

移动机械臂的层级聚合建模方法研究*

董方方^{1,2}, 杨超¹, 韩江^{1,2}, 张新荣³

- (1. 合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009;
2. 安徽省智能数控技术及装备工程实验室, 合肥 230009;
3. 长安大学 陕西省高速公路施工机械重点实验室, 西安 710064)

摘要: 移动机械臂因机械臂在动态作业过程中的耦合效应会影响移动平台的运动特性,增加了整个系统的复杂度和非线性,给系统建模带来了极大挑战.为此提出了一种新的层级聚合建模方法.该方法依据分析力学中 Udwadia-Kalaba (U-K) 理论的层级属性,首先将移动机械臂划分为 3 个子系统,并分别利用 Lagrange 方程建立各自的无约束动力学模型,然后基于移动机械臂机械结构上的约束利用 Udwadia-Kalaba 基本方程 (UKE) 建立整体系统模型.此外,针对系统存在初始条件偏差的情况,利用基于 Lyapunov 稳定性理论来补偿初始条件偏差,以达到收敛理想轨迹的目的.仿真结果验证了该文所提出的建模方法的可行性.

关键词: Udwadia-Kalaba 方法; 层级聚合建模方法; 移动机械臂; 动力学建模

中图分类号: O313.3; TH113 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440025

A Hierarchical Aggregation Modelling Method for Mobile Manipulators

DONG Fangfang^{1,2}, YANG Chao¹, HAN Jiang^{1,2}, ZHANG Xinrong³

- (1. School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China;
2. Anhui Engineering Laboratory of Intelligent CNC Technology and Equipment, Hefei 230009, P.R.China;
3. Shaanxi Province Key Laboratory of Highway Construction Machinery, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)

Abstract: The coupling effects of mobile manipulators on the motion characteristics of mobile platforms during the dynamic operation process, would increase the complexity and nonlinearity of the whole system and then bring great challenges to the system modelling. A new hierarchical aggregation modelling method was proposed to solve this issue. The method is based on the hierarchical properties of the Udwadia-Kalaba (UK) theory in the analytical mechanics. First, the mobile manipulator was divided into 3 subsystems, and the unconstrained dynamics of each one was modelled with the Lagrangian equations. Subsequently, the basic Udwadia-Kalaba equations (UKE) were employed to model the overall system, in view of the constraints within the mechanical

* 收稿日期: 2023-02-02; 修订日期: 2023-08-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(52275484);安徽省自然科学基金项目(2208085ME126)

作者简介: 董方方(1988—),男,副教授,博士,硕士生导师(E-mail: fangfangdong@hfut.edu.cn);

张新荣(1968—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: zhangxinrong_chd@163.com).

引用格式: 董方方,杨超,韩江,张新荣. 移动机械臂的层级聚合建模方法研究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44 (12): 1473-1490.

structure of the mobile manipulator. In addition, the Lyapunov stability-based theory was used to compensate for the initial condition deviations to achieve convergence of the ideal trajectory. Simulation results validate the feasibility of the proposed modelling method.

Key words: Udawia-Kalaba method; hierarchical aggregation modelling method; mobile manipulator; dynamical modelling

0 引言

移动机械臂是通过在移动平台上加装一个或多个机械臂以实现协调控制的完整机械系统,相比于传统的固定基座机械臂有更大的工作范围,因此在工业生产、物料搬运、家政服务、抢险救援等领域有很大的应用空间。

移动机械臂虽然具有强大的功能,但由于机械臂和移动平台这两个系统各自的运动形式和运动特性存在较大差异,使得系统在作业过程中两者会存在强烈的相互作用,对各自运动状态产生相互影响,即耦合效应。耦合效应的建模分析较为困难,从而导致整体运动控制的稳定性较差,而且,这种耦合效应会伴随着机械臂-移动平台的质量比增大而愈加明显。因此,通常做法是尽可能将移动平台的质量加大来弱化这种耦合效应。表1列出了目前一些著名的机械臂-移动平台的质量比,可以看出,质量比大部分不超过0.21,少数超过0.3,但是过大的移动平台也会使得移动机械臂过于笨重,限制了其灵活性和工作能力,因此要实现高质量比的移动机械臂的有效控制,高效而准确的建模方法就成为了一种前置条件。

表1 机械臂-移动平台质量比^[1]

Table 1 Robotic arm-mobile platform mass ratios^[1]

research institution	robotic arm mass m_r /kg	platform mass m_p /kg	mass ratio δ
University of Texas ^[2]	3.68	17.25	0.21
Ryerson University ^[3]	15.50	44.40	0.35
Hokkaido University ^[4]	4.40	20.56	0.21
Pukyong National University ^[5]	2.85	9.50	0.30
Iran University of Science and Technology ^[6]	0.72	6.00	0.12
Institute of Automation, CAS ^[7]	7.50	60.00	0.13
South China University of Technology ^[8]	2.00	10.00	0.20

目前在移动机械臂的建模方法上有多种不同思路和解决办法,Liu等^[9]将原本耦合的移动机械臂系统分离,将耦合效应看作外部扰动,并利用Lagrange方法分别建立移动平台和机械臂独立的动力学方程。该方法虽然简化了建模过程,但不能充分发挥移动作业机器人系统的动态作业能力。杨贺贺等^[10]基于多体系统离散时间传递矩阵法,分别建立了车轮、车体柔性关节和机械臂的动力学方程,最后得到了移动柔性机械臂的整体动力学模型。该方法虽然得到了完整动力学方程,但还是要对每个分析单元进行细致的受力分析。陈良港等^[11]基于单位对偶四元数法,针对冗余移动机械臂求取任务空间速度与广义空间速度映射关系困难的问题,将移动机械臂看作一个整体建立其运动学模型。该方法虽然保证了运动学精度,但需要求解微分和逆运动学。魏丽君等^[12]基于D-H算法将移动平台看作成一个由2个移动关节和1个转动组成的虚拟关节,并将其纳入到机械臂中进行整体建模。该方法用在运动学分析中有其独特优势,但在动力学分析上就十分棘手。Zhong等^[13]使用Lagrange方法和直接路径法(DMP)的概念对移动机械臂进行了整体建模,兼顾了移动机械臂内在的耦合特性,有相对较高的建模精度,但是增加了形式和计算的复杂性,且仍然需要求解Lagrange乘子。

针对移动机械臂建模的复杂性和耦合性,通过应用分析力学中的U-K理论^[14-16]可以对移动机械臂这一非线性的机械系统进行高效而准确的建模。该理论不同于以往的力学分析方法,通过经典建模三步法就可以完成对一个复杂机械系统的动力学建模工作。即先求得一个机械系统的无约束的动力学模型,然后将约束方程转化为二阶标准形式,之后利用UKE得到解析形式的约束力,最后可得到系统受约束的动力学方程。Huang等^[17]通过对无约束的单个子系统进行聚类 and 级联,利用UKE计算由约束引入的约束力,得到多体系

统运动方程的封闭形式表达式.该方法表明 U-K 理论具有层级嵌套属性,多层约束可以叠加聚合,这为复杂多体机械系统建模提供了一种新的实践方法.该方法被应用到移动机械臂的建模中,不需要分析其每个子系统的受力情况,也不需要求解系统的逆解,更不需要求解 Lagrange 乘子,且保证了建模的准确性和简单性.董方方等^[18]基于此方法构建了双臂机器人动力学模型,极大地减小了计算过程,并保证了模型的控制精度.韩江等^[19]利用该方法高效、系统、快速地建立了 2 自由度冗余驱动并联机器人的动力学解耦模型.虽然这种方法不区分完整约束或非完整约束,且简单、通用性强,但当直接应用 U-K 方法时,必须保证系统在操作期间的每个时刻满足约束条件.在实际工程中,由于各种原因,在初始阶段很难满足这些约束条件.因此,为了处理初始条件对约束可能存在的偏差,需要针对约束方程进行修正^[20].

本文根据移动机械臂的运动特点,将移动机械臂划分为多个子系统.该方法既考虑系统所固有的耦合效应,又不失简单性和可操作性.该方法可以获得在不考虑任务要求下动力学建模的结构约束和任务约束下跟踪指定轨迹的性能约束,然后便可以通过求解 UKE 获得控制力的显式的解析表达式.同时,为了解决当初始条件不满足给定约束条件时的问题,基于 Lyapunov 稳定性理论,构造了修正的约束方程.最后通过仿真,验证了建模的正确性和应对初始条件偏差的有效性.

1 Udwadia-Kalaba 理论简介

1.1 Udwadia-Kalaba 基本方程

U-K 方法是一种求解受约束系统约束力解析解的方法.假设一个无约束的机械系统有 n 个状态变量 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]^T$, 该系统无约束条件下的动力学方程可以描述为如下形式^[14]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (1)$$

其中初始条件为 $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0, t \in \mathbf{R}$ 是时间, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ 是广义坐标, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 是广义速度, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 是广义加速度, $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是惯性矩阵, $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n$ 包括由于重力、给定力(或压力)和科氏力/离心力引起的影响力.

若该系统存在 $m (m \leq n)$ 个约束:

$$\varphi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

m 个约束可以被划分为两类,即完整约束和非完整约束.其包括 h 个完整约束

$$\varphi_i(\mathbf{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, h, \quad (3)$$

和 $m - h$ 个非完整约束

$$\varphi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad i = h + 1, h + 2, \dots, m. \quad (4)$$

基于一致性的假设,我们可以将非完整约束(4)对时间 t 微分一次,将完整约束(3)对时间 t 微分两次,以矩阵方程的形式推导出—组约束方程.可得到约束的二阶 Pfaffian 标准微分形式如下^[14]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ 为 $m \times 1$ 阶列向量.当系统引入外界约束时,该机械系统就成为“受约束机械系统”,其动力学方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{Q}^c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{Q}^c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ 为由外界约束产生的额外约束力.假设式(5)中 $\text{rank}(\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)) \geq 1$, 且惯性对称矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ 可逆,则根据 U-K 方法,上述机械系统约束运动方程的解析形式如下:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{q}, t)(\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)), \quad (7)$$

式中 $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{B}^+(\mathbf{q}, t)$ 为 $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t)$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵.对比式(1)和(6),可得由施加约束产生的约束力为

$$\mathbf{Q}^c = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{q}, t)(\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)). \quad (8)$$

从上述约束力的求解过程可以看出,该方法既不需要先确定存在的具体约束条件,也不需要求解 Lagrange 乘子,其求解的约束力为解析解,免去了大量的求解过程,且形式简单整洁.

1.2 Udwadia-Kalaba 基本方程的层级属性

依据式(8),外加约束力 Q^c 中有包含 Q 的成分,即 Q^c 是基于 Q 而得到的解析化结果.这就使得当给系统施加多个约束时,UKE 可以不断层级化地生成对应约束所产生的约束力.例如一个无约束的系统的动力学方程如下:

$$M(q,t)\ddot{q} = Q_0(\dot{q},q,t), \quad (9)$$

再给这个无约束系统施加一个约束为 $A_1(q,t)\ddot{q} = b_1(\dot{q},q,t)$ 时,依据 UKE 可以得到在该约束下的有约束动力学方程:

$$M(q,t)\ddot{q} = Q_1(\dot{q},q,t), \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} Q_1(\dot{q},q,t) = Q_0(\dot{q},q,t) + Q_1^c(\dot{q},q,t), \\ Q_1^c(\dot{q},q,t) = M^{1/2}B_1^+(q,t)(b_1(\dot{q},q,t) - A_1(q,t)M^{-1}(q,t)Q_0(\dot{q},q,t)), \\ B_1(q,t) = A_1(q,t)M^{-1/2}(q,t). \end{cases} \quad (11)$$

式(10)可以被视为一个新的无约束系统,又可以进行与式(9)一样的约束化过程.同样假定有一组约束方程 $A_2(q,t)\ddot{q} = b_2(\dot{q},q,t)$, 依据 UKE 可以得到在该约束下的有约束动力学方程:

$$M(q,t)\ddot{q} = Q_2(\dot{q},q,t), \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} Q_2(\dot{q},q,t) = Q_1(\dot{q},q,t) + Q_2^c(\dot{q},q,t), \\ Q_2^c(\dot{q},q,t) = M^{1/2}B_2^+(q,t)(b_2(\dot{q},q,t) - A_2(q,t)M^{-1}(q,t)Q_1(\dot{q},q,t)), \\ B_2(q,t) = A_2(q,t)M^{-1/2}(q,t). \end{cases} \quad (13)$$

当再有别的附加约束时,这种过程可以持续迭代下去.假设当到某层级时,该无约束动力学方程为

$$M(q,t)\ddot{q} = Q_i(\dot{q},q,t), \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} Q_i(\dot{q},q,t) = Q_{i-1}(\dot{q},q,t) + Q_i^c(\dot{q},q,t), \\ Q_i^c(\dot{q},q,t) = M^{1/2}B_i^+(q,t)(b_i(\dot{q},q,t) - A_i(q,t)M^{-1}(q,t)Q_{i-1}(\dot{q},q,t)), \\ B_i(q,t) = A_i(q,t)M^{-1/2}(q,t). \end{cases} \quad (15)$$

1.3 建模示例

我们通过一个算例来对比层级聚合方法与传统 Lagrange 方法的建模过程.假设有以下单摆系统,如图 1 所示,小球的质量为 m_0 , 绳子长度为 l_0 , 绳子系在坐标系 O_0xy 原点处,小球的坐标为 (x_0, y_0) . 小球摆动的速度为 v , 绳子角速度为 ω , 绳子与水平的夹角为 β , 绳子对小球施加的拉力为 F .

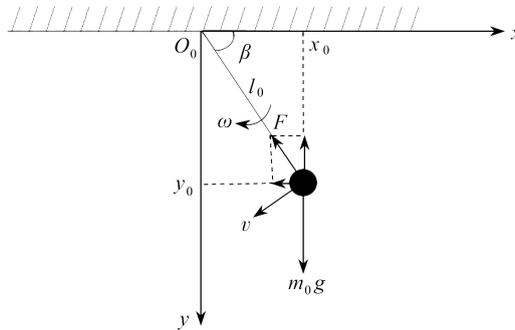


图 1 单摆系统

Fig. 1 A single pendulum system

1.3.1 层级聚合建模方法

现将单摆上的小球视为一个质量为 m_0 做自由落体运动的质点,则运动方程为

$$m_0\ddot{x}_0 = 0, \quad m_0\ddot{y}_0 = m_0g. \quad (16)$$

将式(16)改写为矩阵形式:

$$S'_{11} : \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 = \hat{\mathbf{Q}}_0, \quad (17)$$

其中
$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{Q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 g \end{bmatrix}.$$

根据单摆系统的运动特点,小球受到的约束为

$$(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2 = l_0^2, \quad (18)$$

写成二阶 Pfaffian 标准微分形式为

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 = b_0, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{q}_0 = [x_0 \ y_0]^T, \mathbf{A}_0 = [x_0 \ y_0], b_0 = -\dot{x}_0^2 - \dot{y}_0^2.$$

利用 UKE 求得约束力,并将约束力施加到式(17)的系统中,因此单摆系统动力学方程为

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 = \hat{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{M}_0^{1/2} (\mathbf{A}_0 \mathbf{M}_0^{-1/2})^+ (b_0 - \mathbf{A}_0 \mathbf{M}_0^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_0) = \tilde{\mathbf{Q}}_0. \quad (20)$$

1.3.2 Lagrange 方法

首先写出该系统的 Lagrange 函数:

$$L_0 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + m_0 g y_0. \quad (21)$$

将式(21)代入 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}_0} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}_0} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_{0c}, \quad (22)$$

其中, $\mathbf{q}_0 = [x_0 \ y_0]^T$, \mathbf{Q}_0 为外部力, \mathbf{Q}_{0c} 为约束力.依据该系统实际情况可知, \mathbf{Q}_0 不为零,所以需要对该系统进行受力分析.该系统的速度 $v = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$ (\dot{x}_0 为 x_0 方向速度, \dot{y}_0 为 y_0 方向速度),绳子拉力 F 和小球重力的合力提供向心力,因此可以得到以下关系:

$$F - m_0 g \sin \beta = m \omega^2 l_0. \quad (23)$$

因此可知 F 为

$$F = m_0 g \sin \beta + m \omega^2 l_0, \quad (24)$$

其中
$$\sin \beta = \frac{y_0}{l_0}, \omega = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{l_0}.$$

计算可以得到

$$F = \frac{m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + m_0 g y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad (25)$$

对应到 \mathbf{Q}_0 为

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{m_0 x_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + m_0 g y_0)}{x_0^2 + y_0^2} \\ -\frac{m_0 y_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + m_0 g y_0)}{x_0^2 + y_0^2} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

最后可以得到其动力学方程为

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{G} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_{0c}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{G} = [0 \ -m_0 g]^T, \mathbf{Q}_0 - \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{Q}}_0.$$

从上面两种方法的推导及分析过程可知,层级聚合方法直接对约束进行标准化处理后代入 U-K 方程可获得解析形式的约束力,再与无约束系统结合即可写出受约束系统的动力学方程.整个过程的分析简单,无需推导,易于编程实现.而拉氏方法不仅需要复杂的运动分析,还需要对得到的 Lagrange 函数方程进行求解,

进而得到最终的动力学方程.因此从求解全过程可知,从数据处理和运动分析的角度来看,层级聚合方法具有简明直观的特点.

2 基于层级聚合建模方法的移动机械臂建模

基于 U-K 方法的层级属性,将所研究的移动机械臂划分为 3 个子系统,即移动平台系统和两个机械关节系统,如图 2 所示.为了方便在移动机器人上建立坐标系,下文将移动机器人抽象成简略图.对于 3 个子系统均为无约束系统时,可以更容易地得到其动力学方程.将移动平台和机械臂切分开来是考虑到移动平台和机械臂的差异性.此外将机械臂切分为第一、二关节和其余关节系统,这样划分的目的是减少建模过程的复杂性.

从以上介绍可知,移动机械臂是由移动平台和机械臂所构成的复合系统.我们将选用由 Mecanum 轮驱动的全方向移动平台和三关节机械臂构成的移动机械臂系统来研究移动机械臂的建模过程.选用全向移动平台是考虑到其灵活性和保证底盘的小巧性;选用的三关节机械臂是将常规的六关节机械臂简化为只有旋转、下臂和上臂的三轴机械臂,而舍去其他 3 个对移动机械臂平台整体控制精度和工作能力影响较小的腕关节,同时也不失研究的代表性和一般性.

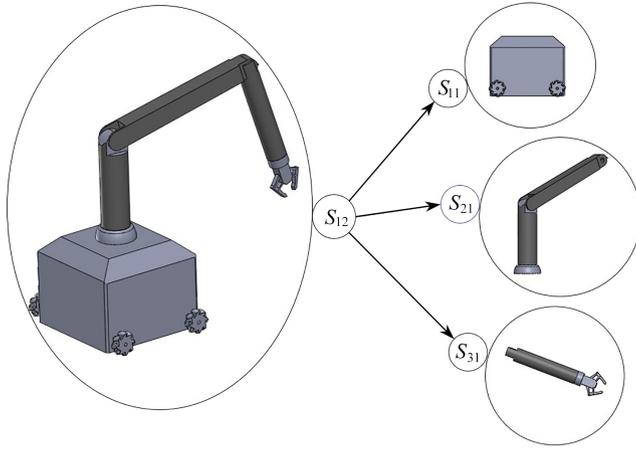


图 2 移动机械臂子系统分割图

Fig. 2 Partition of the mobile manipulator subsystem

移动机械臂运动学分析的主要任务是给出关节空间变量与位姿空间变量之间的转换关系,即运动学正问题与运动学逆问题.图 3 中的机械系统的工作装置为三关节机械臂,因此工作装置有三自由度.对移动机械臂进行运动学分析,首先在地面和机械装置上建立一些坐标系. $O_w x_w y_w z_w$ 为基坐标系, $O_M x_M y_M z_M$ 为车辆坐标系,其原点 O_M 被设置在车辆在地面上的投影, $O_R x_R y_R z_R$ 为固定在机械臂基座的坐标系, $O_1 x_1 y_1 z_1$ 为固定在第一关节的坐标系, $O_2 x_2 y_2 z_2$ 为固定在第二关节的坐标系, $O_3 x_3 y_3 z_3$ 为固定在第三关节的坐标系, $O_4 x_4 y_4 z_4$ 为固定在末端执行器的坐标系.选取机械臂的关节空间变量为:第一关节和底座之间转角为 θ_1 , 第二关节和底座之间转角为 θ_2 , 第三关节和第二关节之间转角为 θ_3 .

根据 D-H 法,利用齐次变换矩阵可知 T_{i-1}^i 能够将坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 中的向量 p_i 转换到坐标系 $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 下:

$$p_{i-1} = T_{i-1}^i p_i, \quad (28)$$

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c(\theta_{i-1}) & -c(\alpha_{i-1})s(\theta_{i-1}) & s(\alpha_{i-1})s(\theta_{i-1}) & a_{i-1}c(\theta_{i-1}) \\ s(\theta_{i-1}) & c(\alpha_{i-1})c(\theta_{i-1}) & -s(\alpha_{i-1})c(\theta_{i-1}) & a_{i-1}s(\theta_{i-1}) \\ 0 & s(\alpha_{i-1}) & c(\alpha_{i-1}) & d_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中, $c(\theta_{i-1}) = \cos \theta_{i-1}$, $s(\theta_{i-1}) = \sin \theta_{i-1}$, $c(\alpha_{i-1}) = \cos \alpha_{i-1}$, $s(\alpha_{i-1}) = \sin \alpha_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, θ_{i-1} 为坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 相对于坐标系 $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 的旋转角, α_{i-1} 为坐标系 $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 旋转轴相对于坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 旋

转轴的旋转角, a_{i-1} 为在 x_{i-1} 方向上 $O_{i-2}x_{i-2}y_{i-2}z_{i-2}$ 和 $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ 之间的距离, d_{i-1} 为在 z_{i-1} 方向上 $O_{i-2}x_{i-2}y_{i-2}z_{i-2}$ 和 $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ 之间的距离.机械臂几何参数如表 2 所示.

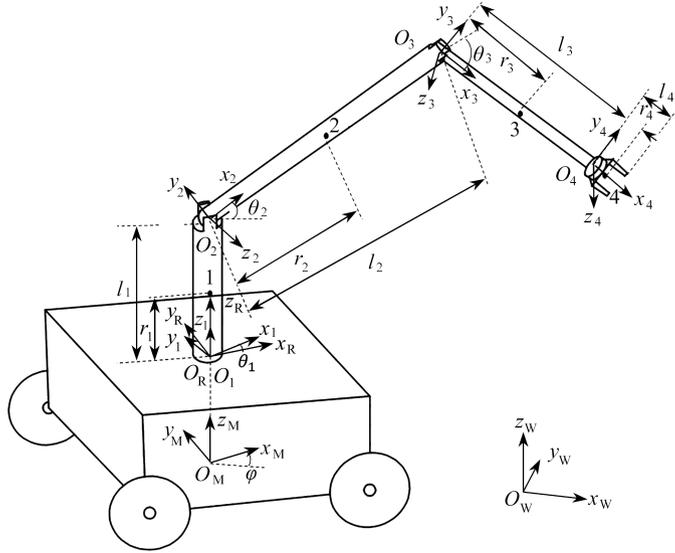


图 3 移动机械臂坐标示意图

Fig. 3 Coordinate systems for the mobile manipulator

表 2 机械臂几何参数

Table 2 Geometric parameters of the manipulator

joint number	$\alpha_{i-1} / (^\circ)$	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	l_1	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3
4	0	l_3	0	0

因此, 可得在坐标系 $O_4x_4y_4z_4$ 中的末端执行器尖端向量 p_4 在机械臂坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 中表达式 p_0 为

$$p_0 = T_0^4 p_4, \tag{30}$$

$T_0^4 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4, p_0 = [x \ y \ z \ 1]^T, p_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$. 结合表 1 所给出的参数信息可以得到其相应的变换关系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_1)c(\theta_2 - \theta_3) & -c(\theta_1)s(\theta_2 - \theta_3) \\ s(\theta_1)c(\theta_2 - \theta_3) & -s(\theta_1)s(\theta_2 - \theta_3) \\ s(\theta_2 - \theta_3) & c(\theta_2 - \theta_3) \\ 0 & 0 \\ s(\theta_1) & c(\theta_1)((l_3c(\theta_3) + l_2)c(\theta_2) + l_3s(\theta_2)s(\theta_3)) \\ -c(\theta_1) & s(\theta_1)((l_3c(\theta_3) + l_2)c(\theta_2) + l_3s(\theta_2)s(\theta_3)) \\ 0 & (l_3c(\theta_3) + l_2)s(\theta_2) - l_3c(\theta_2)s(\theta_3) + l_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

其中, $c(\theta_i) = \cos \theta_i, s(\theta_i) = \sin \theta_i, c(\theta_i - \theta_j) = \cos(\theta_i - \theta_j), s(\theta_i - \theta_j) = \sin(\theta_i - \theta_j), i = 1, 2, 3, j = 2, 3$. 机器人运动学分析中, Jacobi 矩阵用来表示机器人末端执行器的线速度和角速度与各关节速度之间的转换关系. 上面求得末端位置与各个关节角度的关系后, 则可得到末端执行器速度和各个关节速度的关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 1 \end{bmatrix} = J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\mathbf{J}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} -l_2 s(\theta_1) c(\theta_2) - (l_3 + l_4) c(\theta_2 - \theta_3) s(\theta_1) \\ l_2 c(\theta_1) c(\theta_2) + (l_3 + l_4) c(\theta_2 - \theta_3) c(\theta_1) \\ 0 \\ 1 \\ -l_2 s(\theta_2) c(\theta_1) - (l_3 + l_4) s(\theta_2 - \theta_3) c(\theta_1) & (l_3 + l_4) s(\theta_2 - \theta_3) c(\theta_1) \\ -l_2 s(\theta_1) s(\theta_2) - (l_3 + l_4) s(\theta_2 - \theta_3) s(\theta_1) & (l_3 + l_4) s(\theta_2 - \theta_3) s(\theta_1) \\ l_2 c(\theta_2) + (l_3 + l_4) c(\theta_2 - \theta_3) & l_2 c(\theta_2) + (l_3 + l_4) c(\theta_2 - \theta_3) \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

2.1 移动平台子系统的建模

移动平台采用了由伺服电机通过减速齿轮箱进行独立驱动每个 Mecanum 轮的设置,将其置于空间坐标中对其进行运动学和动力学建模,如图4所示。

为了表征移动平台的位置,使用广义坐标 x, y, φ 来描述其位置信息,因为该移动平台为全向驱动,每个轮子对应了一个角位移,分别为 $\theta_{\omega_1}, \theta_{\omega_2}, \theta_{\omega_3}, \theta_{\omega_4}$ 。同时由图4可知平台的长度和宽度分别为 $2L, 2l$, 车轮半径为 R_ω 。其运动方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\omega_1} \\ \dot{\theta}_{\omega_2} \\ \dot{\theta}_{\omega_3} \\ \dot{\theta}_{\omega_4} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_\omega} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & L+l \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & L+l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

定义移动平台子系统为 S_{11} , 并构建其 Lagrange 函数为

$$L_{11} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_\omega (\dot{\theta}_{\omega_1}^2 + \dot{\theta}_{\omega_2}^2 + \dot{\theta}_{\omega_3}^2 + \dot{\theta}_{\omega_4}^2), \quad (35)$$

其中, m 表示移动平台的质量, J_z 表示移动平台绕 z 轴的转动惯量, J_ω 表示每个轮子绕自身轴线的转动惯量, x 和 y 分别表示移动平台在空间坐标系中的横、纵坐标, $\dot{\theta}_{\omega_i} = (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示轮子的角速度。

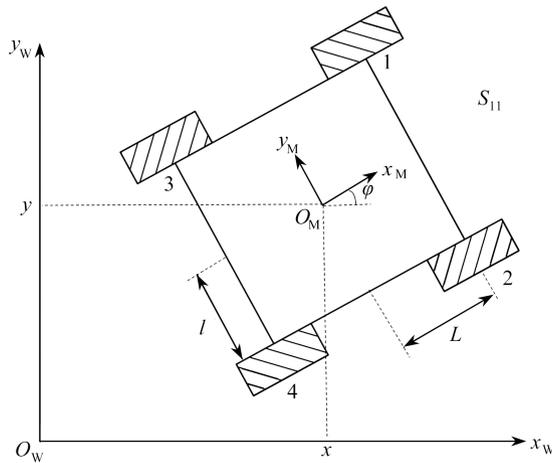


图4 移动平台结构示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the mobile platform structure

将式(35)代入到 Lagrange 方程中可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \dot{q}_{11i}} \right) - \frac{\partial L_{11}}{\partial q_{11i}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (36)$$

其中, $\dot{q}_{11} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\varphi}]^T$ 表征平台速度。

通过求解方程(36),可以得到 S_{11} 的动力学方程:

$$S_{11} : \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}_{11}) \ddot{\mathbf{q}}_{11} = \mathbf{Q}_{11}(\dot{\mathbf{q}}_{11}, \mathbf{q}_{11}), \quad (37)$$

\mathbf{M}_{11} 和 \mathbf{Q}_{11} 的具体结构如下:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} m + 4 \frac{J_\omega}{R_\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + 4 \frac{J_\omega}{R_\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & J_z + 4 \frac{J_\omega (L+l)^2}{R_\omega^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} -\mu \dot{x} \\ -\mu \dot{y} \\ -\mu \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

其中, μ 表示摩擦因数.

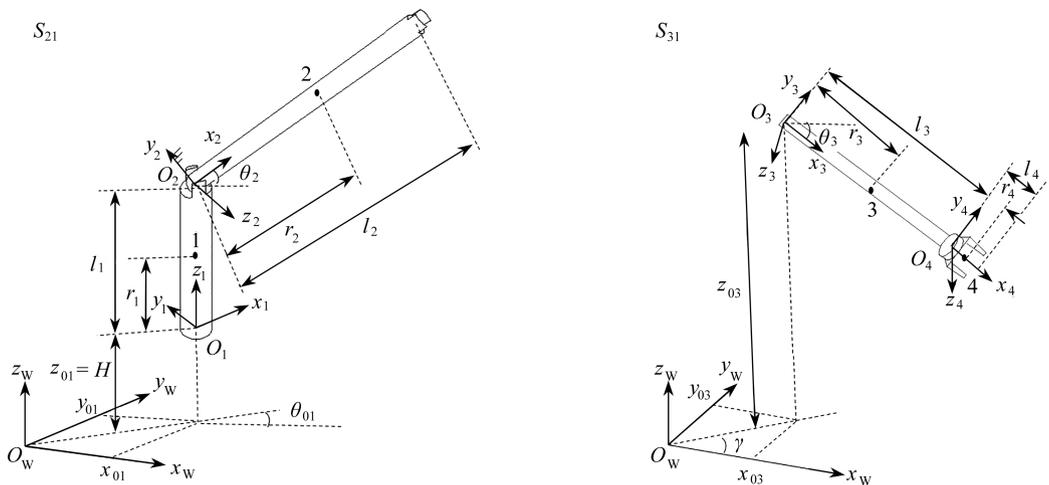
2.2 机械臂子系统的建模

上面对机械臂部分进行了运动学分析,下面对其进行动力学建模.根据本文前面所阐述的将机械臂划分为第一、二关节和其余关节子系统的建模思路,下面对其具体建模过程进行演示.将第一、二关节子系统定义为系统 S_{21} ,其余关节子系统定义为系统 S_{31} ,图 5 为机械臂关节子系统示意图.

对于系统 S_{21} ,选取广义坐标为 $\mathbf{q}_{21} = [x_{01} \ y_{01} \ \theta_{01} \ \theta_2]^T$, (x_{01}, y_{01}, z_{01}) 为坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 的原点在基座坐标系 $O_Mx_My_Mz_M$ 中的空间位置.其中 z_{01} 为定值,不作为其状态变量.选取 $(\alpha_{01}, \beta_{01}, \theta_{01})$ 为坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 的 Euler 角, Euler 角选取为 XYZ 表示方法,其中 $\alpha_{01} = 0, \beta_{01} = 0$.其子系统的 Lagrange 函数为 L_{21} 为

$$L_{21} = \frac{1}{2} m_1(\dot{x}_{01}^2 + \dot{y}_{01}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_{01}^2 - m_1 g(H + r_1) + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2 + \dot{z}_{c2}^2) + \frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_{01}^2 + \dot{\theta}_2^2) - m_2 g z_{c2}, \quad (39)$$

其中, $x_{c2} = x_{01} + r_2 \cos \theta_{01} \cos \theta_2, y_{c2} = y_{01} + r_2 \sin \theta_{01} \cos \theta_2, z_{c2} = z_{01} + l_1 + r_2 \sin \theta_2, I_1$ 和 I_2 分别为第一关节和第二关节的转动惯量.



(a) 第一、二关节子系统(子系统 S_{21})

(b) 其余关节子系统(子系统 S_{31})

(a) The 1st and 2nd joint subsystem (subsystem S_{21})

(b) The remaining joint subsystem (subsystem S_{31})

图 5 子系统 S_{21} 和 S_{31} 示意图

Fig. 5 Diagrams of subsystem S_{21} and S_{31}

代入 Lagrange 方程可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{21}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{21j}} \right) - \frac{\partial L_{21}}{\partial \mathbf{q}_{21j}} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (40)$$

其中 $\dot{\mathbf{q}}_{21} = [\dot{x}_{01} \ \dot{y}_{01} \ \dot{\theta}_{01} \ \dot{\theta}_2]^T$.

可得系统 S_{21} 在无约束条件下的动力学方程,其表达式为

$$S_{21}:\mathbf{M}_{21}(\mathbf{q}_{21})\ddot{\mathbf{q}}_{21} = \mathbf{Q}_{21}(\dot{\mathbf{q}}_{21}, \mathbf{q}_{21}), \quad (41)$$

其中

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & -m_2 r_2 \sin \theta_{01} \cos \theta_2 & -m_2 r_2 \cos \theta_{01} \sin \theta_2 \\ 0 & m_1 + m_2 & m_2 r_2 \cos \theta_{01} \cos \theta_2 & -m_2 r_2 \sin \theta_{01} \sin \theta_2 \\ -m_2 r_2 \sin \theta_{01} \cos \theta_2 & m_2 r_2 \cos \theta_{01} \cos \theta_2 & m_2 r_2^2 \cos \theta_2 & 0 \\ -m_2 r_2 \cos \theta_{01} \sin \theta_2 & -m_2 r_2 \sin \theta_{01} \sin \theta_2 & 0 & m_2 r_2^2 + I_2 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{Q}_{21} = \begin{bmatrix} m_2 r_2 (-\cos \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot (\dot{\theta}_{01}^2 + \dot{\theta}_2^2) + 2 \sin \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2) \\ m_2 r_2 (-\cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot (\dot{\theta}_{01}^2 + \dot{\theta}_2^2) - 2 \sin \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2) \\ -2 m_2 r_2^2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2 \\ m_2 r_2 (g + r_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_{01}^2) \cos \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

对于系统 S_{31} , 选取广义坐标为 $\mathbf{q}_{31} = [x_{03} \ y_{03} \ z_{03} \ \gamma \ \theta_{03}]^T$, 同样 (x_{03}, y_{03}, z_{03}) 为坐标系 $O_3 x_3 y_3 z_3$ 的原点在基坐标系 $O_M x_M y_M z_M$ 中的空间位置. 选取 $(\gamma, \psi, -\theta_{03})$ 为坐标系 $O_3 x_3 y_3 z_3$ 的 Euler 角, Euler 角选取为 ZXZ 表示方法, 其中 $\psi = 90^\circ$.

子系统 S_{31} 的 Lagrange 函数 L_{31} 可以表示为

$$L_{31} = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_{c3}^2 + \dot{y}_{c3}^2 + \dot{z}_{c3}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_{03}^2 + \dot{\gamma}^2) - m_3 g z_{c3} + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x}_{c4}^2 + \dot{y}_{c4}^2 + \dot{z}_{c4}^2) + \frac{1}{2} I_4 (\dot{\theta}_{03}^2 + \dot{\gamma}^2) - m_4 g z_{c4}, \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{c3} &= x_{03} + r_3 \cos \theta_{03} \cos \gamma, \quad y_{c3} = y_{03} + r_3 \cos \theta_{03} \sin \gamma, \\ z_{c3} &= z_{03} - r_3 \sin \theta_{03}, \quad x_{c4} = x_{03} + (l_3 + r_4) \cos \theta_{03} \cos \gamma, \\ y_{c4} &= y_{03} + (l_3 + r_4) \cos \theta_{03} \sin \gamma, \quad z_{c4} = z_{03} - (l_3 + r_4) \sin \theta_{03}, \end{aligned}$$

I_3 和 I_4 分别为第三关节和末端执行器的转动惯量.

将式(44)代入 Lagrange 方程,得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{31}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{31m}} \right) - \frac{\partial L_{31}}{\partial \mathbf{q}_{31m}} = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (45)$$

求解式(45),可得系统 S_{31} 的无约束动力学方程为

$$S_{31}:\mathbf{M}_{31}(\mathbf{q}_{31})\ddot{\mathbf{q}}_{31} = \mathbf{Q}_{31}(\dot{\mathbf{q}}_{31}, \mathbf{q}_{31}), \quad (46)$$

式中

$$\mathbf{M}_{31} = \begin{bmatrix} m_3 + m_4 & 0 & 0 & c_{s1} s(\gamma) c(\theta_{03}) & -c_{s1} c(\gamma) s(\theta_{03}) \\ 0 & m_3 + m_4 & 0 & c_{s1} c(\gamma) c(\theta_{03}) & -c_{s1} s(\gamma) s(\theta_{03}) \\ 0 & 0 & m_3 + m_4 & 0 & -c_{s1} c(\theta_{03}) \\ c_{s1} s(\gamma) c(\theta_{03}) & c_{s1} c(\gamma) c(\theta_{03}) & 0 & c_{s2} c^2 \theta_{03} + I_3 + I_4 & 0 \\ -c_{s1} c(\gamma) s(\theta_{03}) & -c_{s1} s(\gamma) s(\theta_{03}) & -c_{s1} c(\theta_{03}) & 0 & c_{s2} + I_3 + I_4 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbf{Q}_{31} = \begin{bmatrix} (m_3 r_3 + m_4 (l_3 + r_4)) (-c(\gamma) c(\theta_{03}) (\dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}_{03}^2) + 2s(\theta_{03}) s(\gamma) \dot{\gamma} \dot{\theta}_{03}) \\ - (m_3 r_3 + m_4 (l_3 + r_4)) (s(\gamma) c(\theta_{03}) (\dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}_{03}^2) + 2s(\theta_{03}) c(\gamma) \dot{\gamma} \dot{\theta}_{03}) \\ (m_3 r_3 + m_4 (l_3 + r_4)) \dot{\theta}_{03}^2 s(\theta_{03}) + (m_3 + m_4) g \\ - 2(m_3 r_3^2 + m_4 (l_3 + r_4)^2) s(\theta_{03}) c(\theta_{03}) \dot{\gamma} \dot{\theta}_{03} \\ - (-(m_3 r_3^2 + m_4 (l_3 + r_4)^2) s(\theta_{03}) \dot{\gamma}^2 + (m_3 r_3 + m_4 (l_3 + r_4)) g) c(\theta_{03}) \end{bmatrix}, \quad (48)$$

其中

$$c_{s1} = m_3 r_3 + m_4 (l_3 + r_4), c_{s2} = m_3 r_3^2 + m_4 (l_3 + r_4)^2,$$

$$c(\theta_{03}) = \cos \theta_{03}, s(\theta_{03}) = \sin \theta_{03}, c(\gamma) = \cos \gamma, s(\gamma) = \sin \gamma.$$

2.3 构建约束和系统整合

移动机械臂可以通过堆聚子系统 S_{11}, S_{21} 和 S_{31} 再辅以物理上的结构约束将其重构成一个有机的完整系统.结合空间的位置关系,可以很容易得到其约束关系如下:

$$\begin{cases} x_{01} = x, \\ y_{01} = y, \\ \gamma = \theta_{01}, \\ x_{03} = x + l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01}, \\ y_{03} = y + l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01}, \\ z_{03} = H + l_1 + l_2 \sin \theta_2. \end{cases} \quad (49)$$

由式(49)可得其约束方程为

$$A_{12} \ddot{q}_{12} = b_{12}, \quad (50)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} & l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01} & l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_{01} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$b_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2 - l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_2^2 - 2l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2 - l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ -l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

其中

$$q_{12} = [x \ y \ \varphi \ x_{01} \ y_{01} \ \theta_{01} \ \theta_2 \ x_{03} \ y_{03} \ z_{03} \ \gamma \ \theta_{03}]^T.$$

同时可以将子系统 S_{11}, S_{21} 和 S_{31} 的矩阵 M 和 Q 集中写成另外两个矩阵 M_{12} 和 Q_{12} , 其具体构造如下:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} M_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{31} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$Q_{12} = [Q_{11} \ Q_{21} \ Q_{31}]^T. \quad (54)$$

利用 UKE 可以得到结构约束力,并获得完整的受约束的动力学方程:

$$S_{12} : M_{12}(q_{12}) \ddot{q}_{12} = Q_{12}(\dot{q}_{12}, q_{12}) + Q_{12}^c(\dot{q}_{12}, q_{12}), \quad (55)$$

$$Q_{12}^c(\dot{q}_{12}, q_{12}) = M_{12}^{1/2} (A_{12} M_{12}^{-1/2})^+ (b_{12} - A_{12} M_{12}^{-1} Q_{12}). \quad (56)$$

因为式(55)不是最简形式,所以需要将其化简.这就需要找到状态变量 q_{12} 与系统真正需要的状态变量

$q = [x \ y \ \varphi \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ 之间的变换关系.除了知道式(49)所得到的关系之外,还知道 $\theta_{01} = \gamma = \varphi + \theta_1$ 和 $\theta_{03} = \theta_3 - \theta_2$, 综合这些条件,可以得到以下关系式:

$$\ddot{q}_{12} = T_1 \cdot \ddot{q} + T_2, \quad (57)$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_2 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \varphi) & -l_2 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \varphi) & -l_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 + \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_2 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 + \varphi) & l_2 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 + \varphi) & -l_2 \sin \theta_2 \sin(\theta_1 + \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2 - l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_2^2 - 2l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \dot{\theta}_2 - l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_{01} \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ -l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

则对式(55)进行化简可得

$$T_1^T M_{12}(q_{12}) T_1 \ddot{q} = T_1^T Q_{12}(\dot{q}_{12}, q_{12}) + T_1^T Q_{12}^c(\dot{q}_{12}, q_{12}) - T_1^T M_{12}(q_{12}) T_2. \quad (60)$$

当系统受到外部运动约束时,会对系统施加外部约束力 τ , 从而最后可得式(60)的最简形式如下:

$$M(q) \ddot{q} = Q(\dot{q}_{12}, q_{12}) + \tau, \quad (61)$$

其中

$$M(q) = T_1^T M_{12}(q_{12}) T_1, \quad Q(\dot{q}, q) = T_1^T Q_{12}(\dot{q}_{12}, q_{12}) + T_1^T Q_{12}^c(\dot{q}_{12}, q_{12}) - T_1^T M_{12}(q_{12}) T_2,$$

τ 为运动约束力。

以上为主要的建模过程.由此,本文提出方法相比于 Lagrange 方法的优势有:首先,若直接应用拉氏方法对完整系统进行动力学建模,就需借助 Lagrange 乘子求解外部约束力,这使得 Lagrange 方程除了求解 q 和 \dot{q} 外,还要求解额外的 Lagrange 乘子 $\in R^k$, 从而将系统的维度从 6 维提高到 $6 + k$ 维.而本文用到的建模方法可直接利用 UKE 获得解析形式的约束力,不需要辅助变量.此外,直接应用拉氏方法,其主要的数据处理和计算过程在于求解该模型中的矩阵 M 和 Q . 本文在获取每个无约束子系统动力学方程后,求解出了所有子系统之间的结构约束力 Q_{12}^c (直接通过 UKE 获得).这也就自然地将原本的一部分计算量保留进 Q_{12}^c 中,简化了建立动力学方程时的数据处理和模型分析。

3 初始条件偏差

在仿真中使用的系统初始条件必须满足所需的轨迹跟踪约束.但是,由于各种因素的存在,这种情况未必真会发生.它可能只在初始时刻被近似满足.如果初始条件不相容,则模拟结果会出现发散.处理初始条件问题的一种方法是使用 Lyapunov 稳定性理论,如文献[20]所示.

所期望的轨迹由式(2)描述.基于轨迹稳定方法,我们现在修改约束方程为

$$\dot{\varphi}(\dot{q}, q, t) = f(\varphi, t, \alpha), \quad (62)$$

式中 $f(\varphi, t, \alpha)$ 是包含向量 p 、参数 α 的 m 维向量.式(62)必须满足以下要求:

- (i) $\varphi = 0$ 是约束方程的一个平衡点;
- (ii) 平衡点必须是全局渐近稳定的(GAS).

注 1 特别地,如果约束方程是完整的,如式(3)所示,那么方程可以修改为

$$\ddot{\varphi}_i + \kappa_i \dot{\varphi}_i + \varepsilon_i \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (63)$$

当 $\kappa_i, \varepsilon_i > 0$, 平衡点渐近稳定 $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

现在用修正式(3)作为期望的轨迹要求,通过微分过程,得到矩阵方程的形式为

$$A(q, t)\ddot{q} = \hat{b}(\dot{q}, q, t), \quad (64)$$

经过修改,控制力为

$$\tau = M^{1/2} B^+(q, t) (\hat{b}(\dot{q}, q, t) - A(q, t) M^{-1}(q, t) Q(\dot{q}, q, t)). \quad (65)$$

4 仿 真

为了验证本文所提出的层级建模方法的准确性,以及 UK 方法对于移动机械臂的协调控制的可实现性和适应性,将通过以下仿真过程予以说明和阐述.模拟的对象是图 2 所示的移动机械臂,该机械装置主要包括由 4 个 Mecanum 轮驱动的全向移动平台和由 3 个关节和末端夹爪构成的机械臂,其具体参数如表 3 所示.

表 3 系统动力学参数表

Table 3 System dynamics parameters

object	mass m /kg	length l /m	moment of inertia I / (kg · m ²)
mobile platform	50		2
joint 1	2	0.5	0.625
joint 2	3	0.7	0.122 5
joint 3	2	0.5	0.042
end-effector	0.5	0.1	0.000 4

为了贴近实际使用场景,便于直观地理解仿真结果,本文采用了常见的机械臂-移动平台质量比参数.质量比参数并不影响本文的建模和仿真过程,只影响稳定性控制的难易程度.

为了验证本文层级聚合建模方法的建模精度和准确性,对拉氏方法和层级聚合建模方法得到的模型同时施加约束(66)(约束满足初始条件):

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} t, y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), \theta_2 = \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), \theta_3 = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), \end{cases} \quad (66)$$

并比较在施加约束后每个状态变量的数值是否一致.

图 6 表示在受约束条件下两种建模方法获得的移动平台轨迹随时间的变化情况,图 7(a)和 7(b)分别为层级聚合建模方法和 Lagrange 方法所得的机械臂各关节轨迹随时间的变化情况,通过对比可以发现各自的运动轨迹是一致的.图 8 为两种模型下各个状态变量的数值误差,图 8(a)为移动平台 x 方向和 y 方向的轨迹误差,图 8(b)为机械臂各关节的轨迹误差.可以发现所有结果始终为零,这说明两种建模方法得到的计算

结果完全一致,充分说明了本文建模方法与拉氏方法在建模精度和准确性上是一致的。

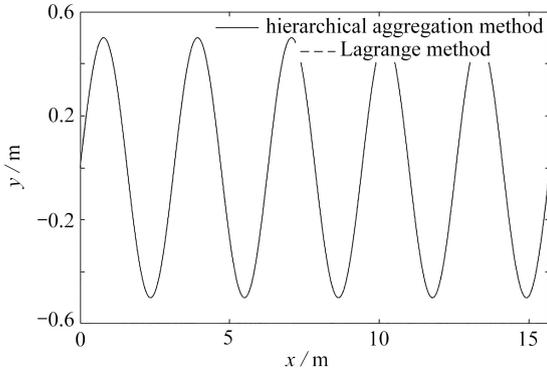


图6 移动平台轨迹

Fig. 6 Mobile platform trajectories

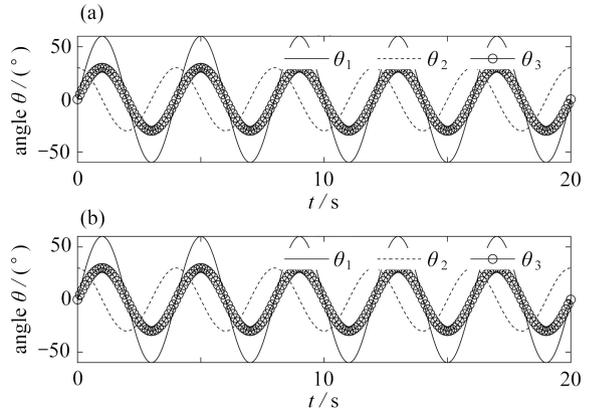


图7 机械臂各关节轨迹

Fig. 7 Trajectories of each joint of the manipulator

为对比算法的效率,采用 MATLAB 记录了两种方法的计算耗时,如图 9 所示.从图 9 中可以看出,层级聚合方法比拉氏方法所获得的模型在计算效率上略有提高,但提升的幅度有限.然而,本文提出的层级聚合建模方法对于不同类型约束(完整、非完整约束)处理具有更好的一致性,都是将约束转化为二阶微分形式,再利用 UKE 写出约束力的解析解.整个建模过程简洁明确,分析步骤较少.而拉氏方法需要先求解 Lagrange 乘子,无法获得解析形式的解.此外,利用层级叠加的属性,当有新的约束增加后,本文方法只需将新的约束转化为二阶微分形式后代入 UKE,不影响其他分析步骤.

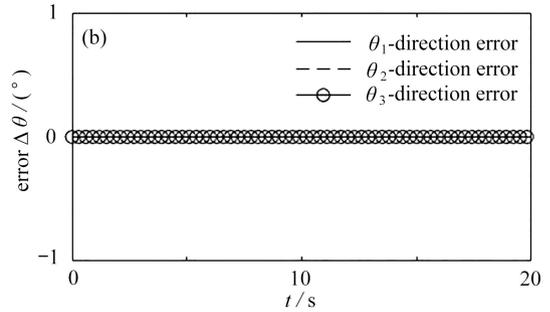
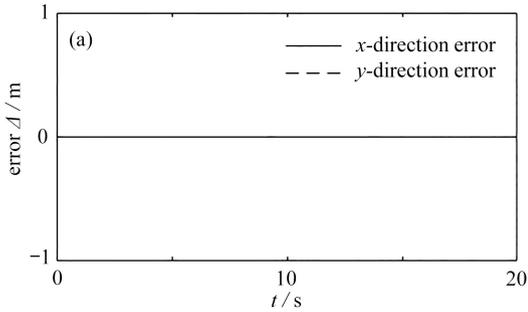


图8 移动平台与机械臂各自轨迹误差

Fig. 8 The respective trajectory errors of the mobile platform and the manipulator

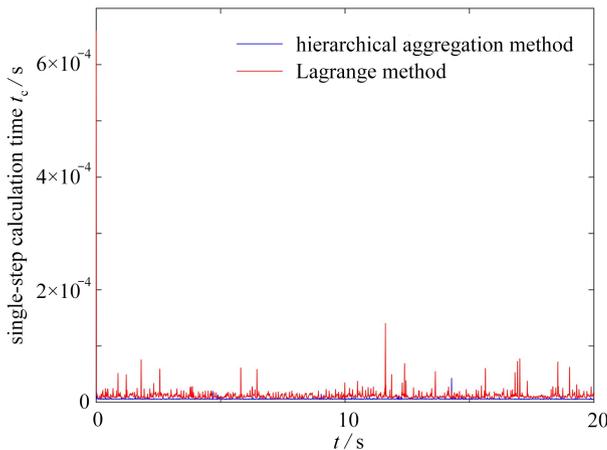


图9 层级聚合方法与拉氏方法计算效率对比

Fig. 9 Comparison of computation efficiency between the hierarchical aggregation method and the Lagrange method

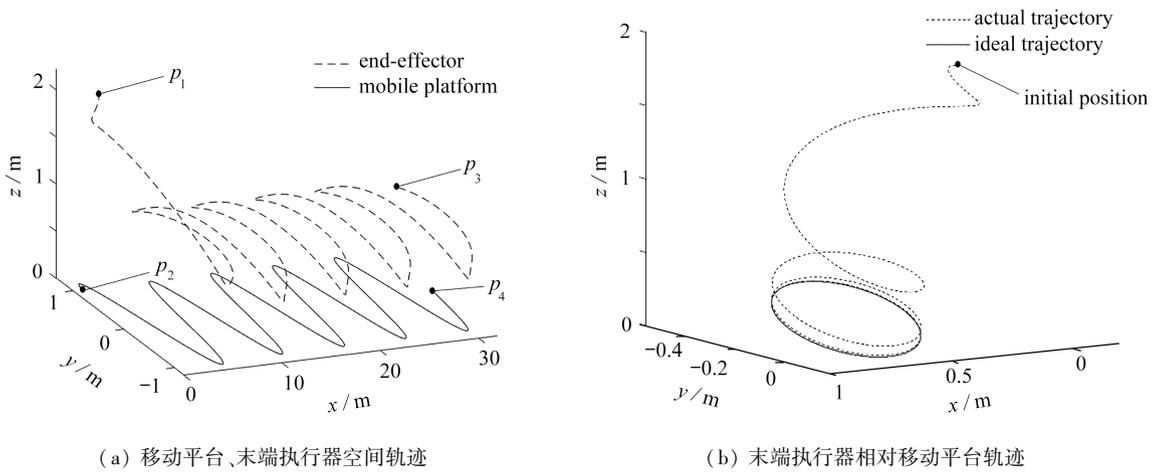
同时为了证明本文算法对于处理初始条件偏差的有效性,为移动机械臂选定一组轨迹约束,让移动平台走正弦曲线,并且机械臂进行相对于移动平台的画斜圆运动,约束条件如表 4 所示 ($x_{mp}(t), y_{mp}(t)$ 和 $z_{mp}(t)$ 分别为末端执行器相对于移动平台在坐标系 $O_R x_R y_R z_R$ 中三个方向上的轨迹约束时间函数)。

表 4 约束条件参数

Table 4 Constraint parameters

constraint	initial condition
$F_1: x(t) = \frac{\pi}{2} t; F_2: y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right);$ $F_3: \varphi(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right);$ $F_4: x_{mp}(t) = 0.75 + 0.25\cos(\pi t);$ $F_5: y_{mp}(t) = \frac{0.25\sqrt{2}}{2} \sin(\pi t);$ $F_6: z_{mp}(t) = 0.25 - \frac{0.25\sqrt{2}}{2} \sin(\pi t)$	$x_0 = 1; y_0 = 1; \varphi_0 = 0;$ $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}; \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \theta_3 = \frac{\pi}{6};$ $\dot{x}_0 = 1; \dot{y}_0 = 1; \dot{\varphi}_0 = 0;$ $\dot{\theta}_1 = -\frac{\pi}{2}; \dot{\theta}_2 = \frac{\pi}{2}; \dot{\theta}_3 = \frac{\pi}{6}$

图 10—13 为移动平台和移动机械臂各自设定轨迹约束并附加任意初始条件的情况下对于理想轨迹的跟踪情况。通过观察可知我们选定的约束均为完整约束,所以选择式 (63) 这种修正方案。表 4 所有约束均可写为式 (63) 这种形式,这样便可以将式子 $F_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 改写为 6 个修正的约束等式。其中两参数设置为, $\kappa_m = 2.5 (m = 1, 2, 3 \text{ 对应 } F_1, F_2, F_3 \text{ 的修正方程}), \kappa_n = 2 (n = 4, 5, 6 \text{ 对应 } F_4, F_5, F_6 \text{ 的修正方程}), \varepsilon_i = 1.5 (i = 1, 2, \dots, 6 \text{ 对应 } F_1, F_2, \dots, F_6 \text{ 的修正方程})$ 。图 10(b) 为机械臂相对于移动平台的画圆运动,可以发现在宏观上末端执行器从较大范围的初始条件偏差下逐渐回归到离线轨迹上。图 10(a) 为移动平台和机械臂相对于移动平台画圆展开后的空间轨迹,符合一般移动机械臂协调运动模式 (p_1 和 p_3 分别为末端执行器初始位置和终止位置; p_2 和 p_4 分别为移动平台初始位置和终止位置)。



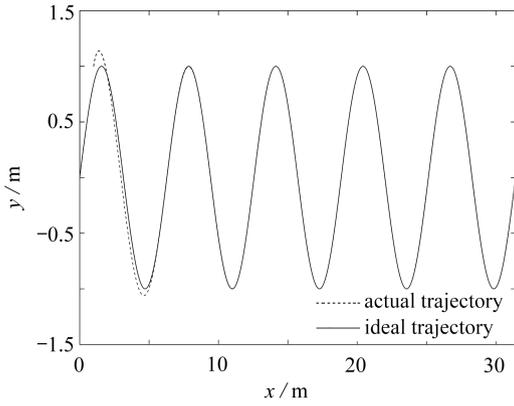
(a) Spatial trajectories of the mobile platform and the end-effector (b) End-effector trajectories relative to the mobile platform

图 10 移动平台和末端执行器的轨迹

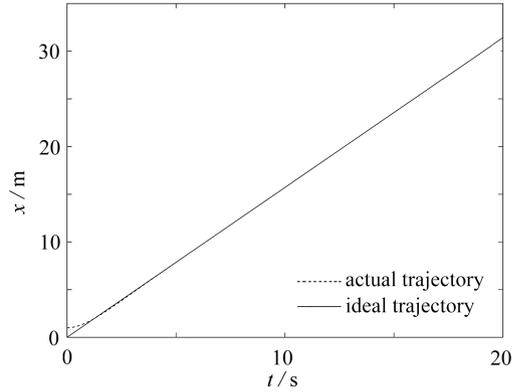
Fig. 10 The mobile platform and the end-effector trajectories

图 11 为移动平台的轨迹跟踪情况,可以发现移动平台在从在较大的初始条件偏差的情况下,在修正后的约束方程的约束下渐进地使得偏离的轨迹收敛于理想轨迹上。图 11(b)、(c) 和 (d) 分别是移动轨迹在 x, y 方向和航向角上的跟踪情况,也都吻合图 11(a) 宏观上所显现的收敛情况,都在一定的时间段后达到了收敛。图 12(a) 和 (b) 分别为移动平台和末端执行器两部分轨迹跟踪误差变化情况,可以发现移动平台在 5 s 后逐渐收敛,机械臂在 8 s 后逐渐收敛。其中移动平台的轨迹跟踪误差为 $4 \times 10^{-4} \text{ m}$,末端执行器移动平台的轨迹跟踪误差为 $5 \times 10^{-4} \text{ m}$,符合轨迹跟踪精度要求(图 12 显示的轨迹误差均为综合误差)。初始时刻之所以会出现跟踪误差较大情况,首先因为本文特意将初始条件选取在理想轨迹之外的一点,所以使得初始时刻轨迹误

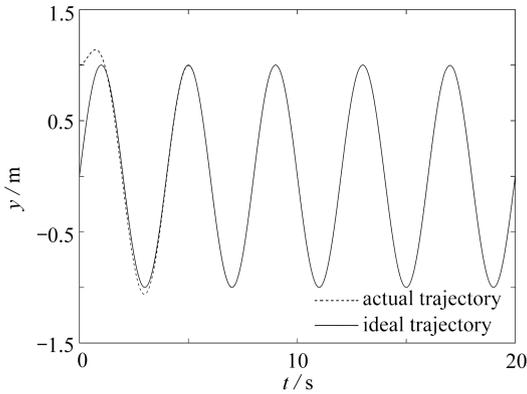
差较大;其次也是利用修正方程对理想轨迹的跟踪使得初始时刻出现了较大的超调量,目的是使系统更快的收敛.图 13(a)中 F_x 和 F_y 分别为关节 1 施加在移动平台 x,y 方向上的约束力,图 13(b)中 T_1,T_2 和 T_3 分别为关节 1,2,3 的内部约束力.观察图中数值可知,约束力没有出现奇大情况,贴合现实的使用需求.



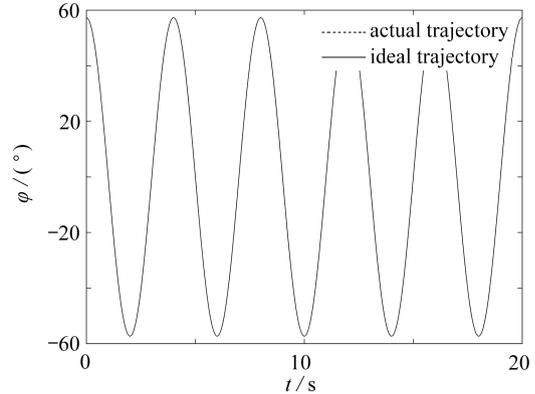
(a) 移动平台 x,y 轨迹
(a) Mobile platform x,y trajectories



(b) 移动平台 x 方向轨迹
(b) Mobile platform x -direction trajectories



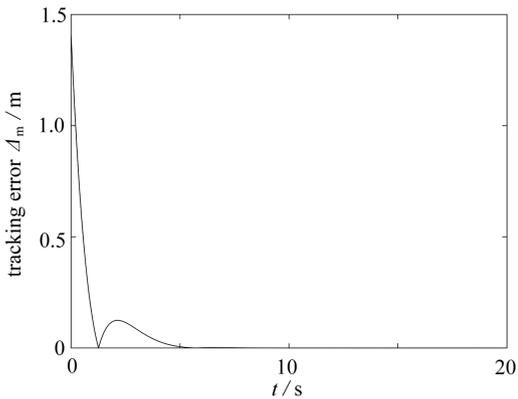
(c) 移动平台 y 方向轨迹
(c) Mobile platform y -direction trajectories



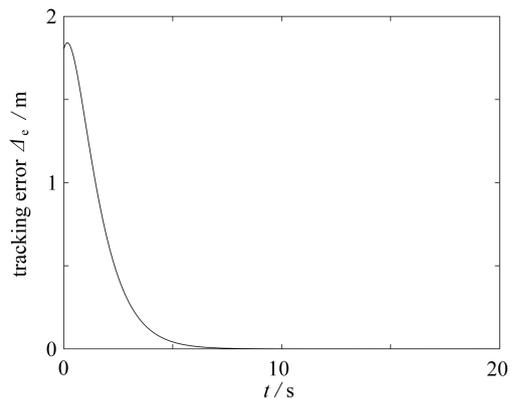
(d) 移动平台航向角
(d) Mobile platform heading angle

图 11 移动平台各方向轨迹图

Fig. 11 Trajectory diagram for mobile platform in all directions



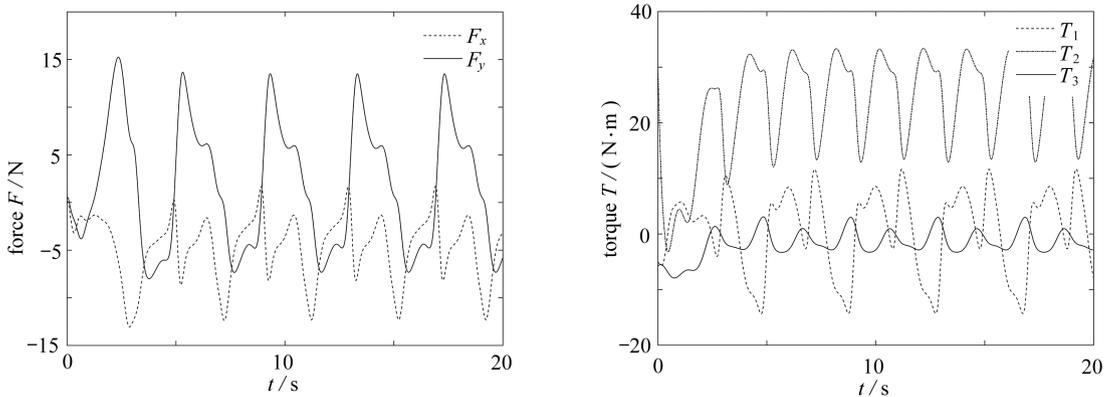
(a) 移动平台轨迹误差
(a) Mobile platform trajectory errors



(b) 末端执行器相对移动平台轨迹误差
(b) End-effector trajectory errors relative to the mobile platform

图 12 移动平台和末端执行器的轨迹误差

Fig. 12 The mobile platform and end-effector trajectory errors

(a) 关节 1 施加在移动平台 x,y 方向上的约束力(a) The forces applied to joint 1 in the x,y -directions of the moving platform

(b) 关节 1,2,3 内部约束力

(b) Internal constraints of joints 1,2,3

图 13 移动平台和关节的约束力

Fig. 13 The mobile platforms and joint constraints

5 结 论

本文首先应用了不同以往的建模方法,依据移动机械臂本身的运动特点,将移动机械臂划分为多个子系统.该方法既考虑系统所固有的耦合效应,又不失简单性和可操作性.该方法包含在不考虑任务要求下动力学建模的结构约束和跟踪指定轨迹的性能约束条件下,通过求解 UKE 可以获得控制力的显式、闭合形式的解析表达式.对于机械系统在一般条件中初始条件不满足的情况下,通过基于 Lyapunov 稳定性理论,将原来设定的轨迹约束规约化为修正的约束方程,以得到新的约束矩阵,并将其施加在所建立的动力学模型上达到补偿初始条件偏差的目的.最后仿真结果验证了移动平台和机械臂在同时进行运动时,均可以满足收敛到理想轨迹的性能需求,并实现了较高的精度要求.

致谢 本文作者衷心感谢陕西省高速公路施工机械重点实验室(长安大学)开放基金(300102252505)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] 罗欣,丁晓军. 地面移动作业机器人运动规划与控制研究综述[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, **53**(1): 1-15. (LUO Xin, DING Xiaojun. Research and prospective on motion planning and control of ground mobile manipulators[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2021, **53**(1): 1-15. (in Chinese))
- [2] TANG C P, MILLER P T, KROVI V N, et al. Differential-flatness-based planning and control of a wheeled mobile manipulator: theory and experiment[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2010, **16**(4): 768-773.
- [3] LIU Y, LIU G. Interaction analysis and online tip-over avoidance for a reconfigurable tracked mobile modular manipulator negotiating slopes[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, **15**(4): 623-635.
- [4] ZHONG G, KOBAYASHI Y, HOSHINO Y, et al. System modeling and tracking control of mobile manipulator subjected to dynamic interaction and uncertainty[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **73**(1): 167-182.
- [5] VIET T D, DOAN P T, HUNG N, et al. Tracking control of a three-wheeled omnidirectional mobile manipulator system with disturbance and friction[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, **26**(7): 2197-2211.
- [6] KORAYEM M H, ESFEDEN R A, NEKOO S R. Path planning algorithm in wheeled mobile manipulators based on motion of arms[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015, **29**(4): 1753-1763.
- [7] TAN X W, ZHAO D B, YI J. Motion control of omnidirectional mobile manipulators, part I: modeling and control[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, **45**(1): 35-41.

- [8] LI Z, YANG C, TANG Y. Decentralised adaptive fuzzy control of coordinated multiple mobile manipulators interacting with non-rigid environments[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, **7**(3): 397-410.
- [9] LIU K, LEWIS F L. Decentralized continuous robust controller for mobile robots[C]//*Proceedings, IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Cincinnati, OH, USA, 1990: 1822-1827.
- [10] 杨贺贺, 陈炜, 童嘉琦, 等. 含柔性关节的轮式移动机械臂的动力学分析[J]. 天津理工大学学报, 2022, **38**(2): 45-51. (YANG Hehe, CHEN Wei, TONG Jiaqi, et al. Dynamic analysis of wheeled mobile manipulator with flexible joints [J]. *Journal of Tianjin University of Technology*, 2022, **38**(2): 45-51. (in Chinese))
- [11] 陈良港, 张方, 张建光, 等. 基于对偶四元数移动机械臂运动学建模与控制[J]. 科技创新与应用, 2022, **12**(5): 1-5. (CHEN Lianggang, ZHANG Fang, ZHANG Jianguang, et al. Dynamic analysis of wheeled mobile manipulator with flexible joints [J]. *Technology Innovation and Application*, 2022, **12**(5): 1-5. (in Chinese))
- [12] 魏丽君, 吴海波, 刘海龙, 等. 基于 D-H 算法的移动机械臂正运动学研究[J]. 计量与测试技术, 2020, **47**(10): 1-5. (WEI Lijun, WU Haibo, LIU Hailong, et al. Research on trajectory planning of mobile manipulator based on improved gradient projection algorithm[J]. *Metrology & Measurement Technique*, 2020, **47**(10): 1-5. (in Chinese))
- [13] ZHONG G, KOBAYASHI Y, HOSHINO Y, et al. System modeling and tracking control of mobile manipulator subjected to dynamic interaction and uncertainty[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **73**(1): 167-182.
- [14] UDWADIA F E, KALABA R E. *Analytical Dynamics: a New Approach* [M]. New York: Cambridge University Press, 1996.
- [15] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1992, **439**(1906): 407-410.
- [16] UDWADIA F E, KALABA R E. Explicit equations of motion for mechanical systems with nonideal constraints [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, **68**(3): 462-467.
- [17] HUANG J, CHEN Y H, GUO K. Novel approach to multibody system modeling: cascading and clustering[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2014, **27**(2): 279-290.
- [18] 董方方, 喻斌, 赵晓敏, 等. 双移动机械臂空间协作动力学建模研究 [J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(8): 846-856. (DONG Fangfang, YU Bin, ZHAO Xiaomin, et al. Dynamic modeling of spatial cooperation between dual-arm mobile manipulators[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 846-856. (in Chinese))
- [19] 韩江, 汪鹏, 董方方, 等. 基于 Udwadia-Kalaba 方法的平面冗余并联机器人建模与轨迹跟踪控制[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(11): 1183-1196. (HAN Jiang, WANG Peng, DONG Fangfang, et al. Modeling and control of planar redundant parallel robots based on the Udwadia-Kalaba method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(11): 1183-1196. (in Chinese))
- [20] UDWADIA F E. A new perspective on the tracking control of nonlinear structural and mechanical systems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2003, **459**(2035): 1783-1800.