

刚-液耦合航天器系统的 Hamilton 结构 及稳定性分析*

易中贵¹, 岳宝增², 刘峰², 卢涛³, 邓明乐⁴

- (1. 北京理工大学 数学与统计学院, 北京 100081;
2. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081;
3. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076;
4. 中国空间技术研究院通信与导航卫星总部, 北京 100094)

摘要: 该文采用 3D 刚体摆来等效推进剂的非线性晃动行为, 由此研究了该刚-液耦合航天器系统的 Hamilton 结构, 介绍了系统的 \mathbb{R}^3 约化(对应系统的平移不变性或总线动量不变性)以及 $S_0(3)$ 约化(对应系统的旋转不变性或总角动量不变性), 并推导了系统在约化空间 $\mathfrak{e}_0^*(3) \times \mathfrak{e}_0^*(3) \times S_0(3)$ 上的约化 Poisson 括号. 接着研究了刚-液耦合航天器系统的自旋稳定性特征, 先根据对称临界原理推导了刚-液耦合航天器系统的相对平衡态, 由此根据能量-动量方法与分块对角化技术, 推导了系统的自旋稳定性条件和 Arnold 形式的稳定性边界. 最后根据具体模型参数, 给出了以图形方式展现的自旋稳定域.

关键词: 液体非线性晃动; 等效力学模型; Hamilton 结构; 稳定性分析; 能量-动量方法
中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430379

Hamiltonian Structures and Stability Analysis for Rigid-Liquid Coupled Spacecraft Systems

YI Zhonggui¹, YUE Baozeng², LIU Feng²,
LU Tao³, DENG Mingle⁴

- (1. *School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China;*
2. *School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China;*
3. *Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, Beijing 100076, P.R.China;*
4. *Institute of Telecommunication and Navigation Satellites, China Academy of Space Technology, Beijing 100094, P.R.China)*

* 收稿日期: 2022-06-13; 修订日期: 2022-08-12

基金项目: 国家国防科技工业局民用航天“十三五”技术预先研究项目(D020201); 国家自然科学基金(重点项目)(12132002); 国家自然科学基金(面上项目)(11772049); 国家自然科学基金青年科学基金项目(12202044)

作者简介: 易中贵(1989—), 男, 博士(E-mail: yhcqyzg@sina.com);
岳宝增(1962—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: bzyue@bit.edu.cn).

引用格式: 易中贵, 岳宝增, 刘峰, 卢涛, 邓明乐. 刚-液耦合航天器系统的 Hamilton 结构及稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 499-512.

Abstract: For the dynamics problems of rigid-liquid coupling spacecraft systems with liquid propellant, a 3D rigid pendulum model was used to simulate the nonlinear sloshing behavior of the propellant. On this basis, the Hamiltonian structure of the rigid-liquid coupling spacecraft system was studied, the \mathbb{R}^3 reduction (corresponding to the translation invariance or the bus momentum invariance of the system) and the $S_0(3)$ reduction (corresponding to the rotation invariance or the total angular momentum invariance of the system) of the system were introduced, with the reduced Poisson brackets of the system in reduced space $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$ derived. Then, the spin stability characteristics of the rigid-liquid coupled spacecraft system were studied. Firstly, the relative equilibrium of the rigid-liquid coupled spacecraft system was derived under the principle of symmetric criticality. Based on the energy-momentum method and the block diagonalization technology, the spin stability conditions and the Arnold form stability boundaries of the system were derived. Finally, the spin stability domains illustrated in the form of graph were given according to the specific model parameters.

Key words: liquid nonlinear sloshing; equivalent mechanical model; Hamiltonian structure; stability analysis; energy-momentum method

0 引言

现代航天器通常都需要携带大量的液体燃料推进剂,当这些复杂航天器或者探测器在执行任务时,如姿态机动、轨道转移、交会对接、悬停与避障等,复杂航天器系统的液体推进剂与部件的相互运动将会严重影响该耦合系统的稳定性。

自 20 世纪 60 年代开始,研究人员们就发现可以采用刚体来等效封闭储腔内部分填充连续介质液体的动力学行为^[1-2]。自此,得益于动力学描述的简化、计算复杂度的减小以及在舰实时控制的可实现性等优势,相比于计算流体动力学 (computational fluid dynamics, CFD) 方法,等效力学模型 (包括质量弹簧与平面摆模型^[1]、球摆模型^[3-6]、运动脉动球模型^[7]等) 在航天工程领域受到了越来越多工程人员的青睐。然而,对于大幅非平面晃动的情形 (即液体首先会经历一个伴随有液体起旋的大幅横向晃动,进而会出现明显的旋转晃动和液体自旋运动,来自 Tang 和 Yue^[8] 工作的数值结果很好地解释了这一物理过程), Liu 和 Yue 等^[9-10] 提出了一个复合 3D 刚体摆模型,该模型被证明是一个有效且可行的方案。通过与解析解、实验解和数值解进行对比,该模型成功预测了球形储腔中的晃动力。在此之前,据研究者统计,还没有发现研究液体起旋的相关工作。由于控制方程中出现的奇异性,即便是球摆模型也不能完成此项工作^[10]。

几何力学是从现代微分几何 (流形) 的观点对经典 Lagrange 和 Hamilton 力学的现代描述^[11]。这些现代的、内禀的几何技术为人们提供了一个全局和无坐标描述的方案,这种方案可以避免选择局部坐标时容易遇到的繁冗的计算以及致命的奇异性问题^[12],如刚体姿态表示里面的 Euler 角就是一个例子 (这实际上是 Lie 群中的特殊正交群 $S_0(3)$)^[10]。

Arnold 将著名的 Lyapunov 稳定性理论向前推广,从而得到能量-Casimir 方法 (该术语是由文献 [13] 首次提出的)。通过对能量-Casimir 函数取一阶导数即可得到相对平衡点,再结合二阶导数以及凸分析即可得到相应力学系统的稳定性^[14]。Ozkazanc^[15] 使用 Lagrange 力学推导了带全充液储腔的航天器系统的动力学方程,并使用能量-Casimir 方法分析了该系统的稳定性。该航天器系统被建模为一个刚体携带有不可压缩、无黏、均质液体的全充液系统。因此,该系统实际上没考虑液体晃动的影响。但是该文献对该航天器系统的非正则 Hamilton 结构、Lie-Poisson 描述与 Euler-Poincaré 描述、相对平衡态以及控制问题都做了非常详细的研究。Ardakani 等^[16] 提出了一种推导储腔内带有自由液面的二维不可压缩旋转流体流运动的变分原理,并采用 Euclidean 群表示刚性储腔的运动。Gasbarri 等^[17] 采用多体建模方法研究了刚-液-柔耦合航天器系统的动力学建模以及稳定性分析,并采用球摆模型来等效储腔内部分填充液体的晃动行为。Salman 和 Yue^[18] 使用 Lyapunov 以及 Casimir 能量函数研究了充液航天器系统的运动稳定性问题。该文献中,他们采用平面摆来等效液体的晃动问题,因此该模型只适用于小幅线性的横向晃动问题。此外,他们还研究了该耦合系统的分叉以及混沌问题。闫玉龙^[19] 采用能量-Casimir 方法研究了刚-液-柔耦合航天器系统的姿态稳定性问题。其中液体晃动被等效为一个平面摆模型,柔性附件采用的是线性剪切梁。

然而,当人们尝试把能量-Casimir 方法推广到几何精确杆(或者三维弹性板或壳)时,则被证明这是行不通的^[20].这是由于约化空间里表示的 Casimir 函数很难表示或实际上根本就不存在^[21-22].幸运的是,Simo 等^[20]针对这一问题做了改进,并由此提出了能量-动量方法.文献[20]研究的另外一个非常关键且重要的结果就是分块对角化技术,它把能量动量函数的二阶变分分块对角化为整体刚性运动和内部振动两块,即将对称群产生的“旋转”扰动与“内部(变形)”扰动的互补空间分离,其中前一个分块即对应著名的 Arnold 形式.

据此,笔者从几何力学的 Lagrange 角度出发,系统研究了刚-液-柔耦合航天器系统的全局和无坐标描述动力学方程、相对平衡态的寻找及其相对平衡特性的证明、稳定性准则的建立和分析^[23].模型中的柔性附件采用的是可以在三维空间做任意运动的几何精确杆(包括拉伸、剪切、扭转和弯曲).因此采用能量-动量方法与分块对角化技术研究了该刚-液-柔耦合航天器系统的稳定特性.

在本文中,针对刚-液耦合航天器系统液体推进剂的非线性晃动行为,给出了适用于球腔及柱腔的 3D 刚体摆等效力学模型.由此,采用内禀的几何技术研究了该耦合系统的 Hamilton 结构,推导了其在约化空间上的约化 Poisson 括号.最后,采用能量-动量方法以及分块对角化技术,建立了该耦合系统的相对平衡态和相应的自旋稳定性准则.

1 刚-液耦合系统的 Hamilton 结构

1.1 Lagrange 函数

燃料推进剂在球形储腔或者圆柱储腔中的非线性晃动行为可通过一个刚体摆来等效.如图 1 所示,液体燃料的晃动部分通过刚体摆来等效其力学行为,而未晃动部分(即“冻结”燃料部分)则等效为固定在主刚体上的一个集中质量点.而且当 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ 时,对应于球形储腔的等效,否则对应于圆柱储腔的等效.关于等效原则(包括静态属性和动态属性)的叙述可参考文献[1]中的 3.2 节,较详细的可参考 NASA 组织研究的,关于液体晃动动力学行为的文献[24]中的第 6 章.对于球腔和圆柱腔中等效力学模型的各等效参数也可参考文献[1](P48)中提供的经验公式,或者文献[24](P204)中提供的经验公式,两者的区别只是坐标系选取的差异.等效方式可参考文献[10]中 2.1 节的详细叙述.如果不考虑未晃动部分的“冻结”燃料,那么图 1 中的力学模型就完全等价于经典的双刚体系统^[25-30].

图 1 中的物理参数解释如下: O_1 为空间惯性坐标系 $O_1E_1E_2E_3$ 的原点; O_0 为系统质心; O_1 为主刚体平台在质心处的连体坐标系 $O_1e_1e_2e_3$ 的原点,也是储腔的形心; O_2 为刚体摆在质心处的连体坐标系 $O_2f_1f_2f_3$ 的原点; O_f 为“冻结”燃料集中质量点; O_h 为等效液体晃动刚体摆的虚拟悬挂点; \mathbf{h} 为主刚体平台上连体坐标系中,从点 O_1 到点 O_h 的矢量; \mathbf{l} 为等效刚体摆上连体坐标系中,从点 O_h 到点 O_2 的矢量; \mathbf{d} 为主刚体平台上连体坐标系中,从点 O_1 到点 O_f 的矢量; $\boldsymbol{\varphi}_0$ 为空间惯性坐标系中,从点 O_1 到点 O_0 的矢量; $\boldsymbol{\varphi}_1$ 为空间惯性坐标系中,从点 O_1 到点 O_1 的矢量; $\boldsymbol{\varphi}_2$ 为空间惯性坐标系中,从点 O_1 到点 O_2 的矢量; $\boldsymbol{\varphi}_f$ 为空间惯性坐标系中,从点 O_1 到点 O_f 的矢量; \mathbf{B}_1 为主刚体平台从连体坐标系到空间坐标系的姿态矩阵; \mathbf{B}_2 为等效刚体摆从连体坐标系到空间坐标系的姿态矩阵.

根据图 1,可以得到如下的运动关系:

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{h} + \mathbf{B}_2\mathbf{l}, \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_f = \boldsymbol{\varphi}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{d}. \quad (1b)$$

根据上式与系统质心关系,可得

$$\mathbf{M} = m_1 + m_2 + m_f, \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_1 + \frac{m_2}{M}(\mathbf{B}_1\mathbf{h} + \mathbf{B}_2\mathbf{l}) + \frac{m_f}{M}\mathbf{B}_1\mathbf{d}, \quad (2b)$$

式中 m_1, m_2, m_f 分别为主刚体平台、等效刚体摆和“冻结”燃料的质量.

该刚-液耦合航天器系统的构型流形可由如下定义的 Cartesius 积表示:

$$Q = \mathbb{R}^3 \times S_0(3) \times S_0(3) = \{ \mathbf{q} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) \}. \quad (3)$$

给定一个群元素 $\mathbf{B} \in S_0(3)$, 其在连体坐标系下(即左作用)的切丛上的空间表示为 $(\mathbf{B}, \mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\Omega}}) \in TS_0(3)$,

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为连体坐标系下的体角速度.

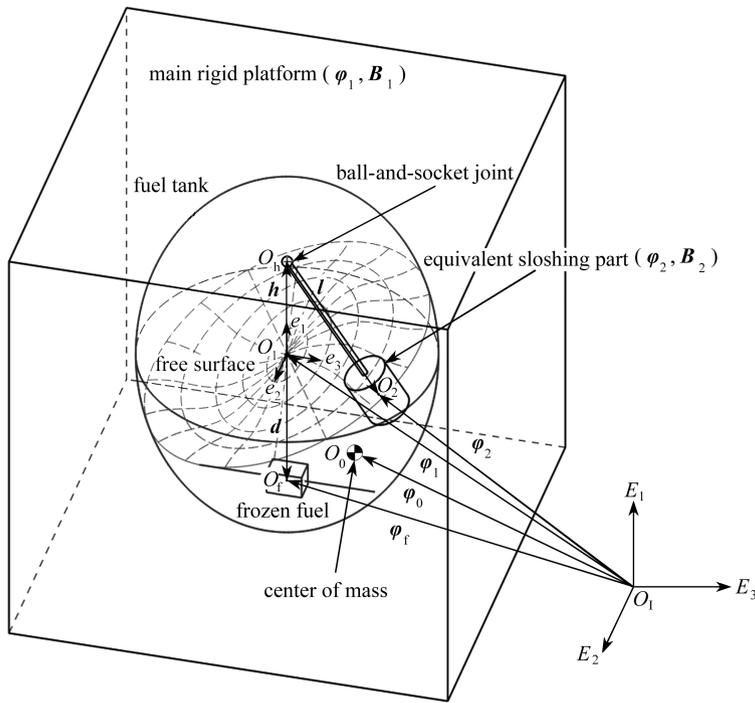


图1 刚-液耦合航天器系统的等效力学模型

Fig. 1 The equivalent mechanical model for the rigid-liquid coupled spacecraft system

假设 $\boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{R}^3$ 是主刚体上的任意一点在连体坐标系 $O_1 e_1 e_2 e_3$ 下的位置矢量, 那么其在空间坐标系 $O_1 E_1 E_2 E_3$ 下的空间惯性位置可表示为 $\boldsymbol{\varphi}_{q_1} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{q}_1$. 因此主刚体动能可写为

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}_1} \rho_1 \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \dot{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{q}_1\|^2 d^3 \boldsymbol{q}_1, \quad (4)$$

式中 \mathfrak{B}_1 是主刚体上的所有点在连体坐标系下的位置矢量构成的集合, 因此有 $\boldsymbol{q}_1 \in \mathfrak{B}_1$; ρ_1 是主刚体平台的质量密度. 根据运动学关系 $\dot{\boldsymbol{B}}_1 = \boldsymbol{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_1$ 和矩阵迹的定义 $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = \text{tr}[\boldsymbol{x} \boldsymbol{x}^T]$, 因此主刚体平台的动能 T_1 可以重新表示为

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \rangle, \quad (5)$$

式中 $m_1 = \int_{\mathfrak{B}_1} \rho_1 d^3 \boldsymbol{q}_1$, 运算符 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示矢量的 Euclidean 内积, 而 $\boldsymbol{J}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示常数惯性并矢^[18], 其表达式如下:

$$\boldsymbol{J}_1 = \int_{\mathfrak{B}_1} \rho_1 (\|\boldsymbol{q}_1\|^2 \mathbf{1}_3 - \boldsymbol{q}_1 \otimes \boldsymbol{q}_1) d^3 \boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (6)$$

同理, 根据相同的思路可以推导得到等效晃动刚体摆的动能, 并直接写为

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}_2} \rho_2 \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \dot{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{h} + \dot{\boldsymbol{B}}_2 \boldsymbol{l} + \dot{\boldsymbol{B}}_2 \boldsymbol{q}_2\|^2 d^3 \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2} m_2 \langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{B}_1 \hat{\boldsymbol{h}}^T \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{B}_2 \hat{\boldsymbol{l}}^T \boldsymbol{\Omega}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{B}_1 \hat{\boldsymbol{h}}^T \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{B}_2 \hat{\boldsymbol{l}}^T \boldsymbol{\Omega}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}_2, \boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 \rangle, \quad (7)$$

式中用到了式(1a), \mathfrak{B}_2 是刚体摆上的所有点在连体坐标系下的位置矢量构成的集合, 因此 $\boldsymbol{q}_2 \in \mathfrak{B}_2$; 并且 $\dot{\boldsymbol{B}}_2 = \boldsymbol{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_2$.

对于“冻结”燃料部分(即未晃动部分的固定质量)的动能也可以根据相同的推导思路直接写为

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \dot{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{d}\|^2 = \frac{1}{2} m_f \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{J}_f \boldsymbol{\Omega}_1 \rangle + m_f \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{B}_1 \hat{\boldsymbol{d}}^T \boldsymbol{\Omega}_1 \rangle, \quad (8)$$

其中 $J_f = m_f(\|d\|^2 \mathbf{1}_3 - d \otimes d)$.

根据式(5)–(7),便可得到图 1 中表示的刚-液耦合航天器系统的总动能,并表示如下:

$$T = T_1 + T_2 + T_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_f)\langle v_1, v_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle \Omega_1, (J_1 + J_h + J_f)\Omega_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle \Omega_2, (J_2 + J_l)\Omega_2 \rangle + \langle \Omega_1, m_2 \hat{h}^T B \hat{l} \Omega_2 \rangle + \langle v_1, (m_2 B_1 \hat{h}^T + m_f B_1 \hat{d}^T)\Omega_1 + (m_2 B_2 \hat{l}^T)\Omega_2 \rangle, \quad (9)$$

式中 $J_h = m_2(\|h\|^2 \mathbf{1}_3 - h \otimes h)$, $J_l = m_2(\|l\|^2 \mathbf{1}_3 - l \otimes l)$, $B = B_1^T B_2$.

由于本文中不考虑系统所处的重力环境,因此系统没有势能项.所以图 1 中表示的刚-液耦合航天器系统的 Lagrange 函数 $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ 可表示为

$$L(\varphi_1, B_1, B_2, v_1, \Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{2} m_{12f} \langle v_1, v_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega_1, \mathcal{J}_1 \Omega_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega_2, \mathcal{J}_2 \Omega_2 \rangle + \langle \Omega_1, \mathcal{J}_{12} \Omega_2 \rangle + \langle v_1, \mathcal{J}_{1v} \Omega_1 + \mathcal{J}_{2v} \Omega_2 \rangle, \quad (10)$$

式中 $m_{12f} = m_1 + m_2 + m_f$, $\mathcal{J}_1 = J_1 + J_h + J_f$, $\mathcal{J}_2 = J_2 + J_l$, $\mathcal{J}_{12} = m_2 \hat{h}^T B \hat{l}$, $\mathcal{J}_{2v} = m_2 B_2 \hat{l}^T$, $\mathcal{J}_{1v} = B_1(m_2 \hat{h}^T + m_f \hat{d}^T)$, 其中系统的切丛 $TQ = T\mathbb{R}^3 \times TS_0(3) \times TS_0(3)$.

1.2 刚-液耦合系统的约化

接下来,考虑特殊 Euclidean 群 $S_E(3)$ 里面的一个群单元 g :

$$g = \begin{bmatrix} A & a \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中 $A \in S_0(3)$, $a \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$.其中特殊 Euclidean 群 $S_E(3)$ 可以理解为一个 Cartesius 积^[12], $S_E(3) = S_0(3) \times \mathbb{R}^3$.

根据 Lie 群在光滑流形上的左作用的定义^[11-12],便可定义特殊 Euclidean 群 $S_E(3)$ 在式(3)中介绍的构型流形 Q 上的左作用,因此可得

$$L_g(q) = g \cdot q = (A\varphi_1 + a, AB_1, AB_2). \quad (12)$$

通过验算可以发现式(10)中的 Lagrange 函数在此作用下是不变的,所以该刚-液耦合航天器系统的 Hamilton 函数在此群作用下也是不变的.由此,就可通过此群对该系统做约化处理.此约化可分为两步:第一步先介绍 \mathbb{R}^3 约化(即系统的平移不变性),这也对应于系统的总线动量不变性;第二步再介绍 $S_0(3)$ 约化(即系统的旋转不变性),这也对应于系统的总角动量不变性.

首先介绍 \mathbb{R}^3 约化,这里的理论依据是辛约化理论^[28,31].由式(2b)就可以根据系统质心矢量将上述系统的构形流形重新表示为

$$Q = \mathbb{R}^3 \times S_0(3) \times S_0(3) = \{q = (\varphi_0, B_1, B_2)\}. \quad (13)$$

系统的总线动量 P 可以表示为

$$P = M\dot{\varphi}_0 = M\dot{\varphi}_1 + m_2(\dot{B}_1 h + \dot{B}_2 l) + m_f \dot{B}_1 d. \quad (14)$$

因此根据此式,式(10)中的 Lagrange 函数就可重新改写为包含系统质心动量的函数:

$$L(\varphi_0, B_1, B_2, v_0, \Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{2M} \|P\|^2 + \frac{1}{2} \langle \Omega_1, \mathfrak{J}_1 \Omega_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega_2, \mathfrak{J}_2 \Omega_2 \rangle + \langle \Omega_1, \mathfrak{J}_{12} \Omega_2 \rangle, \quad (15)$$

式中各惯性参数 $\mathfrak{J}_1 = J_1 + \varepsilon_a(\|h\|^2 \mathbf{1}_3 - h \otimes h) + \varepsilon_b(\|d\|^2 \mathbf{1}_3 - d \otimes d) - 2\varepsilon_c((h \cdot d)\mathbf{1}_3 - h \otimes d)$, $\mathfrak{J}_2 = J_2 + \varepsilon_a(\|l\|^2 \mathbf{1}_3 - l \otimes l)$, $\mathfrak{J}_{12} = (\varepsilon_a \hat{h}^T - \varepsilon_c \hat{d}^T) B \hat{l}$, 约化质量 $\varepsilon_a = m_{1f} m_2 / m_{12f}$, $\varepsilon_b = m_{12} m_f / m_{12f}$, $\varepsilon_c = m_2 m_f / m_{12f}$, $m_{1f} = m_1 + m_f$, $m_{12} = m_1 + m_2$, $m_{12f} = m_1 + m_2 + m_f$.

式(12)中引入的左作用的动量映射就可定义为

$$J: T\mathbb{R}^3 \times TS_0(3) \times TS_0(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3*}, (\varphi_1, \dot{\varphi}_1, B_1, \dot{B}_1, B_2, \dot{B}_2) \mapsto P, \quad (16)$$

其可通过标准函数 $J_\xi(v_q) = \langle \mathcal{J}L(v_q), \xi_Q(q) \rangle$ 计算得到^[11-12].这是因为由式(15)可知 $\mathcal{J}L(v_q) = \partial L / \partial v_0 = Mv_0 = P$, 因此 $J_\xi = \langle P, \xi \rangle$, 从而可得 $J(v_q) = P$. Legendre 变换 $\mathcal{J}L$ 在空间 $T\mathbb{R}^3 \times TS_0(3) \times TS_0(3)$ 上诱导了一个

辛结构.

在常数点 \mathbf{P} 对应的约化空间为 $J^{-1}(\mathbf{P})/\mathbb{R}^3 = TS_0(3) \times TS_0(3)$. 此时在约化空间上, 式(15) 中 Lagrange 函数的第一项就是一个常数项, 因此可以去掉, 从而可得约化后的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}_1, \mathfrak{J}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}_2, \mathfrak{J}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 \rangle + \langle \boldsymbol{\Omega}_1, \mathfrak{J}_{12} \boldsymbol{\Omega}_2 \rangle, \quad (17)$$

从而完成了 \mathbb{R}^3 约化(即平移约化).

接下来再介绍 $S_0(3)$ 约化(即旋转约化), 这对应于系统的总角动量不变性. 这里的理论依据为 Poisson 约化理论^[25, 32]. 为了获得系统角动量的显式表达式, 这里将式(17) 中的 Lagrange 函数改为如下二次形式的函数:

$$L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathfrak{J} \boldsymbol{\Omega} \rangle, \quad (18)$$

式中 $\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\Omega}_1; \boldsymbol{\Omega}_2]$, $\mathfrak{J} = [\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_{12}; \mathfrak{J}_{12}^\top, \mathfrak{J}_2]$.

从而将 Legendre 变换 $\mathcal{J}L$ 应用在此二次形式的 Lagrange 函数, 可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_1 \\ \boldsymbol{\Pi}_2 \end{bmatrix} = \mathfrak{J} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 \\ \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_i (i=1, 2)$ 称为系统的体角动量, 而系统的空间姿态则可通过 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2$ 确定. 因此图 1 中的刚-液耦合航天器系统的 Hamilton 函数可写为

$$H(\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Pi}, \mathfrak{J}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \rangle, \quad (20)$$

式中 $\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{\Pi}_1; \boldsymbol{\Pi}_2]$. 由式(15) 可知相对姿态 \mathbf{B} 包含在 \mathfrak{J}^{-1} 里的 \mathfrak{J}_{12} 中.

先定义 $S_0(3)$ 在 $C = S_0(3) \times S_0(3)$ 上如下的一个左 Lie 群作用:

$$\Phi: S_0(3) \times C \rightarrow C, \quad (\mathbf{R}, (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)) \mapsto (\mathbf{R}\mathbf{B}_1, \mathbf{R}\mathbf{B}_2). \quad (21)$$

相对该作用在 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的余切提升为

$$\Phi^{T^*}: \begin{cases} S_0(3) \times T^*(S_0(3) \times S_0(3)) \rightarrow T^*(S_0(3) \times S_0(3)), \\ (\mathbf{R}, (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2)) \mapsto (\mathbf{R}\mathbf{B}_1, \mathbf{R}\mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1, \mathbf{R}\mathbf{B}_2, \mathbf{R}\mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2). \end{cases} \quad (22)$$

从而在约化空间 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))/S_0(3)$ 里的每个等价类的表示可写为

$$(\mathbf{1}, \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1, \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2) \cong (\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \mathbf{B}). \quad (23)$$

从而有同构 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))/S_0(3) \cong \mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$.

下面将推导在空间 $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$ 上的约化 Poisson 括号以及在 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的正则 Poisson 括号, 使得定义的映射^[25]

$$\mathcal{V}: \begin{cases} T^*(S_0(3) \times S_0(3)) \rightarrow \mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3), \\ ((\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2) \mapsto (\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \mathbf{B}) = (T^* L_{\mathbf{B}_1} \boldsymbol{\pi}_1, T^* L_{\mathbf{B}_2} \boldsymbol{\pi}_2, \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2)) \end{cases} \quad (24)$$

是一个 Poisson 映射, $\boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\Pi}_2$ 称为空间角动量.

现给定空间 $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$ 上的一个函数 F , 那么就可通过方式

$$F_\varphi = F \circ \mathcal{V} \quad (25)$$

定义在空间 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的一个函数 F_φ , 从而使得约化空间上的函数满足如下关系:

$$F_\varphi(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2) = F(\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \mathbf{B}). \quad (26)$$

又由于在 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的正则 Poisson 括号^[1] 的定义如下:

$$\begin{aligned} \{F_\varphi, H_\varphi\}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2) = \\ \left\langle D_{\mathbf{B}_1} F_\varphi, \frac{\partial H_\varphi}{\partial \mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1} \right\rangle - \left\langle D_{\mathbf{B}_1} H_\varphi, \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_1 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1} \right\rangle + \left\langle D_{\mathbf{B}_2} F_\varphi, \frac{\partial H_\varphi}{\partial \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2} \right\rangle - \left\langle D_{\mathbf{B}_2} H_\varphi, \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_2 \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (27)$$

其中函数 $H_\varphi \in C^\infty(T^*(S_0(3) \times S_0(3)))$. 从而根据约化 Poisson 结构的定义可得

$$\{F, H\}(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B}) = \{F_\varphi, H_\varphi\}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2), \quad (28)$$

式中 $F, H \in C^\infty(\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3))$, 等式左边是在约化空间 $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$ 上的约化 Poisson 括号, 因此根据式(27)和式(28)可得

$$\{F, H\}(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B}) = \left\langle D_{\mathbf{B}_1} F_\varphi, \frac{\partial H_\varphi}{\partial \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1} \right\rangle - \left\langle D_{\mathbf{B}_1} H_\varphi, \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1} \right\rangle + \left\langle D_{\mathbf{B}_2} F_\varphi, \frac{\partial H_\varphi}{\partial \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2} \right\rangle - \left\langle D_{\mathbf{B}_2} H_\varphi, \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2} \right\rangle. \quad (29)$$

1.3 刚-液耦合系统的 Poisson 括号

在继续推导上式中各项的具体表达式之前, 先引入特殊正交群 $S_0(3)$ 的二次切丛及其对偶空间上任意元素全局表示的概念.

根据文献[33]中 5.2.3 小节介绍, 二次切丛 $TTS_0(3)$ 及余切丛 $T^*TS_0(3)$ 上任意元素的全局表示可分别写为

$$(R, R\hat{\Omega}, R\hat{u}, R(\hat{u}\hat{\Omega} + \hat{w})), \quad (30a)$$

$$(R, R\hat{\Omega}, R(\hat{b}\hat{\Omega} + \hat{a}), R\hat{b}), \quad (30b)$$

式中 a, u, b, w, Ω 均为 \mathbb{R}^3 中的单元, 而群元素 $R \in S_0(3)$. 根据此公式, 现在就可以推导 $TT^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 与其对偶 $T^*T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的任意单元的全局表示, 具体推导步骤如下:

假设余切丛 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的切丛的单元表示为 $W = (\mathbf{B}_1 \widehat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{B}_1(\widehat{\mathbf{v}}_1 \widehat{\Pi}_1 + \widehat{\mathbf{v}}_2), \mathbf{B}_2 \widehat{\mathbf{v}}_3, \mathbf{B}_2(\widehat{\mathbf{v}}_3 \widehat{\Pi}_2 + \widehat{\mathbf{v}}_4)) \in T_{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2)} T^*(S_0(3) \times S_0(3))$, 从而可在 $T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上生成如下曲线:

$$(\mathbf{B}_1 e^{\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_1}, \mathbf{B}_1 e^{\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_1}(\widehat{\Pi}_1 + \varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_2), \mathbf{B}_2 e^{\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_3}, \mathbf{B}_2 e^{\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_3}(\widehat{\Pi}_2 + \varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_4)) \in T^*(S_0(3) \times S_0(3)), \quad (31)$$

该曲线在 $\varepsilon = 0$ 时通过 $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2)$. 因此根据式(26), 即可得函数 F_φ 的如下微分:

$$\begin{aligned} dF_\varphi(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2) W &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(\Pi_1 + \varepsilon \mathbf{v}_2, \Pi_2 + \varepsilon \mathbf{v}_4, e^{-\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_1} \mathbf{B}_1^\top \mathbf{B}_2 e^{\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_3}) = \\ & \left\langle \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}, \mathbf{v}_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}, \mathbf{v}_4 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, (\mathbf{B} \widehat{\mathbf{v}}_3 - \widehat{\mathbf{v}}_1 \mathbf{B}) \right\rangle = \\ & \left\langle -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^\top, \widehat{\mathbf{v}}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}, \mathbf{v}_2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{B}^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{v}}_3 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}, \mathbf{v}_4 \right\rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

根据式(30b), 即可得到 $T_{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2)}^* T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上的单元为

$$(\mathbf{B}_1(\hat{b} \widehat{\Pi}_1 + \hat{a}), \mathbf{B}_1 \hat{b}, \mathbf{B}_2(\hat{d} \widehat{\Pi}_2 + \hat{c}), \mathbf{B}_2 \hat{d}). \quad (33)$$

根据矩阵迹与配对的关系, 从而由 $T_{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2)}^* T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 与 $T_{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2)} T^*(S_0(3) \times S_0(3))$ 上单元的配对可有

$$\begin{cases} \hat{a} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^\top, \mathbf{b} = \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}, \\ \hat{c} = \mathbf{B}^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, \mathbf{d} = \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}. \end{cases} \quad (34)$$

结合式(33)及式(34), 即可得到

$$\begin{cases} D_{\mathbf{B}_1} F_\varphi = \mathbf{B}_1 \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \widehat{\Pi}_1 - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^\top \right), \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_1 \widehat{\Pi}_1} = \mathbf{B}_1 \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1}, \\ D_{\mathbf{B}_2} F_\varphi = \mathbf{B}_2 \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \widehat{\Pi}_2 + \mathbf{B}^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \right), \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mathbf{B}_2 \widehat{\Pi}_2} = \mathbf{B}_2 \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2}. \end{cases} \quad (35)$$

因此, 根据式(29), 即可写出式(20)中描述的刚-液耦合航天器系统在约化空间 $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}^*(3) \times S_0(3)$ 上的约化 Poisson 括号:

$$\{F, H\}(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B}) = \left\langle \mathbf{B}_1 \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \widehat{\Pi}_1 - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^\top \right), \mathbf{B}_1 \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \right\rangle - \left\langle \mathbf{B}_1 \left(\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \widehat{\Pi}_1 - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^\top \right), \mathbf{B}_1 \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \right\rangle +$$

$$\left\langle \mathbf{B}_2 \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \widehat{\Pi}_2 + \mathbf{B}^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \right), \mathbf{B}_2 \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \right\rangle - \left\langle \mathbf{B}_2 \left(\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \widehat{\Pi}_2 + \mathbf{B}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}} \right), \mathbf{B}_2 \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \right\rangle. \quad (36)$$

该式可进一步简化为

$$\begin{aligned} \{F, H\}(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B}) = & \left\langle \widehat{\Pi}_1, -\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^T \right\rangle + \left\langle \widehat{\Pi}_1, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^T \right\rangle + \\ & \left\langle \widehat{\Pi}_2, -\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2}, \mathbf{B}^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \right\rangle + \left\langle \widehat{\Pi}_2, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2}, \mathbf{B}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}} \right\rangle = \\ & - \left\langle \widehat{\Pi}_1, \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1}, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \right] \right\rangle - \left\langle \widehat{\Pi}_2, \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2}, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \right] \right\rangle - \\ & \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \mathbf{B} - \mathbf{B} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \mathbf{B} - \mathbf{B} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

根据文献[33]中的式(2.13)和上式,可得图1描述的刚-液耦合航天器系统的如下约化 Poisson 括号形式的动力学方程:

$$\begin{aligned} \dot{F} = \{F, H\}(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B}) = & \{F, H\}_{\Pi_1} + \{F, H\}_{\Pi_2} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_1} \mathbf{B} - \mathbf{B} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Pi_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_1} \mathbf{B} - \mathbf{B} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \Pi_2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

式(37)、(38)中 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 称为 Lie 括号,而 $\{F, H\}_{\Pi_i}$ 称为系统相对 $\Pi_i (i=1, 2)$ 的“-”Lie-Poisson 括号.从而式(24)中定义的映射是一个 Poisson 映射.式(37)、(38)对于所有的函数 $F(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B})$ 均成立,而 Hamilton 函数 $H(\Pi_1, \Pi_2, \mathbf{B})$ 如式(20)所示.另外,这里需要强调的是,本文中推导的此约化 Poisson 括号与文献[14]推论 2.6 中的结论是等价的,同时与文献[25]中的式(3.15)也是等价的,并且本文中的推导过程相对直观.

此外需要说明的是,式(38)中推导的约化 Poisson 括号可以推广到带柔性附件的情况.针对线性剪切梁的情形^[33],只需将式(20)中描述的系统的构形流形改为 $C = S_0(3) \times S_0(3) \times \mathcal{M}^{[34]}$,其中 \mathcal{M} 表示从区间 $[0, L]$ 到 \mathbb{R} 的函数, L 表示梁的长度.根据文献[33]的推导过程,刚-液-柔耦合航天器系统的约化 Poisson 括号可写为其中式(5.50)的形式.而针对更为一般的非线性弹性体(包括杆和板等)的 Hamilton 结构,感兴趣的读者可以阅读经典文献[35].对于这里提到的带有线性剪切梁的柔性附件的情形,文献[14, 19, 36]对能量-Casimir 方法的构造与其在相对平衡态的稳定性分析上均做了非常详细的介绍和研究.

2 刚-液耦合系统的稳定性分析

本节将采用能量-动量方法研究刚-液耦合航天器系统的稳定性特征.

2.1 系统的相对平衡态

文献[20]通过构造一个能量-动量函数,为描述相对平衡点提供了一种变分方案,这点可从其中 2.4 小节“相对平衡理论”的式(2.22)中得以体现.重构能量-动量函数便可得到修正势能的定义,而此修正势能的极值点恰恰就是相对平衡点,这一事实被称为对称临界原理.本小节将采用此对称临界原理来推导刚-液耦合航天器系统的相对平衡点.为了探讨系统自旋角速度对系统稳定性的影响,这里在系统主刚性平台上安装一个匀速旋转转子,此时的系统称为陀螺力学系统,更多的介绍可参考文献[33]中的式(2.81)和式(5.83).

根据式(13)和(17)可知,系统的构形流形可重新表示为 $Q = S_0(3) \times S_0(3) = \{q = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)\}$,并带有如下定义的 Riemann 度量:

$$\langle v_q, v_q \rangle = \langle v_u, \mathfrak{J}v_u \rangle, \quad (39)$$

式中 $v_q = (\mathbf{B}_1 \widehat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{B}_2 \widehat{\mathbf{u}}_2)$, $v_u = (\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2)$, $\mathfrak{J} = [\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_{12}; \mathfrak{J}_{12}^T, \mathfrak{J}_2]$.

系统中剩余的陀螺场及对称群分别为^[23]

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(q) = (\mathbf{B}_1 \widehat{\mathbf{y}}_1, \mathbf{B}_2 \widehat{\mathbf{y}}_2), \\ \mathbf{G} = S_0(3), \end{cases} \quad (40)$$

式中矢量 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ 的表达式由下式确定:

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathfrak{J}_{12}\mathbf{y}_2 = \mathbf{J}_d\boldsymbol{\omega}_\phi = \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathfrak{J}_{12}^T\mathbf{y}_1 + \mathfrak{J}_{22}\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (41)$$

式中 $\mathbf{J}_d, \boldsymbol{\omega}_\phi$ 分别表示转子的常数惯性并矢及转动角速度。

从而 Lie 群 $G = S_o(3)$ 左作用于该构形流形 Q 时有

$$\Psi: G \times (S_o(3) \times S_o(3)) \rightarrow (S_o(3) \times S_o(3)), (\mathbf{R}, (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)) \mapsto (\mathbf{R}\mathbf{B}_1, \mathbf{R}\mathbf{B}_2). \quad (42)$$

给定 Lie 代数 $\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$, 对应于上式中的左作用 Ψ , 则有如下定义的无穷小生成元:

$$\xi_Q(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Psi_{\exp(\varepsilon\hat{\xi})}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = (\hat{\xi}\mathbf{B}_1, \hat{\xi}\mathbf{B}_2). \quad (43)$$

根据能量-动量方法的分块对角化技术^[33], 定义如下的锁定惯性张量 $\mathbf{I}_{\text{lock}}(q): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 及在 \mathfrak{g}^* 中诱导出的陀螺-动量 $\mathbf{I}_Y(q)$:

$$\begin{cases} \langle \hat{\xi}, \mathbf{I}_{\text{lock}}(q)\hat{\eta} \rangle \triangleq \langle \xi_Q(q), \eta_Q(q) \rangle; \\ \langle \mathbf{I}_Y(q), \boldsymbol{\eta} \rangle \triangleq \langle \mathbf{Y}(q), \boldsymbol{\eta}_Q(q) \rangle. \end{cases} \quad (44)$$

再根据文献[33]中式(2.98)的定义, 便可写出上述刚-液耦合航天器系统的如下修正势能项:

$$V_\xi(q) = -\frac{1}{2} \langle \xi_Q(q), \boldsymbol{\eta}_Q(q) \rangle - \langle \mathbf{Y}(q), \boldsymbol{\eta}_Q(q) \rangle = -\frac{1}{2} \langle \xi, \mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q)\xi \rangle - \langle \xi, \mathbf{I}_Y^\circ(q) \rangle, \quad (45)$$

式中锁定惯性并矢 $\mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q)$ 与陀螺-动量并矢 $\mathbf{I}_Y^\circ(q)$ 可由式(39)、(43)、(44)推导而得:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q) = \mathbf{B}_1\mathfrak{J}_1\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2\mathfrak{J}_2\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1\mathfrak{J}_{12}\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2\mathfrak{J}_{12}^T\mathbf{B}_1^T, \\ \mathbf{I}_Y^\circ(q) = \mathbf{B}_1\boldsymbol{\kappa}. \end{cases} \quad (46)$$

根据前面关于对称临界原理的叙述, 可知式(45)的极值点即为系统的相对平衡点, 因此这里需要对修正势能 $V_\xi(q)$ 进行微分. 根据切空间 T_qQ 上的矢量在 Q 上生成的曲线可诱导出如下微分:

$$\begin{aligned} dV_\xi(q) \cdot v_q &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} V_\xi(e^{\varepsilon\hat{u}_1}\mathbf{B}_1, e^{\varepsilon\hat{u}_2}\mathbf{B}_2) = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} -\frac{1}{2} \langle \xi, \mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q + \varepsilon v_q)\xi \rangle - \langle \xi, \mathbf{I}_Y^\circ(q + \varepsilon v_q) \rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

将式(46)代入上式即可得到

$$dV_\xi(q) \cdot v_q = \langle \hat{\xi}\mathbf{B}_1\mathfrak{J}_1\mathbf{B}_1^T\xi - \widehat{\mathbf{B}_1s\xi}\widehat{\mathbf{B}_2l\xi} + \hat{\xi}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\kappa}, u_1 \rangle + \langle \hat{\xi}\mathbf{B}_2\mathfrak{J}_2\mathbf{B}_2^T\xi - \widehat{\mathbf{B}_2l\xi}\widehat{\mathbf{B}_1s\xi}, u_2 \rangle, \quad (48)$$

式中 $s = \varepsilon d - \varepsilon_a h$, 并且这里假设 \mathfrak{J}_1 是对称的, 后文 2.2 小节中式(53)给出的相对平衡点可以验证该假设是成立的. 由此式即可得到系统平衡态的构形流形 $(\mathbf{B}_{1,e}, \mathbf{B}_{2,e})$ 满足如下的平衡态条件:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_e\mathbf{B}_{1,e}\mathfrak{J}_{1,e}\mathbf{B}_{1,e}^T\xi_e - \widehat{\mathbf{B}_{1,e}s_e\xi_e}\widehat{\mathbf{B}_{2,e}l_e\xi_e} + \hat{\xi}_e\mathbf{B}_{1,e}\boldsymbol{\kappa}_e = \mathbf{0}, \\ \hat{\xi}_e\mathbf{B}_{2,e}\mathfrak{J}_{2,e}\mathbf{B}_{2,e}^T\xi_e - \widehat{\mathbf{B}_{2,e}l_e\xi_e}\widehat{\mathbf{B}_{1,e}s_e\xi_e} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (49)$$

系统处于该相对平衡态时, 可以证明:

1) 图 1 中虚拟悬挂点矢量的空间表示 $\mathbf{B}_{1,e}h_e$ 、摆杆矢量的空间表示 $\mathbf{B}_{2,e}l_e$ 和系统空间角速度 ξ 三者之间还满足如下的共面条件:

$$\mathbf{B}_{1,e}h_e \times \mathbf{B}_{2,e}l_e \cdot \xi_e = \mathbf{0}. \quad (50)$$

该式的详细证明过程可参考文献[23]中定理 3.3 条件(i)的证明, 并且可以发现该共面条件不受陀螺场的影响.

2) 如果不考虑动量轮, 则系统空间角速度 ξ_e 就是锁定惯性并矢 $\mathbf{I}_{12f,e}$ 的特征矢量, 满足条件

$$\xi_e \times \mathbf{I}_{12f,e}\xi_e = \mathbf{0}, \quad (51)$$

即 $\mathbf{I}_{12f,e}\xi_e = \lambda\xi_e$. 如果考虑动量轮, 那么上式应改为

$$\xi_e \times (\mathbf{I}_{12f,e}\xi_e + \mathbf{B}_{1,e}\boldsymbol{\kappa}_e) = \xi_e \times \boldsymbol{\alpha}_e = \mathbf{0}, \quad (52)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_e$ 表示系统在相对平衡点处的总角动量. 该条件的具体证明过程可参考文献[23]中定理 3.3 条件(iii)的证明, 其中锁定惯性并矢 $\mathbf{I}_{12f,e}$ 表达式的定义可参考文献[23]中的式(3.33), 不考虑柔性附件部分.

2.2 系统的稳定性分析

结合能量-动量方法以及 2.1 小节中的相对平衡点的介绍和讨论,接下来将应用这些方法来研究图 1 中描述的刚-液耦合航天器系统的稳定性.

本文将研究 T 型构形均匀旋转的特殊情形.假设刚-液耦合航天器系统中其他等效部件的位置构形是共线的,即“冻结”质量点的方向与等效刚体摆的摆杆方向是共线的.系统空间角速度的旋转轴与等效刚体摆的摆杆方向垂直,且通过系统质心.即对应于图 1 中摆杆方向位于 e_1 轴正方向时构成的状态,旋转轴沿 e_3 轴方向.相关参数设置如下:

$$\begin{cases} \xi_e = \xi B_{1,e} e_3 = \xi B_{2,e} f_3, & B_{1,e} e_i = -B_{2,e} f_i, & i = 1, 2, \\ h_e = h e_1, & l_e = l f_1, & d_e = d e_1, \kappa_e = \kappa e_3, \end{cases} \quad (53)$$

式中 $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ 分别对应于图 1 中主刚体平台、等效刚体摆的连体坐标系.由上式可看出,摆杆与悬挂高度处于一种类似于“折叠”的状态.另外可以验证这些参数是满足式(49)中的相对平衡方程的.

根据预-动量映射 \tilde{J} 的定义^[33],再结合式(46)和式(53),可得

$$\begin{aligned} \mu_e &= \tilde{J}(q_e, \xi_e) = I_{\text{lock}}^\circ(q_e) \xi_e + I_Y^\circ(q_e) = \\ & B_{1,e} \mathfrak{J}_{1,e} B_{1,e}^T \xi_e + B_{1,e} \mathfrak{J}_{12,e} B_{2,e}^T \xi_e + B_{2,e} \mathfrak{J}_{12,e}^T B_{1,e}^T \xi_e + B_{2,e} \mathfrak{J}_{2,e} B_{2,e}^T \xi_e + B_{1,e} \kappa_e = \\ & [(\mathfrak{J}_{1,e,3} + \mathfrak{J}_{2,e,3} + 2\varepsilon_c dl - 2\varepsilon_a hl) \xi + \kappa] B_{1,e} e_3, \end{aligned} \quad (54)$$

这里假设式中各惯性量 $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_{12}$ 均只在各自的主对角线上存在元素,如 $\mathfrak{J}_1 = \text{diag}[\mathfrak{J}_{1,1}, \mathfrak{J}_{1,2}, \mathfrak{J}_{1,3}]$.

根据迷向子代数定义,结合式(53)即可得到相对平衡点处迷向子代数 \mathfrak{g}_{μ_e} 及其正交补 $\mathfrak{g}_{\mu_e}^\perp$ 的表示分别为

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{\mu_e} = \{ \eta \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\eta^*(\mu) = 0 \} = \text{span} \{ B_{1,e} e_3 \}, \\ \mathfrak{g}_{\mu_e}^\perp = \text{span} \{ B_{1,e} e_1, B_{1,e} e_2 \}. \end{cases} \quad (55)$$

根据文献[33]中式(2.119)关于核空间 $\ker D\tilde{J}(q_e, \xi_e)$ 中 $T_{q_e}(G_{\mu_e} \cdot q_e)$ 正交补空间 V 的定义,以及对应于式(39)中的 Riemann 度量的无穷小生成元(可参考式(43)的推导),因此在相对平衡点处可得

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{ \delta q \in T_{q_e} Q \mid \langle \delta q, \eta_Q(q_e) \rangle = 0, \forall \eta \in \mathfrak{g}_{\mu_e} \} = \\ & \{ (\mathfrak{J}_{1,e,3} + \varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) u_{1,e,3} + (\mathfrak{J}_{2,e,3} + \varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) u_{2,e,3} = 0 \}. \end{aligned} \quad (56)$$

再根据文献[33]关于分解空间 \mathcal{V}_{RIG} 的定义即可得

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \{ \zeta_Q(q_e) \mid \zeta \in \mathfrak{g}_{\mu_e}^\perp \} = \text{span} \{ (B_{1,e} \widehat{e}_1, B_{1,e} \widehat{e}_1 B_e), (B_{1,e} \widehat{e}_2, B_{1,e} \widehat{e}_2 B_e) \}. \quad (57)$$

根据文献[21]中式(2.31)的叙述可知,在相对平衡点处,限制在空间 \mathcal{V} 上的修正势能的二次微分的正定性则隐藏着形式稳定性,即 $D^2 V_\xi(q_e) |_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} > 0$.因此,由式(45)和式(46)可得

$$\begin{aligned} D^2 V_\xi(q_e) &= -\frac{1}{2} \langle \xi_e, D^2 I_{\text{lock}}^\circ(q_e) \xi_e \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi_e, D^2 I_Y^\circ(q_e) \rangle \geq \\ & [(\mathfrak{J}_{1,e,3} - \mathfrak{J}_{1,e,2}) \xi^2 + \xi \kappa] u_{1,e,1}^2 + [(\mathfrak{J}_{1,e,3} - \mathfrak{J}_{1,e,1} + \varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) \xi^2 + \xi \kappa] u_{1,e,2}^2 + \\ & [(\mathfrak{J}_{2,e,3} - \mathfrak{J}_{2,e,2}) \xi^2] u_{2,e,1}^2 + [(\mathfrak{J}_{2,e,3} - \mathfrak{J}_{2,e,1} + \varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) \xi^2] u_{2,e,2}^2 + \\ & (\varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) \xi^2 (u_{1,e,3} - u_{2,e,3})^2 \geq \\ & \sigma_1 u_{1,e,1}^2 + \sigma_2 u_{1,e,2}^2 + \sigma_3 u_{2,e,1}^2 + \sigma_4 u_{2,e,2}^2 + \sigma_5 \xi^2 (u_{1,e,3} - u_{2,e,3})^2, \end{aligned} \quad (58)$$

式中的系数 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 分别对应于前一个不等式中各变量前的系数.具体推导过程与式(47)相似,这里将不再赘述.

同理,为了后续计算简便,这里也对式(56)中的等式做如下简化:

$$\gamma_1 u_{1,e,3} + \gamma_2 u_{2,e,3} = 0, \quad (59)$$

其中系数 γ_1, γ_2 分别对应式(56)中等式里各变量前的系数.

从而将上式代入式(58),展开得到的表达式,并收集同类项后可得限制在空间 \mathcal{V} 上的修正势能的二次微分为

$$D^2 V_\xi(q_e) |_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} \geq \sigma_1 u_{1,e,1}^2 + \sigma_2 u_{1,e,2}^2 + \sigma_3 u_{2,e,1}^2 + \sigma_4 u_{2,e,2}^2 + k_1 u_{2,e,3}^2, \quad (60)$$

式中 $k_1 = \sigma_5 (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \xi^2 / \gamma_1^2$.

综上所述,将前面各式中各相应的系数代入上式中替换对应的参数即可得到刚-液耦合航天器系统的如

下自旋稳定性条件:

$$\begin{cases} (\mathfrak{S}_{1,e,3} - \mathfrak{S}_{1,e,2})\xi^2 + \xi\kappa > 0, & (\mathfrak{S}_{1,e,3} - \mathfrak{S}_{1,e,1} + \sigma_5)\xi^2 + \xi\kappa > 0, \\ \mathfrak{S}_{2,e,3} - \mathfrak{S}_{2,e,2} > 0, & \mathfrak{S}_{2,e,3} - \mathfrak{S}_{2,e,1} + \sigma_5 > 0, & \sigma_5 > 0, \end{cases} \quad (61)$$

式中 $\sigma_5 = \varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl$, 而各惯性参数以及各约化质量可参考式(15)里的具体定义.

这里需要强调的是,假设上述等效刚-液航天器系统中仅由主刚体平台构成,那么上式中的稳定性条件即变为如下经典的刚体稳定性准则:

$$\begin{cases} J_{1,e,3} > \max(J_{1,e,1}, J_{1,e,2}), \\ J_{1,e,3} < \min(J_{1,e,1}, J_{1,e,2}), \end{cases} \quad (62)$$

此时对应于 $l = 0$. 对于仅有等效刚体摆时同理. 该刚体稳定性准则可从文献[37]中采用的保结构算法计算得到的动量球上的余伴随轨道(图8)得以清晰体现. 其中式(16)解释部分提到的辛结构^[38]是力学系统中经常讲的保结构^[39]的一种内蕴的几何结构,其可用于构造相应力学系统优异的数值迭代格式^[40-42].

为了体现该刚-液耦合系统的耦合效应对稳定性的影响,现在我们继续探讨该耦合系统的 Arnold 分块的稳定性条件,这里需要用到文献[20]中首次提出的分块对角化技术. 也即需要讨论能量-动量函数的二次微分 $D^2\tilde{H}_\xi(q_e, \xi_e)$ 在 $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \times \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ 分块上的正定性,其中分解空间 \mathcal{V}_{RIG} 的定义已在式(57)中给出. 根据文献[33]中式(2.138)定义在空间 $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \times \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ 上的 Arnold 形式与式(2.150)可知

$$\langle \text{ad}_\eta^* \mu_e, \mathbf{I}_{\text{lock}}^{-1}(q_e) \text{ad}_\eta^* \mu_e \rangle + \langle \text{ad}_\eta^* \mu_e, \text{ad}_\eta \xi \rangle = \lambda^2 (\xi_e \times \eta_e) \left(\mathbf{I}_{\text{lock}}^{-1}(q_e) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}_3 \right) (\xi_e \times \eta_e). \quad (63)$$

因此验证 $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \times \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ 分块上的正定性就等价于验证矩阵 $(\mathbf{I}_{\text{lock}}^{-1}(q_e) - (1/\lambda)\mathbf{I}_3)$ 在去掉 ξ_e 方向以外的任意方向上的正定性.

因此接下来需要计算锁定惯性并矢在相对平衡点处的具体表达式 $\mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q_e)$, 由式(46)及式(53)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q_e) = & \mathbf{B}_{1,e} \left\{ \text{diag} \left[\mathfrak{S}_{1,e,1} + \mathfrak{S}_{2,e,1}, \mathfrak{S}_{1,e,2} + \mathfrak{S}_{2,e,2} + 2(\varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl), \right. \right. \\ & \left. \left. \mathfrak{S}_{1,e,3} + \mathfrak{S}_{2,e,3} + 2(\varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) \right] \right\} \mathbf{B}_{1,e}^T. \end{aligned} \quad (64)$$

结合文献[33]中的式(2.142)以及本文中的式(54),即可得到

$$\lambda_e = \frac{\mu_e}{\xi_e} = \mathfrak{S}_{1,e,3} + \mathfrak{S}_{2,e,3} + 2(\varepsilon_c dl - \varepsilon_a hl) + \frac{\kappa}{\xi}. \quad (65)$$

从而结合上面两式即可得到式(63)中的矩阵表达形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\text{lock}}^{-1}(q_e) - \frac{1}{\lambda_e} \mathbf{I}_3 = & \\ & \mathbf{B}_{1,e} \left\{ \text{diag} \left[\frac{1}{\mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q_e)(1,1)} - \frac{1}{\lambda_e}, \frac{1}{\mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q_e)(2,2)} - \frac{1}{\lambda_e}, \frac{1}{\mathbf{I}_{\text{lock}}^\circ(q_e)(3,3)} - \frac{1}{\lambda_e} \right] \right\} \mathbf{B}_{1,e}^T. \end{aligned} \quad (66)$$

由于耦合系统的空间旋转角速度 ξ 旋转轴与 e_3 轴的方向相同,从而应将上式中的主对角线上的第三项去掉. 因此该耦合系统的稳定性就等价于要求上式由剩下的项构成的矩阵是正定的,即要求主对角线上的第一项以及第二项要同时大于零. 再将式(64)和式(65)代入上式,即可得到刚-液耦合系统的如下 Arnold 形式的稳定性条件:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{1,e,1} - \mathfrak{S}_{1,e,3} + \mathfrak{S}_{2,e,1} - \mathfrak{S}_{2,e,3} - 2\sigma_5 < \frac{\kappa}{\xi}, \\ \mathfrak{S}_{1,e,2} - \mathfrak{S}_{1,e,3} + \mathfrak{S}_{2,e,2} - \mathfrak{S}_{2,e,3} < \frac{\kappa}{\xi}. \end{cases} \quad (67)$$

通过与式(61)对比容易发现,该 Arnold 形式的稳定性条件包含在式(61)中表述的稳定性条件中. 该稳定性条件不能保证系统的稳定性,即不能保证式(61)中的稳定性条件成立. 因此,对于刚-液耦合航天器系统的稳定性分析,不能将耦合系统的运动视为一个整体刚性运动,必须考虑耦合效应对稳定性的影响.

2.3 稳定性的数值仿真

根据 2.2 小节中式(61)给出的刚-液耦合航天器系统的自旋稳定性条件,本小节将采用图形的方式来体现该系统在具体参数下的稳定域. 这里将液体推进剂的非线性晃动行为通过一个高度与半径相等的等体积

圆柱体来等效,如图 1 所示。

模型中各参数的具体数值设置如下,其中部分参数引自文献[23],部分数据通过文献[1]中(P48)给出的经验公式而得

$$\begin{cases} m_1 = 120 \text{ kg}, \mathbf{J}_1 = \text{diag}[20, 20, 40] \text{ kg} \cdot \text{m}^2, m_d = 10 \text{ kg}, \\ \mathbf{J}_d = \text{diag}[0.15, 0.15, 0.2] \text{ kg} \cdot \text{m}^2, d = 0.0506 \text{ m}, h = 0.0649 \text{ m}, \\ l = 0.1314 \text{ m}, \rho_L = 1.032 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^3, p_r = p_h = 0.23 \text{ m}, \end{cases} \quad (68)$$

式中, ρ_L 表示液体推进剂的质量密度, p_r 与 p_h 分别表示圆柱储腔的半径与高度。式中的坐标系如式(53)所示。此外,液体燃料的晃动部分与“冻结”部分的质量满足:它们的质心与刚体平台的质心重合。

由式(61)可知,耦合系统的稳定性主要受液体推进剂的充液比 Ξ 、系统的空间旋转角速度 ω_s 以及动量轮转速 ω_ϕ 的影响,仿真后的稳定域如图 2 中的阴影区域所示。

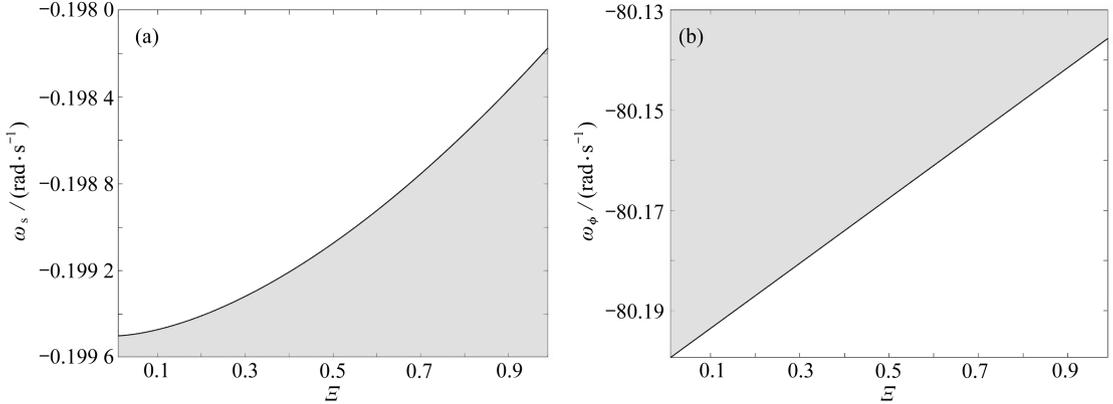


图 2 刚-液耦合航天器系统的稳定域

Fig. 2 Stability regions of the rigid-liquid coupled spacecraft system

图 2(a) 是系统充液比与系统自旋角速度的关系,它由式(67) Arnold 形式的稳定性条件绘制而得。由此可看出,随着充液比的逐渐增加,系统临界自旋角速度是逐渐增大的,即可允许的自旋角速度空间是逐渐增大的。同理,将式(68)中的系统参数代入式(61)绘制而得的稳定性边界为一带状区域 $\omega_s \leq 1 \text{ rad/s}$,通过与图 2(a) 中的临界值进行比较可知,这也再次验证了 Arnold 形式的稳定性条件是包含在式(61)中的稳定性条件中的。而图 2(b) 是系统充液比与转子角速度的关系,由图可知,只要转子角速度在图中曲线之上系统均是稳定的,或者说在不同充液比条件下转子需要满足的最小转速。

3 结 论

本文从几何力学角度出发,针对刚-液耦合航天器系统的 3D 刚体摆等效力学模型的动力学问题,系统推导了该等效模型的 Hamilton 结构,详细研究了系统的自旋稳定性特征。论文首先介绍了系统的平移不变性约化和旋转不变性约化,根据正则 Poisson 括号推导了该刚-液耦合航天器系统在约化空间上的约化 Poisson 括号形式的动力学方程。接着根据对称临界原理推导了该系统的相对平衡态,并且发现在平衡态条件下:悬挂点矢量、摆杆矢量和系统自旋角速度三者空间上是共面的特性,且该特性与陀螺项无关。在平衡点条件下,根据能量-动量方法和分块对角化技术推导了系统的自旋稳定性条件与 Arnold 形式的稳定性边界,并由此可清晰地看到耦合效应对稳定性的影响。最后以图形的方式给出了具体模型参数下的自旋稳定域。

参考文献(References):

- [1] DODGE F T. The new “dynamic behavior of liquids in moving containers” [R]. San Antonio, TX, USA: Southwest Research Institute, 2000.
- [2] IBRAHIM R A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [3] KANA D D. Validated spherical pendulum model for rotary liquid slosh [J]. *Journal of Spacecraft and Rock-*

- ets, 1989, **26**(3): 188-195.
- [4] KANG J Y, LEE S. Attitude acquisition of a satellite with a partially filled liquid tank[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(3): 790-793.
- [5] MIAO N, LI J F, WANG T S. Equivalent mechanical model of large-amplitude liquid sloshing under time-dependent lateral excitations in low-gravity conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, **386**: 421-432.
- [6] YUE B Z. Study on the chaotic dynamics in attitude maneuver of liquid-filled flexible spacecraft[J]. *AIAA Journal*, 2011, **49**(10): 2090-2099.
- [7] 邓明乐. 液体大幅晃动等效力学模型及航天器刚-液-柔-控耦合动力学研究[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 2017.(DENG Mingle. Studies on the equivalent mechanical model of large amplitude liquid slosh and rigid-liquid-flex-control coupling dynamics of spacecraft[D]. PhD Thesis. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017.(in Chinese))
- [8] TANG Y, YUE B Z. Simulation of large-amplitude three-dimensional liquid sloshing in spherical tanks[J]. *AIAA Journal*, 2017, **55**(6): 2052-2059.
- [9] 刘峰. 液体非线性晃动类柔性航天器大范围运动动力学与姿态控制研究[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 2020.(LIU Feng. Studies on large motion dynamics and attitude control of flexible spacecraft with nonlinear liquid slosh[D]. PhD Thesis. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2020.(in Chinese))
- [10] LIU F, YUE B Z, TANG Y, et al. 3DOF-rigid-pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **460**: 114907.
- [11] ABRAHAM R, MARSDEN J E. *Foundations of Mechanics*[M]. New York: Addison-Wesley, 1978.
- [12] MARSDEN J E, RATIU T S. *Introduction to Mechanics and Symmetry: a Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*[M]. New York: Springer, 1998.
- [13] HOLM D D, MARSDEN J E, RATIU T, et al. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria[J]. *Physics Reports*, 1985, **123**(1/2): 1-116.
- [14] KRISHNAPRASAD P S, MARSDEN J E. Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1987, **98**(1): 71-93.
- [15] OZKAZANC Y. Dynamics and stability of spacecraft with fluid-filled containers[D]. PhD Thesis. MD, USA: University of Maryland, 1994.
- [16] ARDAKANI H A, BRIDGES T J, GAY-BALMAZ F, et al. A variational principle for fluid sloshing with vorticity, dynamically coupled to vessel motion [J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2019, **475**(2224): 20180642.
- [17] GASBARRI P, SABATINI M, PISCUCCI A. Dynamic modelling and stability parametric analysis of a flexible spacecraft with fuel slosh[J]. *Acta Astronautica*, 2016, **127**: 141-159.
- [18] SALMAN A, YUE B Z. Bifurcation and stability analysis of the Hamiltonian-Casimir model of liquid sloshing [J]. *Chinese Physics Letters*, 2012, **29**(6): 060501.
- [19] 闫玉龙. 航天器刚液柔耦合动力学及姿态稳定性研究[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 2017.(YAN Yulong. Study on dynamics and attitude stability of the rigid-liquid-flex coupling spacecraft system[D]. PhD Thesis. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017.(in Chinese))
- [20] SIMO J C, POSBERGH T A, MARSDEN J E. Stability of coupled rigid body and geometrically exact rods: block diagonalization and the energy-momentum method[J]. *Physics Reports*, 1990, **193**(6): 279-360.
- [21] SIMO J C, LEWIS D, MARSDEN J E. Stability of relative equilibria, part I: the reduced energy-momentum method[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1991, **115**(1): 15-59.
- [22] SIMO J C, POSBERGH T A, MARSDEN J E. Stability of relative equilibria, part II: application to nonlinear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1991, **115**(1): 61-100.
- [23] YI Z G, YUE B Z. Study on the dynamics, relative equilibria, and stability for liquid-filled spacecraft with flexible appendage[J]. *Acta Mechanica*, 2022, **233**(9): 3557-3578.
- [24] ABRAMSON H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology: NASA-SP-106[R]. San Antonio, TX, USA: Southwest Research Institute, 1966.
- [25] GROSSMAN R, KRISHNAPRASAD P S, MARSDEN J E. The dynamics of two coupled rigid bodies[J]. *Dynamical Systems Approaches to Nonlinear Problems in Systems and Circuits*, 1987, **1988**: 373-378.

- [26] KRISHNAPRASAD P. Lie-Poisson structures, dual-spin spacecraft and asymptotic stability[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1985, **9**(10): 1011-1035.
- [27] OH Y G, SREENATH N, KRISHNAPRASAD P, et al. The dynamics of coupled planar rigid bodies II: bifurcations, periodic solutions, and chaos[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1989, **1**(3): 269-298.
- [28] SREENATH N, OH Y G, KRISHNAPRASAD P, et al. The dynamics of coupled planar rigid bodies, part I: reduction, equilibria and stability[J]. *Dynamics and Stability of Systems*, 1988, **3**(1/2): 25-49.
- [29] WANG LISHENG, KRISHNAPRASAD P S. Gyroscopic control and stabilization[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 1992, **2**(4): 367-415.
- [30] GE X S, YI Z G, CHEN L Q. Optimal control of attitude for coupled-rigid-body spacecraft via Chebyshev-Gauss pseudospectral method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1257-1272.
- [31] MARSDEN J E, WEINSTEIN A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry[J]. *Reports on Mathematical Physics*, 1974, **5**(1): 121-130.
- [32] MARSDEN J E, RATIU T. Reduction of Poisson manifolds[J]. *Letters in Mathematical Physics*, 1986, **11**(2): 161-169.
- [33] 易中贵. 几何力学建模和谱方法离散及航天工程应用[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 2022. (YI Zhonggui. Geometric mechanics modeling and spectral methods discretization and aerospace engineering applications[D]. PhD Thesis. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2022. (in Chinese))
- [34] SHI D H, ZENKOV D V, BLOCH A M. Hamel's formalism for classical field theories[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2020, **30**(1): 1307-1353.
- [35] SIMO J C, MARSDEN J E, KRISHNAPRASAD P. The Hamiltonian structure of nonlinear elasticity: the material and convective representations of solids, rods, and plates[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1988, **104**(2): 125-183.
- [36] POSBERGH T A, KRISHNAPRASAD P S, MARSDEN J E. Stability analysis of a rigid body with a flexible attachment using the energy-Casimir method: SRC-TR-87-23[R]. MD, USA: University of Maryland, 1987.
- [37] YI Z G, YUE B Z, DENG M. Hamilton-Pontryagin spectral-collocation methods for the orbit propagation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, **37**(11): 1698-1715.
- [38] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003. (FENG Kang, QIN Mengzhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems* [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [39] 高山, 史东华, 郭永新. Hamel 框架下几何精确梁的离散动量守恒律[J]. 力学学报, 2021, **53**(6): 1712-1719. (GAO Shan, SHI Donghua, GUO Yongxin. Discrete momentum conservation law of geometrically exact beam in Hamel's framework[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(6): 1712-1719. (in Chinese))
- [40] 满淑敏, 高强, 钟万勰. 非完整约束 Hamilton 动力系统保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(6): 581-590. (MAN Shumin, GAO Qiang, ZHONG Wanxie. A structure-preserving algorithm for Hamiltonian systems with nonholonomic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 581-590. (in Chinese))
- [41] 刘晓梅, 周钢, 朱帅. Hamilton 系统下基于相位误差的精细辛算法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 595-608. (LIU Xiaomei, ZHOU Gang, ZHU Shuai. A highly precise symplectic direct integration method based on phase errors for Hamiltonian systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 595-608. (in Chinese))
- [42] 张素英, 邓子辰. Poisson 流形上广义 Hamilton 系统的保结构算法[J]. 西北工业大学学报, 2002, **20**(4): 625-628. (ZHANG Suying, DENG Zichen. An algorithm for preserving the generalized Poisson bracket structure of generalized Hamiltonian system[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2002, **20**(4): 625-628. (in Chinese))