{(\alpha)} + \delta V_{ji}^{(\alpha)})] [\tau_{ij}^{(\alpha)} - (V_{ij}^{(\alpha)} + V_{ji}^{(\alpha)})] \} d\Omega, \quad (15)$$

$$\Xi(\mathbf{U}, \delta \mathbf{U}) = \int_{\Omega} (\delta P_{/i}^{(\alpha)} - \delta \tau_{ij}^{(\alpha)}) (h_i^{(\alpha)}) d\Omega. \quad (16)$$

接下来,考虑有限元公式(14)–(16)的近似函数。由于最小二乘公式(14)中近似函数的最小要求是线性的,因此可采用  $C^0$  基函数<sup>[17]</sup>。尽管在所用的近似空间之间没有兼容性限制(即 inf-sup 条件),在本文中仍然使用满足 inf-sup 条件的近似函数。



## 4 数值结果

本节中,首先验证了所提出的模型和算法的可靠性和准确性,然后模拟了在图 1 所示结构中的流动。

### 4.1 微管中 Poiseuille 流动的数学模型和数值模拟

为验证模型和算法,考虑单通道结构中  $\alpha = 1$  时模型(9)的解析解.微管的 1/8 周期单元如图 3 所示.

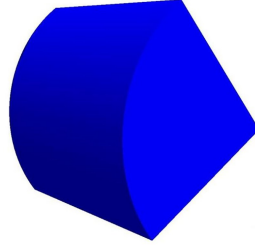


图 3 圆柱形单通道结构的 1/8 周期单元

Fig. 3 The 1/8 periodic cell of the cylindrical single channel structure

假设在毛细管中不可压缩线性黏性流体沿着  $\xi_1$  轴缓慢流动,则速度的矢量形式为  $\mathbf{V}^{(1)} = (V_1^{(1)}, 0, 0)$ , 这种流动对应于经典 Poiseuille 问题<sup>[18]</sup>.这种情况下,模型(9)可以写成

$$\begin{cases} V_{1/1}^{(1)} = 0, \\ P_{/1}^{(1)} - V_{1/jj}^{(1)} = 1, \\ P_{/2}^{(1)} = 0, P_{/3}^{(1)} = 0, \\ \langle P^{(1)} \rangle = 0, \llbracket V_1^{(1)} \rrbracket = 0, \llbracket P^{(1)} \rrbracket = 0, V_1^{(1)}|_{\Sigma_{\xi}} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

由式(17)的第 1 个方程可得  $W_1^{(1)} = W_1^{(1)}(\xi_2, \xi_3)$ ; 由第 3 个方程可得  $P^{(1)} = P^{(1)}(\xi_1)$ ; 由第 2 个方程可得  $P^{(1)}$  是一个线性函数.又因为  $P_{/1}^{(1)}$  不依赖于  $\xi_1$ , 由于周期性条件  $\llbracket P^{(1)} \rrbracket = 0$ , 可得  $P^{(1)} = C = \text{const}$ . 根据平均化条件  $\langle P^{(1)} \rangle = 0$ , 可确定  $P^{(1)} = 0$ . 然后系统(17)可简化为

$$\begin{cases} V_{1/1}^{(1)} = 0, \\ -V_{1/jj}^{(1)} = 1, \\ \llbracket V_1^{(1)} \rrbracket = 0, V_1^{(1)}|_{\Sigma_{\xi}} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

圆柱形单通道结构的 1/8 周期单元中,系统(18)在柱坐标系下可表述为

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\tilde{V}_1^{(1)} r) = 0, -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{V}_1^{(1)}}{dr} \right) = 1, \\ \tilde{V}_1^{(1)}(R) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $R$  是圆柱形单通道的半径.根据式(19)可得 Cauchy 问题:

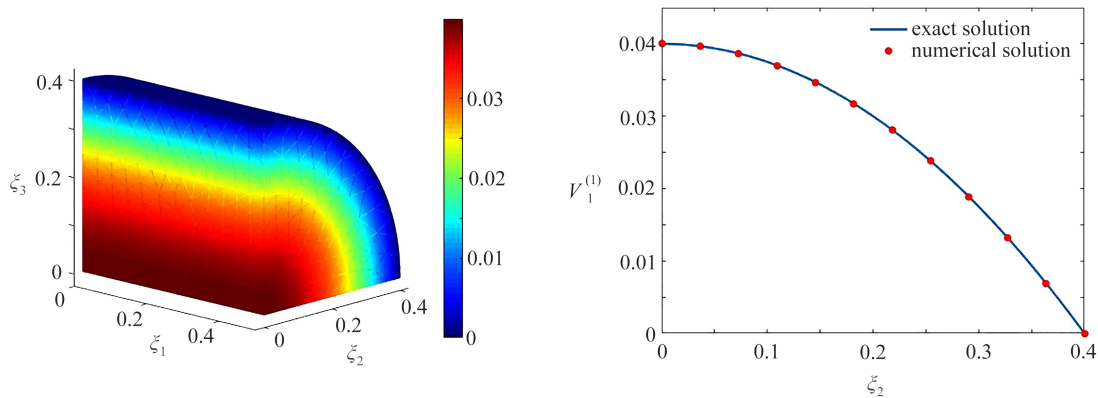
$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}_1^{(1)}}{dr} = r, \\ \tilde{V}_1^{(1)}(R) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

通过求解式(20),得到了速度的解析表达式:  $\tilde{V}_1^{(1)}(r) = (R^2 - r^2)/4$ .

在试验中,微管的半径为 0.4.因此,孔隙度的精确结果为 0.502 654 82.计算微管中 Poiseuille 流动采用的是 2 674 个单元、4 698 个节点的四面体网格.图 4 中给出了计算结果,孔隙度的数值结果为 0.502 654 65.由此,数值结果验证了模型和数值算法的可靠性和准确性.

### 4.2 正交各向异性多孔介质中局部流动的数值结果

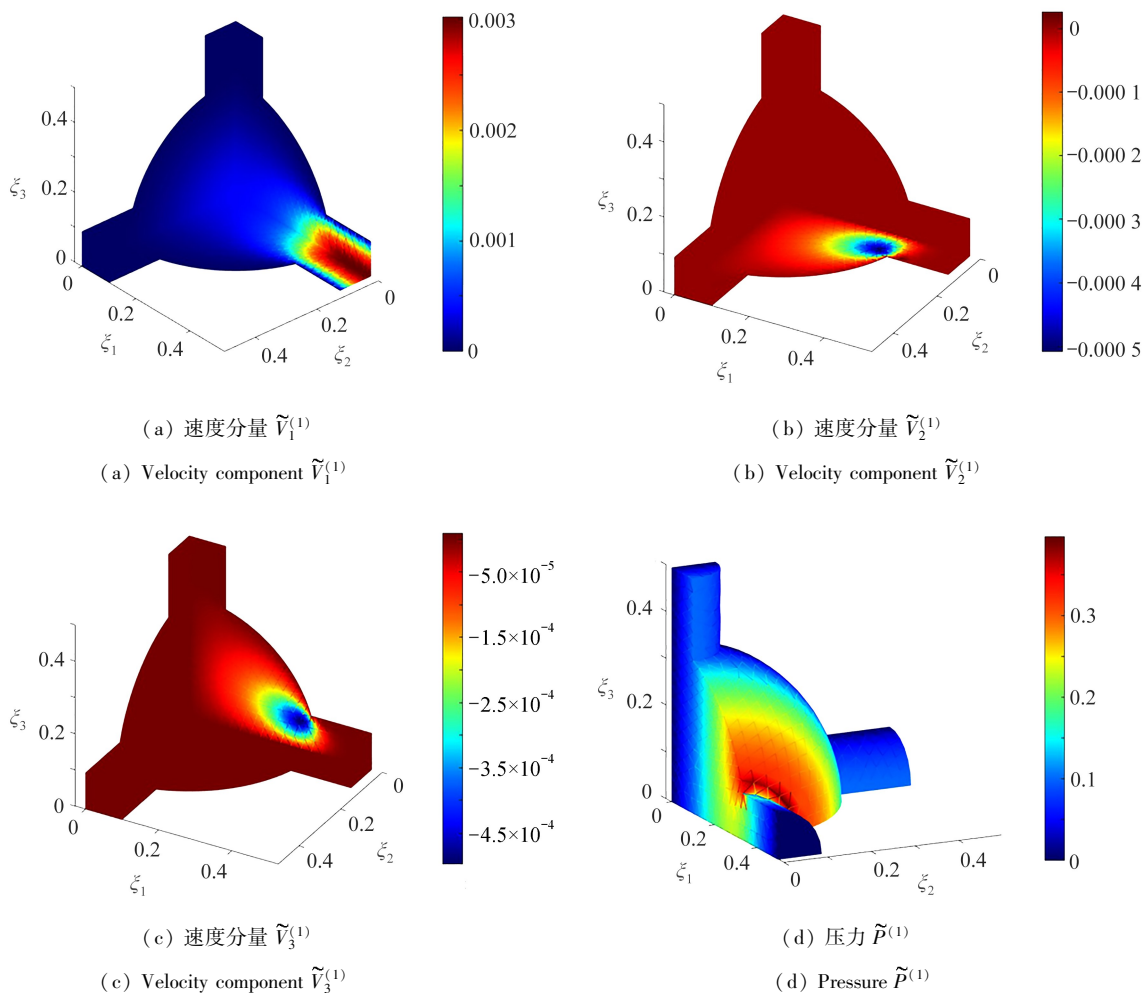
考虑图 1 所示的几何模型,孔隙中球体的无量纲半径为 0.35,圆柱(连接通道)的无量纲半径为 0.1.模型采用的参数为:压力量纲  $p_0 = 10^6$  Pa,速度量纲  $v_0 = 1$  m/s,多孔介质的量纲长度  $L = 1$  m,周期单元的量纲长度  $l = 10^{-4}$  m,气体(氮气)的黏度  $\mu = 0.018\ 448$  Pa·s.



(a) Poiseuille 流动的数值解  
(a) The numerical solution of the Poiseuille flow  
(b) 与精确解的比较  
(b) Comparison of numerical and exact solutions

图 4 单通道结构中 Poiseuille 流动的数值解及其与精确解比较

Fig. 4 The numerical solution of the Poiseuille flow in single channel structure, in comparison with the exact solution



(a) 速度分量  $\tilde{V}_1^{(1)}$   
(a) Velocity component  $\tilde{V}_1^{(1)}$   
(b) 速度分量  $\tilde{V}_2^{(1)}$   
(b) Velocity component  $\tilde{V}_2^{(1)}$   
(c) 速度分量  $\tilde{V}_3^{(1)}$   
(c) Velocity component  $\tilde{V}_3^{(1)}$   
(d) 压力  $\tilde{P}^{(1)}$   
(d) Pressure  $\tilde{P}^{(1)}$

图 5 局部问题  $L^{(1)}$  的数值结果

Fig. 5 Numerical results of local problem  $L^{(1)}$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

经过网格验证,采用 3 342 个单元、6 269 个网格节点的四面体有限元网格.图 5 给出了局部问题  $L^{(1)}$  的数值结果,即局部流动的速度分量  $\tilde{V}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{V}_2^{(1)}$ ,  $\tilde{V}_3^{(1)}$  和压力  $\tilde{P}^{(1)}$  在  $1/8$  周期单元上的准确分布.从图 5 可以看

出,气体流动速度分量  $\tilde{V}_1^{(1)}$  的最大值在  $1/8$  周期单元的  $\xi_1$  轴上,压力  $\tilde{P}^{(1)}$  的最大值在纤维通道的收缩区域。

表 1 给出了渗透性和孔隙率的数值结果,表明了本文所提出的均质化数学模型对确定多孔介质渗透性和孔隙率等物理参数的有效性。

表 1 多孔介质孔隙率和渗透系数的计算结果

Table 1 Calculation results of the porosity and the permeability coefficient of porous media

	local problem $L^{(1)}$	local problem $L^{(2)}$	local problem $L^{(3)}$
permeability	0.000 232 222 744 711	0.000 231 967 234 967	0.000 232 933 436 047
porosity	0.204 745 216 893 771	0.204 745 216 893 771	0.204 745 216 893 771

## 5 结 论

本文应用渐近均质法建立了描述三维周期性多孔结构孔隙尺度下单相气体局部流动的数学模型,获得了周期单元上的局部问题,明确了局部问题的数学特殊性和物理意义,提出了一种基于对称性和反对称性扩展的简化方法.通过对局部问题的分析,能够准确地获得多孔介质的渗透率。

本文在分析局部问题的基础上,提出了求解局部问题的最小二乘有限元方法,克服了由平均算子和周期性边界条件引起的数值困难.最后,通过理论分析获得了微管中 Poiseuille 流动的解析解,并验证了所提出的数学模型和数值算法的可靠性和准确性.研究结果表明,应用渐近均质法能够解决多孔介质中的单相气体流动问题,获得多孔介质的气体渗透性。

## 参考文献 (References):

- [1] BEAR J. *Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media* [M]. Springer, 2018.
- [2] 姜海龙, 朱培旺, 徐东华. 考虑气体加速效应的高压气井产能方程推导及其应用[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 134-142. (JIANG Hailong, ZHU Peiwang, XU Donghua. Derivation and application of productivity equations for high-pressure gas reservoirs with gas acceleration effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 134-142. (in Chinese))
- [3] 孔祥言. 高等渗流力学[M]. 3版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2020. (KONG Xiangyan. *Advanced Mechanics of Fluids in Porous Media* [M]. 3rd ed. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2020. (in Chinese))
- [4] AURIAULT J L, BOUTIN C, GEINDREAU C. *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media* [M]. John Wiley, 2009.
- [5] BLUNT M J, JACKSON M D, PIRI M. Detailed physics, predictive capabilities and macroscopic consequences for pore-network models of multiphase flow[J]. *Advances in Water Resources*, 2002, **25**(8/12): 1069-1089.
- [6] 朱帅润, 李绍红, 钟彩尹, 等. 时间分数阶的非饱和渗流数值分析及其应用[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(9): 966-975. (ZHU Shuirun, LI Shaohong, ZHONG Caiyin, et al. Numerical analysis of time fractional-order unsaturated flow and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(9): 966-975. (in Chinese))
- [7] BAKHVALOV N S, PANASENKO G. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials* [M]. Springer, 2012.
- [8] DIMITRIENKO Y I. *Thermomechanics of Composites Under High Temperatures* [M]. Springer, 2016.
- [9] CAI Y, XU L, CHENG G D. Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(1): 284-292.
- [10] 李鸿鹏, 凌松, 戚振彪, 等. 热力耦合问题数学均匀化方法的计算精度[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(1): 54-69. (LI Hongpeng, LING Song, QI Zhenbiao, et al. Accuracy of the mathematical homogenization method for thermomechanical problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(1): 54-69. (in Chinese))



- [11] LI S G, DIMITRIENKO Y I. Mathematical modeling for the local flow of a generalized Newtonian fluid in 3D porous media[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, **105**: 551-565.
- [12] DIMITRIENKO Y I, DIMITRIENKO I D. Simulation of local transfer in periodic porous media[J]. *European Journal of Mechanics B: Fluids*, 2013, **37**: 174-179.
- [13] WANG J G, LEUNG C F, CHOU Y K. Numerical solutions for flow in porous media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, **27**(7): 565-583
- [14] XU W, FISH J. A multiscale modeling of permeability in a multi-porosity porous medium using smoothed particle hydrodynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, **111**(8): 776-800.
- [15] CAI Z, LEE B, WANG P. Least-squares methods for incompressible Newtonian fluid flow: linear stationary problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2004, **42**(2): 843-859.
- [16] LI S G, DIMITRIENKO Y I. Least squares finite element simulation of local transfer for a generalized Newtonian fluid in 2D periodic porous media[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2023, **316**: 105032.
- [17] PAYETTE G S, REDDY J N. On the roles of minimization and linearization in least squares finite element models of nonlinear boundary-value problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(9): 3589-3613.
- [18] 吴望一. 流体力学[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2021.(WU Wangyi. *Fluid Mechanics*[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2021.(in Chinese))