

基于稀疏 Bayes 学习算法的无约束结构 荷载重构方法*

陈先智¹, 周新元¹, 曾耀祥², 张亚辉¹

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

(本刊编委张亚辉来稿)

摘要: 为快速准确重构含有未知初始条件的无约束结构外激励, 提出了一种基于稀疏 Bayes 学习算法的荷载重构方法. 结合函数拟合的思想建立控制方程, 以噪声服从 Gauss 分布为先验, 在 Bayes 模型中使用快速算法, 稀疏重构未知荷载. 为合理表达分段拟合中的初始条件, 提出了改进的分段拟合手段, 以上一分段末状态响应作为可能初始条件, 并辅以低阶振型作为初始位移和初始速度的补充. 算例以简化运载火箭模型为研究对象, 考虑不同等级噪声和不同初始条件表达形式的影响, 验证方法的精度和效率.

关键词: 函数拟合; 稀疏 Bayes 学习算法; 改进分段拟合; 荷载重构

中图分类号: O32 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430336

An Unconstrained Structural Dynamic Load Reconstruction Method Based on the Sparse Bayesian Learning Algorithm

CHEN Xianzhi¹, ZHOU Xinyuan¹, ZENG Yaoxiang², ZHANG Yahui¹

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

2. *Beijing Institute of Astronautical System Engineering, Beijing 100076, P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Yahui, M.AMM Editorial Board)

Abstract: For rapid and exact reconstruction of dynamic loads on unconstrained structures with unknown initial conditions, a dynamic load reconstruction method was proposed based on the sparse Bayesian learning algorithm. With the idea of the function fitting technique, the control equations were built. The noise was assumed to obey the Gaussian distribution, and the fast algorithm was used in the sparse Bayesian learning model. An improved piecewise fitting method was formulated to rationally express the initial conditions in the piecewise fitting, the end state response of the previous segment was used as the possible initial condition, and the

* 收稿日期: 2022-10-24; 修订日期: 2022-11-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(12032008)

作者简介: 陈先智(1996—), 男, 硕士生(E-mail: xianzhichen@mail.dlut.edu.cn);

周新元(1995—), 男, 博士生(E-mail: zxy9501@mail.dlut.edu.cn);

曾耀祥(1987—), 男, 高级工程师(E-mail: zengyaoxiang01@163.com);

张亚辉(1972—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: zhangyh@dlut.edu.cn).

引用格式: 陈先智, 周新元, 曾耀祥, 张亚辉. 基于稀疏 Bayes 学习算法的无约束结构荷载重构方法[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(8): 931-943.

low-order vibration modes were applied as the supplement to the initial displacements and initial velocities. The numerical simulations of simplified launch vehicle models prove the accuracy and efficiency of the proposed method, under the effects of different noise levels and different expressions of initial conditions.

Key words: function fitting; sparse Bayesian learning algorithm; modified piecewise fitting; load reconstruction

0 引言

随着航空航天技术的快速发展,对运载火箭的优化设计也提出了更高的要求,准确描述其自由运行过程中的外激励,是结构优化设计的一个重要方面.火箭在运行过程中,外激励通过传感器直接测量往往比较困难,在此背景下,发展通过响应信息间接获取外部激励的荷载重构方法有着重要意义.

随着荷载重构方法的发展,其不适应性引起了许多学者的关注,而正则化理论被广泛应用于解决各种不适应性问题的^[1-3].彭凡等^[4]使用 Green 函数构建荷载和响应之间的关系,引入奇异值分解(SVD)改善矩阵病态,进而重构了自由结构的冲击荷载.周琦等^[5]综合利用结构的位移模态和应变模态参数实现了应变到位移的转换,避免了空间积分,反求出位移响应后,结合扩展 Tikhonov 正则化实现了基于应变响应的自由体荷载识别.Liu 等^[6]组合 Tikhonov 正则化和截断广义奇异值分解(TGSVD),综合两者的优点,成功识别了动力荷载.Qiao 等^[7]采用三次 B 样条函数结合截断奇异值分解法(TSVD),解决了冲击荷载识别问题.张超东和黎剑安^[8]利用 Kalman 滤波算法获得了增秩状态向量的最小方差无偏估计,实现了状态和荷载向量的同时识别.

由于 l_2 正则化存在过拟合的现象^[9],因此近几年有学者通过稀疏正则化改善这一现象.稀疏正则化所对应的问题为 l_0 正则化,在数学上是难以求解的,一般凸释为 l_1 正则化求解.Qiao 等^[10]使用字典建立识别方程,并采用可分离近似法(SpaRSA)重构荷载.由于字典质量对识别结果有影响,Zhang 等^[11]使用双稀疏字典学习改善字典的质量,进而改善了识别结果.Liu 和 Li^[12]使用盲源分离(BSS)算法结合正交基追踪算法(OMP),等效识别了时空耦合的分布荷载.Samagassi 等^[13]使用纵向应变响应在低噪声情况下结合小波相关矢量机(WRVM)稀疏重构了冲击荷载.Yan 和 Sun^[14]通过脉冲响应函数建立荷载与响应的关系,利用冲击荷载的稀疏特性,使用非负 Bayes 学习算法识别了冲击荷载.

针对大维度荷载重构问题时,其计算成本会变得非常大,因此一般常用的手段为分段拟合.对于线性时不变系统而言,结构响应由初始条件引起的自由振动和荷载引起的强迫振动线性叠加而成,而各分段的初始条件难以通过测量得到,因此分段拟合最重要的是如何合理表达未知初始条件.Prawin 和 Rama Mohan Rao^[15]表达初始条件的连续递推公式受噪声影响较大,且有误差累积和不稳定现象.张开华^[16]假设初始条件为上一段重构荷载作用下结构末状态的响应,但是仅选取末状态响应作为初始条件,会导致重构精度严重依赖上一步重构结果.考虑到对于一个多自由度系统而言,在外力作用时,通常只会激起一些较低的振型,大部分高阶振型被激起的分量很小,一般可忽略不计.Pan 等^[17]用低阶振型表示初始条件,使用快速软阈值迭代算法(FIST)结合 Bayes 信息准则(BIC)成功识别了未知初始条件下的荷载,但是识别效率较低.在此基础上,Pan 等^[18]采用矩阵正则化构建长时间荷载改善了识别效率,为进一步提高效率,利用各分段可以单独重构的特点,使用并行算法同时重构所有分段荷载^[19],但是忽略了各分段之间的联系,不能充分利用上一段的重构结果.为了能高效处理含有未知初始条件与大维度荷载重构的问题,在现有文献基础上,本文提出利用线性系统的叠加原理,将荷载使用三角基函数拟合,分别求解了所有荷载基函数作用下的强迫振动响应和低阶振型,作为初始位移、初始速度的自由振动响应,直接使用稀疏 Bayes 学习(SBL)算法的快速算法^[20-21]对未知分解系数进行求解.提出了改进分段拟合的思想,将上一分段求解得到的荷载作用在结构上,产生的末状态响应作为可能初始条件,并使用低阶振型做补充,通过不断更新的系数矩阵,高效完成了大维度荷载重构问题.

1 重构方程的建立

对于自由度为 n 的结构体而言,其运动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 分别为结构的质量阵、阻尼阵、刚度阵, $\ddot{\mathbf{X}}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{X}(t)$ 分别为结构的加速度向量、速度向量、位移向量, $\mathbf{F}(t)$ 是结构外荷载向量。

假设阻尼为比例阻尼, 令 $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{u}$, 将其代入式(1), 并前乘 Φ^T , 根据振型的正交性, 假设模态截断数为 q , 式(1)可解耦为

$$\ddot{u}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_i(t) + \omega_i^2 u_i(t) = \Phi_i^T \mathbf{F}(t) = p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2)$$

式中 $\ddot{u}_i(t), \dot{u}_i(t), u_i(t)$ 分别对应第 i 阶模态加速度、模态速度、模态位移, ξ_i, ω_i 分别对应第 i 阶阻尼比和自振圆频率, Φ_i 为第 i 阶质量归一化振型, “T” 表示转置, $p_i(t)$ 为第 i 阶模态荷载。

对于线性系统而言, 含初始条件的结构响应可以分解为无初始条件强迫振动响应和有初始条件自由振动响应, 因此可以先建立无初始条件的响应-荷载关系, 由 Duhamel 积分可知, 式(2)的模态加速度响应^[22]为

$$\ddot{u}_i(t) = p_i(t) + \int_0^t p_i(\tau) \ddot{h}_i(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

式中 $\ddot{h}_i(t) = \frac{1}{\omega_i^\varepsilon} e^{-\xi_i \omega_i t} \{ [(\xi_i \omega_i)^2 - (\omega_i^\varepsilon)^2] \sin(\omega_i^\varepsilon t) + (-2\xi_i \omega_i \omega_i^\varepsilon) \cos(\omega_i^\varepsilon t) \}$, $\omega_i^\varepsilon = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$. 将式(3)在时间域上离散, 得

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{p}_i, \quad (4)$$

式中 $\ddot{\mathbf{u}}_i = [\ddot{u}_i(t_1), \ddot{u}_i(t_2), \dots, \ddot{u}_i(t_{N_t})]^T$, $\mathbf{p}_i = [p_i(t_1), p_i(t_2), \dots, p_i(t_{N_t})]^T$, $[t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{N_t}]$ 表示间隔为 Δt 的时间序列, N_t 表示离散的时刻点数,

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t \ddot{h}_i(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ \Delta t \ddot{h}_i(t_1) & 1 + \Delta t \ddot{h}_i(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta t \ddot{h}_i(t_{N_t-1}) & \Delta t \ddot{h}_i(t_{N_t-2}) & \dots & 1 + \Delta t \ddot{h}_i(t_0) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

假设结构上作用有 N_f 个荷载, 测点有 N_m 个, 由于是线性系统, 那么 N_f 个荷载作用下的结构响应可以分解为每个荷载单独作用下的响应之和. 令 \mathbf{f}_k 为第 k 个荷载 ($k = 1, 2, \dots, N_f$) 作用在自由度 l_k 的荷载, 则其相应的模态荷载 \mathbf{p}_{ik} 可表示为

$$\mathbf{p}_{ik} = \phi_{il_k} \mathbf{f}_k, \quad (6)$$

式中 ϕ_{il_k} 表示第 i 阶模态中自由度为 l_k 处的值, $\mathbf{f}_k = [f_k(t_1) \ f_k(t_2) \ \dots \ f_k(t_{N_t})]^T$.

将式(6)代入式(4)得到第 i 阶模态加速度为

$$\mathbf{u}_{ik} = \mathbf{H}_{il_k} \mathbf{f}_k, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{H}_{il_k} = \phi_{il_k} \mathbf{h}_i$. 当不考虑噪声影响的情况下, 由振型分解法可得当 \mathbf{f}_k 单独作用时, 第 j 个测点的加速度响应为

$$\ddot{\mathbf{x}}_{jk} = \sum_{i=1}^q \mathbf{u}_{ik} \phi_{i, m_j} = \mathbf{G}_{m_j l_k} \mathbf{f}_k, \quad (8)$$

式中 $\mathbf{G}_{m_j l_k} = \sum_{i=1}^q \phi_{im_j} \mathbf{H}_{il_k}$, m_j 表示第 j 个测点对应的自由度编号。

在荷载重构领域中, 由于通过函数拟合可以改善求解时矩阵的性态, 故一般将荷载函数通过一系列的正交基函数近似展开, 因此 $f_k(t)$ 可表达为

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{n_b} y_{nk} f_{nk}^b(t), \quad (9)$$

式中 n_b 为基函数的个数; y_{nk} 表示基函数的系数; $f_{nk}^b(t)$ 表示 $f_k(t)$ 的第 n 组基函数, 本文采用三角基函数, 其表达式为

$$f_{nk}^b(t) = \begin{cases} \cos[\Delta\omega(n-1)\pi t], & n \text{ is odd,} \\ \sin(\Delta\omega n\pi t), & n \text{ is even,} \end{cases} \quad n \in \{1, 2, \dots, n_b\}, \quad (10)$$

式中 odd 表示奇数, even 表示偶数, $\Delta\omega$ 表示频率间隔, n_b 和 $\Delta\omega$ 可根据响应的频谱和所关心频率综合估算。

对式(9)在时域离散,并代入式(8),得

$$\ddot{\mathbf{x}}_{jk} = \mathbf{G}_{m_j k} \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{a}_{jk} \mathbf{y}_k, \quad (11)$$

称 $\mathbf{a}_{jk} = \mathbf{G}_{m_j k} \mathbf{B}_k$ 为元胞,表示当全体荷载基函数分别作用在加载点 k 时,测点 j 响应的集合,式中 $\mathbf{y}_k = [y_{1k} \ y_{2k} \ \cdots \ y_{n_{jk}}]^T$,

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} f_{1k}^b(t_0) & f_{2k}^b(t_0) & \cdots & f_{n_{jk}}^b(t_0) \\ f_{1k}^b(t_1) & f_{2k}^b(t_1) & \cdots & f_{n_{jk}}^b(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1k}^b(t_{N_f-1}) & f_{2k}^b(t_{N_f-1}) & \cdots & f_{n_{jk}}^b(t_{N_f-1}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据叠加原理,测点响应与未知系数的关系为

$$\ddot{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{N_f} \ddot{\mathbf{X}}_k = \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad (13)$$

式中 $\ddot{\mathbf{X}}_k = [\ddot{\mathbf{x}}_{1k}^T \ \ddot{\mathbf{x}}_{2k}^T \ \cdots \ \ddot{\mathbf{x}}_{N_m k}^T]^T$ 表示当仅有荷载 f_k 作用在结构上时,测点响应组成的向量; $\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{\mathbf{x}}_1^T \ \ddot{\mathbf{x}}_2^T \ \cdots \ \ddot{\mathbf{x}}_{N_m}^T]^T$ 表示当 N_f 个荷载同时作用在结构上时,测点响应组成的向量; $\ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{k=1}^{N_f} \ddot{\mathbf{x}}_{jk}$ 表示其中第 j 个测点的响应; $\mathbf{y} = [y_1^T \ y_2^T \ \cdots \ y_{N_f}^T]^T$ 为待求的系数向量;本文称由元胞 \mathbf{a}_{jk} 组成的矩阵为系数矩阵 \mathbf{A} ,其表达式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1N_f} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2N_f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{N_m 1} & \mathbf{a}_{N_m 2} & \cdots & \mathbf{a}_{N_m N_f} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

测量响应一般含有噪声,因此式(13)可以改写为

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (15)$$

式中 $\ddot{\mathbf{x}}$ 是测量加速度数据向量, $\boldsymbol{\epsilon}$ 是与未知噪声有关的向量。

至此建立了已知测点响应和未知系数之间的关系.由于未知噪声 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的存在,直接通过对系数矩阵 \mathbf{A} 求逆,解未知系数 \mathbf{y} ,往往会导致较大的误差,因此本文使用 SBL 算法求解未知系数 \mathbf{y} ,并用式(9)对荷载进行重构.

2 稀疏 Bayes 学习算法推导

在 Bayes 模型中,误差被概率性的建模为零均值 Gauss 分布,方差为 σ^2 ^[20].本文假设噪声项 $\boldsymbol{\epsilon}$ 服从 $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, \mathbf{I} 表示单位阵,方差 σ^2 从数据中估计得出,则 $\ddot{\mathbf{x}}$ 的似然函数为

$$p(\ddot{\mathbf{x}} | \mathbf{y}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^N \exp \left(- \frac{(\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \mathbf{y})^T (\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \mathbf{y})}{2\sigma^2} \right), \quad (16)$$

式中 $N = N_f \times N_m$.

为了得到稀疏解,假设存在超参 γ_i , \mathbf{y} 中元素 y_i 的均值为 0,方差为 $1/\gamma_i$.那么 \mathbf{y} 的先验表示为

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\gamma}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^M \prod_{i=1}^M \gamma_i^{1/2} e^{-y_i^T \gamma_i / 2}, \quad (17)$$

式中 $M = N_f \times n_b$, $\boldsymbol{\gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_M)$.

边缘似然 $p(\ddot{\mathbf{x}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma^2)$ 可以通过 $\ddot{\mathbf{x}}$ 的似然和 \mathbf{y} 的先验积分得到

$$p(\ddot{\mathbf{x}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma^2) = \int p(\ddot{\mathbf{x}} | \mathbf{y}, \sigma^2) p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{y} = (2\pi)^{-N/2} |\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{A}^T|^{-1/2} \exp(-\ddot{\mathbf{x}}^T (\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \ddot{\mathbf{x}} / 2). \quad (18)$$

由 Bayes 公式,可以得到 \mathbf{y} 的后验:

$$p(\mathbf{y} | \ddot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\gamma}, \sigma^2) = \frac{p(\ddot{\mathbf{x}} | \mathbf{y}, \sigma^2)p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\gamma})}{p(\ddot{\mathbf{x}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma^2)} = (2\pi)^{-M/2} |\boldsymbol{\Sigma}_y|^{-1/2} e^{-(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_y)^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_y)/2}, \quad (19)$$

式中

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = (\sigma^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\gamma})^{-1}, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\mu}_y = \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_y \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{x}}, \quad (21)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 和 $\boldsymbol{\mu}_y$ 分别表示 \mathbf{y} 的方差和均值. 计算出 \mathbf{y} 的均值 $\boldsymbol{\mu}_y$ 后, 此时 $\boldsymbol{\mu}_y$ 即为所求基底系数, 结合式(9)即可重构荷载. 为快速确定未知的参数 σ^2 和超参 $\boldsymbol{\gamma}$, 使用文献[21]中的快速算法.

3 未知初始条件的处理

采用较小的时间间隔能提高荷载重构的精度, 但这也会导致更大的预处理成本. 为了提高预处理的效率往往会将测量响应分成多个沿时间轴移动的分段, 荷载按顺序在每个分段单元重构, 分段示意图如图 1 所示.

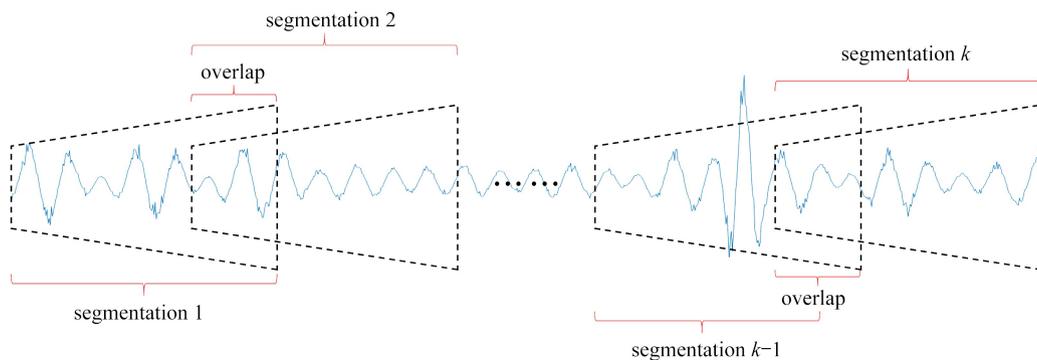


图 1 分段重叠拟合

Fig. 1 Piecewise overlap fitting

为合理表达每个分段的初始条件, 本文结合 SBL 算法的稀疏特性, 提出改进分段拟合思想, 其选用末状态响应作为可能初始条件, 由于可能的初始条件与真实的初始条件有差异, 因此引入低阶振型作为初始条件的补充.

一方面, 当完成上一分段计算后, 通过重构荷载计算结构的响应, 并以最后一个时刻点的响应作为可能初始条件. 另一方面, 引入补充初始位移和补充初始速度, 其表达式分别为 $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \sum_{s=1}^Q \boldsymbol{\Phi}_s y_s^{y_1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0 = \sum_{s=1}^Q \boldsymbol{\Phi}_s y_s^{y_2}$, 其中 $y_s^{y_1}$ 表示与补充初始位移相关的列向量系数, $y_s^{y_2}$ 表示与补充初始速度相关的列向量系数. 则由补充初始条件为 $\tilde{\mathbf{x}}_0$ 与 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0$ 引起的第 j 个测点自由振动响应可以近似表达为

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_j^y = \sum_{s=1}^Q \mathbf{d}_{js} y_s^{y_1} + \sum_{s=1}^Q \mathbf{v}_{js} y_s^{y_2}, \quad (22)$$

式中 \mathbf{d}_{js} 表示初始位移向量仅为 $\boldsymbol{\Phi}_s$ 时, 引起的第 j 个测点自由振动的加速度响应; \mathbf{v}_{js} 表示初始速度向量仅为 $\boldsymbol{\Phi}_s$ 时, 引起的第 j 个测点自由振动的加速度响应; Q 为选取参与组合初始条件模态的数量, 本文选取前 50 阶弹性模态.

将初始条件使用上一分段的末状态响应和补充初始条件表示, 则第 j 个测点的加速度响应可以近似表示为

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_j = \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{a}_{jk} \mathbf{y}_j + \mathbf{a}_j^{y_1} \mathbf{y}^{y_1} + \mathbf{a}_j^{y_2} \mathbf{y}^{y_2} + \mathbf{a}_j^s \mathbf{y}^s, \quad (23)$$

式中 $\mathbf{a}_j^{y_1} = [\mathbf{d}_{j1} \quad \mathbf{d}_{j2} \quad \cdots \quad \mathbf{d}_{jQ}]$, $\mathbf{y}^{y_1} = [y_1^{y_1} \quad y_2^{y_1} \quad \cdots \quad y_Q^{y_1}]^T$ 表示相应的系数; $\mathbf{a}_j^{y_2} = [\mathbf{v}_{j1} \quad \mathbf{v}_{j2} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{jQ}]$, $\mathbf{y}^{y_2} = [y_1^{y_2} \quad y_2^{y_2} \quad \cdots \quad y_Q^{y_2}]^T$ 表示相应的系数; \mathbf{a}_j^s 表示通过上一分段重构荷载计算的初始状态引起第 j 个测点的响应元胞, 每一分段的计算都需对其进行更新, \mathbf{y}^s 表示相应的系数. 式(15)中系数矩阵 \mathbf{A} 改写为如下形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1N_f} & \mathbf{a}_1^{Y_1} & \mathbf{a}_1^{Y_2} & \mathbf{a}_1^S \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N_m 1} & \cdots & \mathbf{a}_{N_m N_f} & \mathbf{a}_{N_m}^{Y_1} & \mathbf{a}_{N_m}^{Y_2} & \mathbf{a}_{N_m}^S \end{bmatrix}. \quad (24)$$

显然,当响应为第一个分段含有未知初始条件时,由于不存在上一分段末状态,因此,初始条件使用式(22)表示,即删除式(24)中与可能初始条件 $\mathbf{a}_j^S(j=1,2,\dots,N_m)$ 相关的单元.本文所提方法的流程如图2所示.

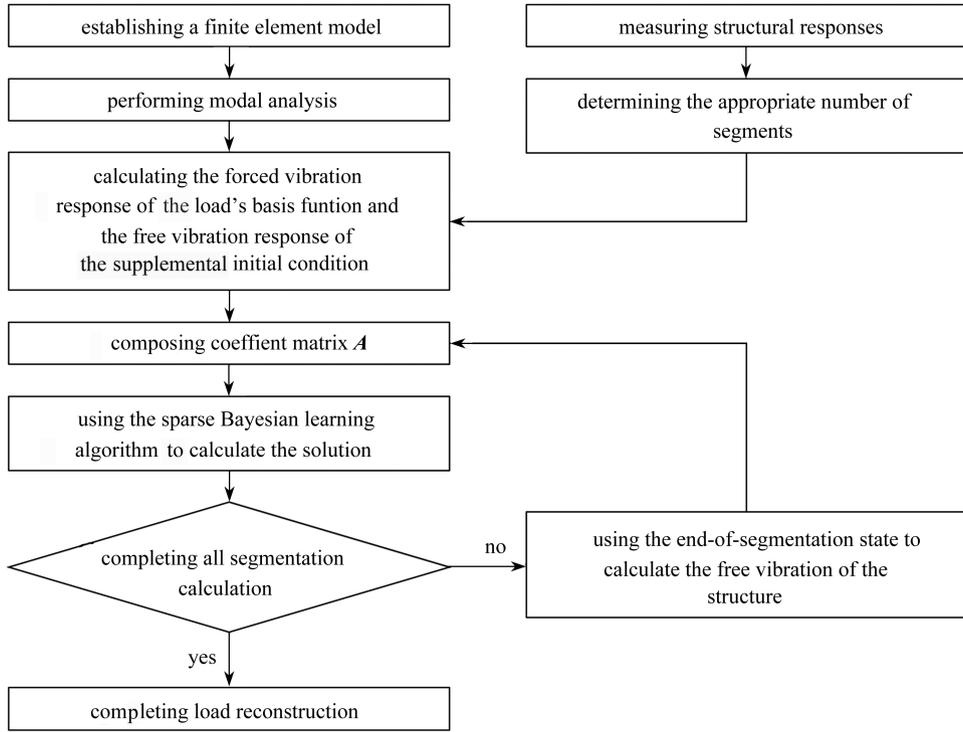


图2 所提方法荷载重构流程图

Fig. 2 The flowchart of the proposed method for load reconstruction

4 无约束结构的处理

火箭在自由飞行的过程中是一种无约束结构,这种结构存在刚体运动,而传感器测量的响应为结构的弹性响应,因此需要剔除结构运动中的刚体运动成分.于是将结构响应分解为刚体响应和弹性响应:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{X}}_R + \ddot{\mathbf{X}}_E, \quad (25a)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_R = \sum_{i=1}^{N_R} \Phi_i \ddot{u}_i, \quad (25b)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_E = \sum_{i=N_R+1}^q \Phi_i \ddot{u}_i, \quad (25c)$$

式中 \mathbf{X}_R 表示结构的刚体响应, \mathbf{X}_E 表示结构的弹性响应, N_R 表示刚体模态的数量.因此在基函数 f_{ik}^b 作用下,结构的弹性响应可以通过仅求解式(2)中 $N_R + 1$ 及其以后的模态加速度,并代入式(25c)求得,使用其组建的系数矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$,进一步得无约束结构的荷载重构控制方程:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (26)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{11} & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{1N_f} & \bar{\mathbf{a}}_1^{Y_1} & \bar{\mathbf{a}}_1^{Y_2} & \bar{\mathbf{a}}_1^S \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_{N_m 1} & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_{N_m N_f} & \bar{\mathbf{a}}_{N_m}^{Y_1} & \bar{\mathbf{a}}_{N_m}^{Y_2} & \bar{\mathbf{a}}_{N_m}^S \end{bmatrix}, \quad (27)$$

式中 $(\bar{\cdot})$ 表示结构的弹性响应.通过第 2 节所提方法求解式(26)即可重构荷载.

5 数值算例验证

本文采用文献[23]中的模拟无约束火箭模型,模型的直径为 3 m,壁厚为 0.005 m,长 50 m,101 个节点分成 100 个单元,相邻节点间隔为 0.5 m,弹性模量 $E = 7 \times 10^{10}$ N/m²,剪切模量 $G = 2.65 \times 10^{10}$ N/m²,各节点加集中质量 1 600 kg,绕纵轴的转动惯量为 100 kg·m²,绕横轴的转动惯量为 50 kg·m²,基频为 1.05 Hz,阻尼比为 0.01,采样频率为 1 000 Hz.响应计算使用前 50 阶弹性模态.本文选取 401 个基函数,采用等间隔频率 $\Delta\omega = 0.25$ Hz.

采用整体相对误差 (R) 定量地衡量荷载重构精度,其表达式如下:

$$R_j = \frac{\|\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{Tj}\|_1}{\|\mathbf{f}_{Tj}\|_1} \times 100\%, \quad (28)$$

式中, R_j 表示第 j 个重构荷载的整体相对误差, \mathbf{f}_{Tj} 表示第 j 个真实荷载向量, \mathbf{f}_j 表示重构的第 j 个荷载向量, $\|\cdot\|_1$ 表示向量的 1-范数.

为了模拟真实情况,对加速度响应数据施加 Gauss 白噪声,公式如下所示:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\delta}{N} \|\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}\|_1 \mathbf{R}, \quad (29)$$

式中 $\ddot{\mathbf{x}}$ 表示含有噪声的加速度测量数据, $\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}$ 表示不含噪声的加速度数据, δ 表示噪声等级, \mathbf{R} 表示 Gauss 随机矩阵,维度为 $N \times 1$.

5.1 所提方法有效性验证

为了验证本文所提方法的有效性,假设有 3 个荷载作用在结构上,荷载作用在距离顶端 0.5 m,1.5 m,2.5 m 处,荷载作用方向为横向,荷载的时间历程函数为

$$\begin{cases} f_1(t) = 1.5\sin(34\pi t) + 1.5\sin(26\pi t), \\ f_2(t) = 23\sin(40\pi t) + 10\sin(60\pi t), \\ f_3(t) = 15\cos(26\pi t) + 10\sin(40\pi t). \end{cases} \quad (30)$$

模型的初始位移和初始速度如图 3、图 4 所示.

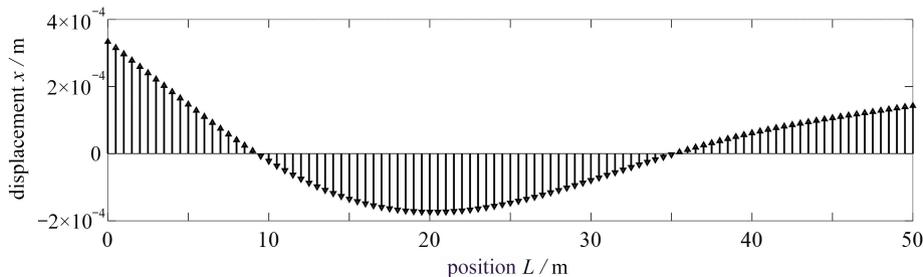


图 3 初始位移

Fig. 3 Initial displacements

6 个加速度传感器安装在距离顶端 1 m,2 m,3 m,4 m,5 m,5.5 m 处,使用 5%,10%和 15%三个噪声等级验证方法的抗噪性.

在不同噪声等级下,使用本文所提的方法三点加载荷载重构结果如图 5 所示.由图中可以看出,本文所提方法重构的荷载都基本和原荷载重合,验证了本文方法对于不同噪声水平的鲁棒性和可行性.

为了说明所提方法的优势,将本文所提方法与文献[24]中加权 l_1 正则化方法(weighted l_1 -norm regularization method)在计算精度和效率上进行比较.由于两种方法采用相同的基函数,所以预处理即计算荷载基函数结构响应的的时间成本相同,因此在两种方法的计算成本对比上,仅列出计算式(26)所需的时间.

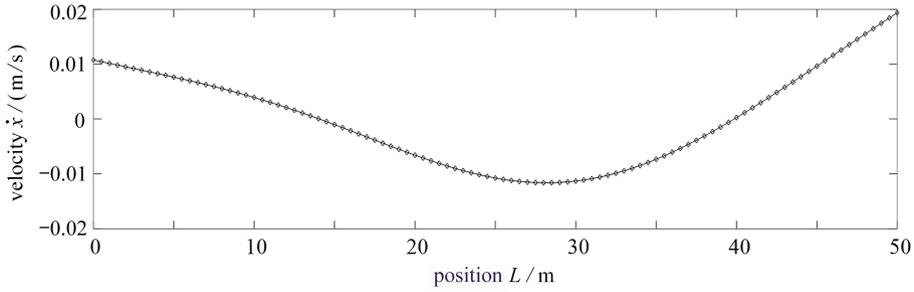


图4 初始速度

Fig. 4 Initial velocities

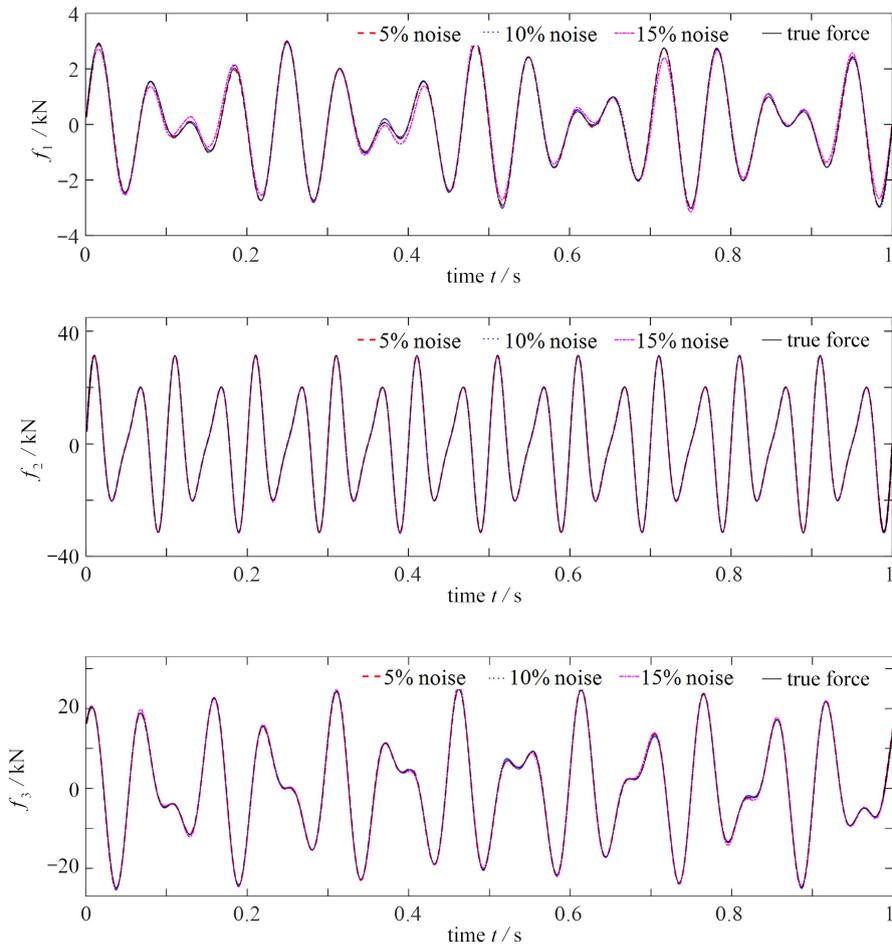


图5 本文所提方法不同噪声水平下荷载重构结果

Fig. 5 Reconstruction results with the proposed method under different noise levels

由表1可知,本文所提方法与加权 l_1 正则化方法在重构精度上相差无几,但是计算的平均时长仅为0.68 s,而加权 l_1 正则化方法的平均时间则需要617.02 s.以15%的噪声为例,荷载重构的结果如图6所示,从图中可以看出,本文所提方法和加权 l_1 正则化方法均能比较准确地重构出真实荷载,仅在幅值处有略微的差别.

由上可以得出,本文所提方法和加权 l_1 正则化方法都能够处理未知初始条件下的荷载重构问题,且在几乎相同求解精度的情况下,本文所提方法通常能够更快地获取重构结果.

表 1 重构精度与计算时间

Table 1 Reconstruction accuracies and computation times

noise levels	proposed			ref. [24]		
	5%	10%	15%	5%	10%	15%
f_1	1.87%	3.55%	10.08%	3.17%	10.71%	10.98%
f_2	0.37%	0.67%	1.82%	0.01%	0.20%	0.35%
f_3	0.99%	1.67%	2.82%	0.65%	6.34%	9.39%
computing time	0.68 s			617.02 s		

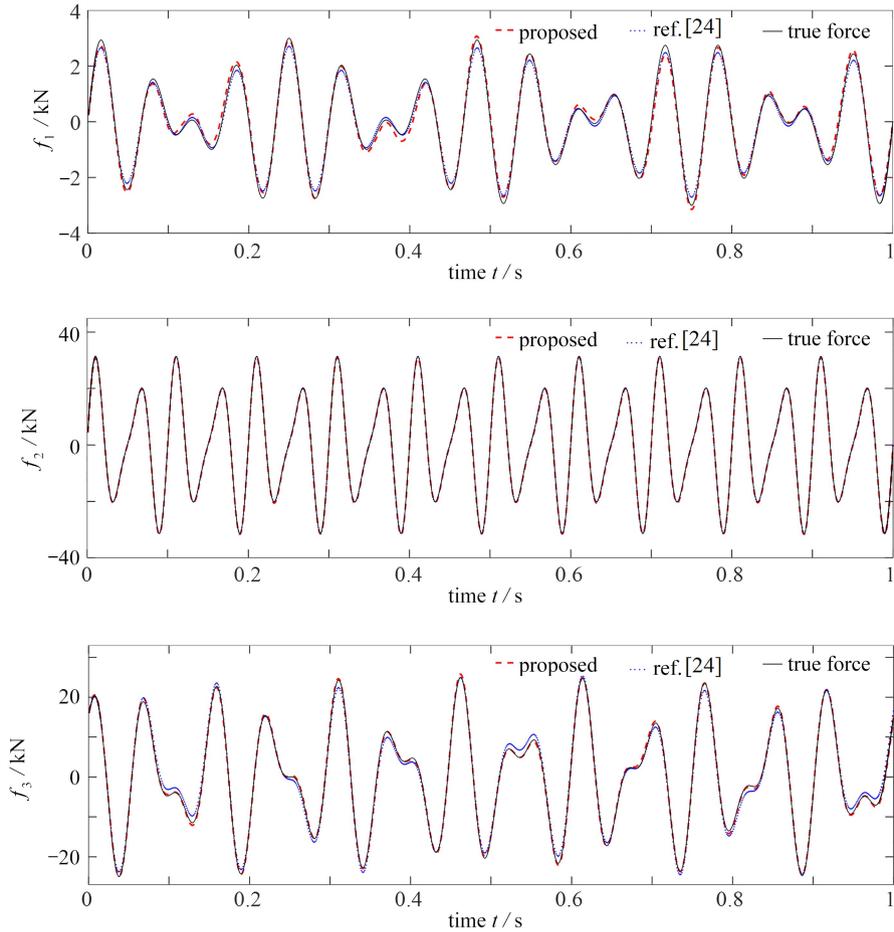


图 6 15%噪声水平下不同方法的荷载重构结果

Fig. 6 Comparison of reconstruction results between different methods with a 15% noise level

5.2 改进分段拟合验证

为验证本文选取初始条件表达方式的合理性,式(24)中的初始条件项仅由低阶振型表达^[18]和本文所提改进分段拟合做比较.至于仅考虑将上一分段末状态作为初始条件的情况^[16],由于受上一步计算结果影响,结合本文方法后,重构效果非常不理想,因此本文便不再与其进行比较.

假设荷载加载点距离顶端 0 m, 2 m, 4 m, 加速度传感器距离顶端 0.5 m, 1.5 m, 2.5 m, 3.5 m, 4.5 m 和 5.5 m, 加速度响应数据施加 15% 的噪声, 测量的加速度响应时间为 4 s. 对响应曲线进行分段, 本文所提改进分段拟合思想重叠长度为 0, 每段时间长为 2 s. 根据测点和加载点位置调用相应的元胞, 组成系数矩阵. 荷载函数表达式为

$$\begin{cases} f_1(t) = 23te^{-45\pi(t-3)^2} \sin(56\pi t) + 32\sin(37\pi t) \sin(11\pi t), \\ f_2(t) = 40te^{-25\pi(t-2.5)^2} \sin(20\pi t) + 27\cos(41\pi t) \sin(4\pi t), \\ f_3(t) = 60te^{-5\pi(t-1)^2} \sin(10\pi t) + 40\cos(5\pi t) \sin(13\pi t). \end{cases} \quad (31)$$

仅使用低阶振型表达初始条件的重构结果和本文所提改进分段拟合的重构结果如图7、图8所示。为了清楚对比两种不同初始条件表达的荷载重构效果,将图7中重构荷载 f_2 第2秒的衔接点放大,如图9(a)所示,同样将图8中荷载 f_2 第2秒的衔接点放大,如图9(b)所示,并结合表2可以明显看出,仅使用低阶振型表达初始条件的重构结果并不理想,而本文所提改进分段拟合的重构结果基本与真实荷载重合,并且两者在计算效率上也几乎相同。由此可以得出,本文所提改进的分段拟合是合理、有效的。

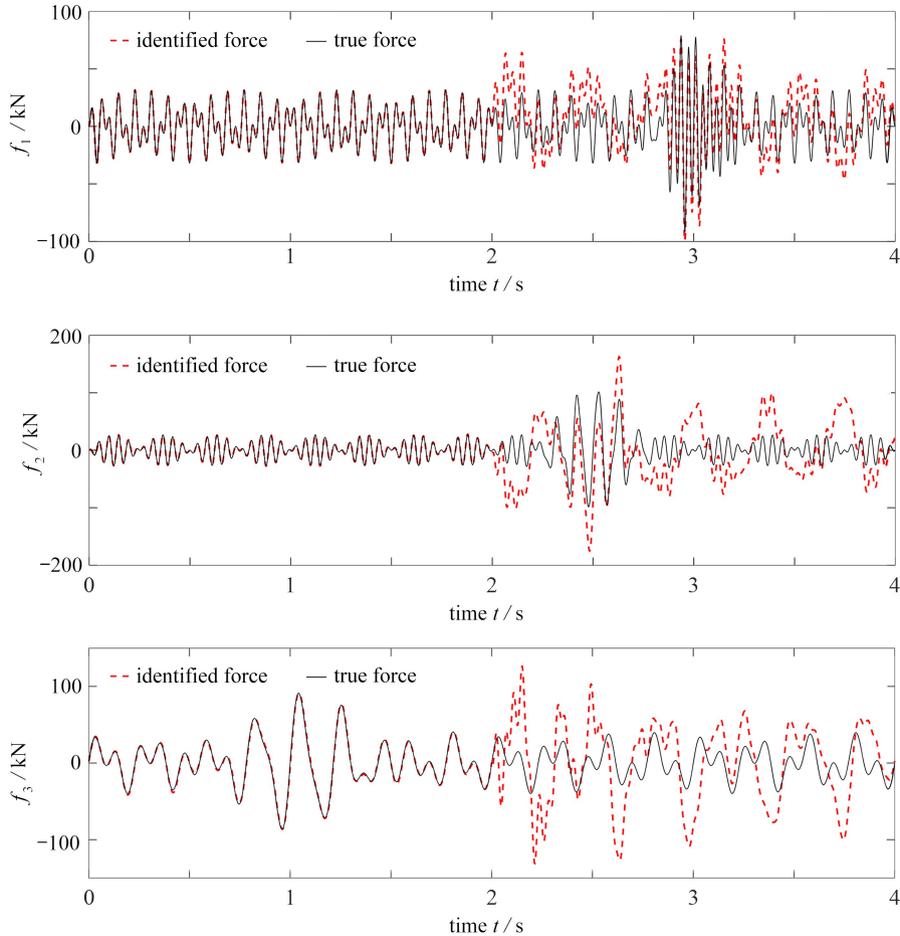


图7 仅使用低阶振型表达初始条件

Fig. 7 Only low-order modes used to express the initial conditions

表2 3种重构方式识别结果对比

Table 2 Comparison of identification results of 3 reconstruction methods

	force	relative error δ /%	computing time t /s
only low-order modes expressed initial condition	f_1	58.48	622.91
	f_2	139.66	
	f_3	105.32	
modified piecewise fitting	f_1	2.56	619.23
	f_2	4.77	
	f_3	6.03	
no segmentation	f_1	11.58	1 203.26
	f_2	23.57	
	f_3	16.72	

对比不分段和分段的整体相对误差,分段之后精度比不分段的精度略好,这是因为选择了合适的分段长

度并且荷载比较复杂.采用分段拟合重构荷载所需时间约占不分段重构荷载的 1/2,这是由于不分段意味着预处理所需计算响应的时间维度更大,相应的时间成本也更大.由此,本文所提的改进分段拟合方法,在采用合适分段长度的情况下,能够高效准确重构大维度的复杂荷载.

由上可知,本文提出分段拟合的思想能明显提升计算效率,对于复杂的荷载分段拟合也能够提高反演精度.针对大维度荷载重构问题,本文认为分段长度不宜太长,太长会导致预处理的成本过大,当荷载比较复杂时还会导致重构精度降低.

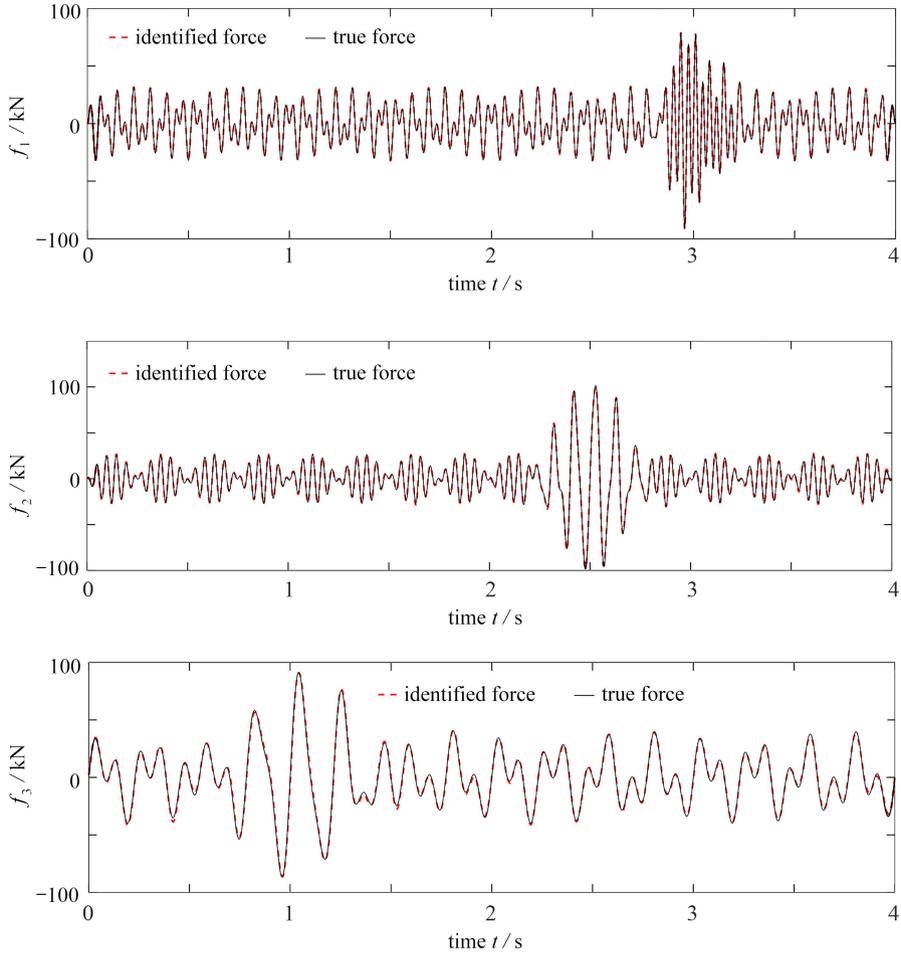
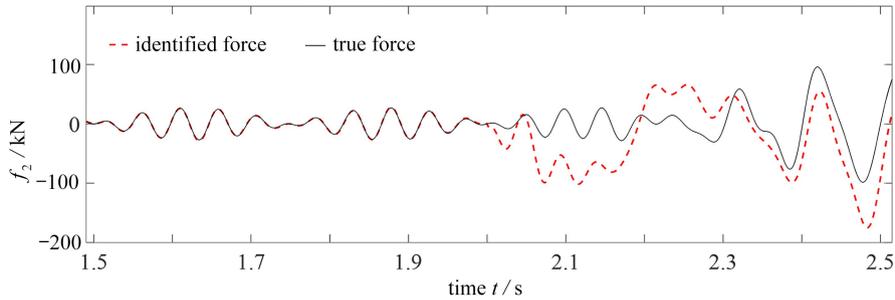


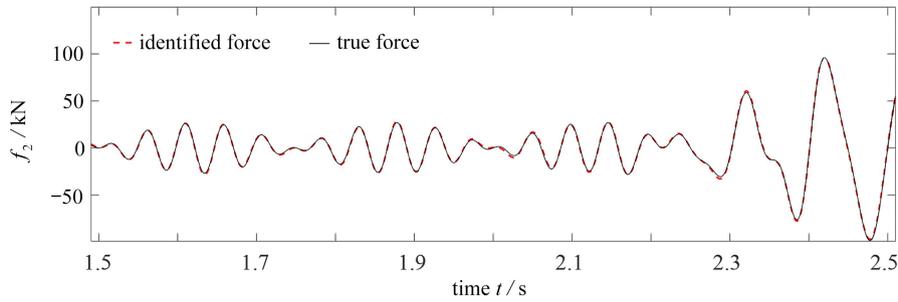
图 8 改进分段拟合

Fig. 8 Modified piecewise fitting time histories



(a) 仅使用低阶振型表达初始条件

(a) Only low-order modes expressed initial conditions



(b) 改进分段拟合

(b) Modified piecewise fitting time histories

图9 衔接点放大图

Fig. 9 The articulation point enlargement

6 结 论

本文针对含有未知初始条件无约束结构的荷载重构问题,提出基于 SBL 算法荷载识别方法结合改进分段拟合提高了整体的计算效率,并在识别过程中利用了上一分段的识别结果,通过合理的初始条件表达方式,改善了识别的精度.数值结果也表明,本文方法较现在流行方法能够更快速地重构荷载,且通过不同等级噪声下的重构结果,验证了本文方法具有较强的鲁棒性;和仅使用低阶振型表达初始条件相比,采用的改进分段拟合更加合理;改进的分段拟合手段在采用合适的分段长度的情况下,和不分段的识别结果相比,也能够以较高的精度重构荷载.

参考文献 (References):

- [1] 朱华平. 不适定问题的正则化理论及其应用[D]. 硕士学位论文. 武汉: 武汉理工大学, 2007. (ZHU Huaping. The regularization theory for ill-posed problems and application[D]. Master Thesis. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2007. (in Chinese))
- [2] 柏恩鹏, 熊向团. 一种新的正则化方法求解热传导方程的侧边值问题[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(5): 541-550. (BAI Enpeng, XIONG Xiangtuan. A new regularization method for solving sideways heat equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(5): 541-550. (in Chinese))
- [3] 柳冕, 程浩, 石成鑫. 一类非线性时间分数阶扩散方程反问题的变分型正则化[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(3): 341-352. (LIU Mian, CHENG Hao, SHI Chengxin. Variational regularization of the inverse problem of a class of nonlinear time-fractional diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(3): 341-352. (in Chinese))
- [4] 彭凡, 马庆镇, 肖健, 等. 自由运行结构动态载荷识别的格林函数法[J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(1): 75-79. (PENG Fan, MA Qingzhen, XIAO Jian, et al. Green kernel function approach of load identification for free structures with overall translation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(1): 75-79. (in Chinese))
- [5] 周珂, 刘莉, 周思达, 等. 基于应变模态参数的结构瞬态载荷识别方法研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(6): 199-205. (ZHOU Yu, LIU Li, ZHOU Sida, et al. Transient load identification of structural dynamic systems based on strain modal parameters[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(6): 199-205. (in Chinese))
- [6] LIU R, HOU Z, WU P, et al. Dynamic load identification for a power battery pack based on a combined regularization algorithm[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, 529: 116928.
- [7] QIAO B, CHEN X, XUE X, et al. The application of cubic B-spline collocation method in impact force identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 64/65: 413-427.

- [8] 张超东,黎剑安.基于增秩 Kalman 滤波的动态荷载识别和结构响应重构[J].应用数学和力学,2021,42(7):665-674. (ZHANG Chaodong, LI Jian'an. Dynamic load identification and structural response reconstruction based on the augmented Kalman filter[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(7): 665-674. (in Chinese))
- [9] 张梓航.基于字典学习的移动荷载识别[D].硕士学位论文.合肥:合肥工业大学,2020. (ZHANG Zihang. Moving load identification based on dictionary learning[D]. Master Thesis. Hefei: Hefei University of Technology, 2020. (in Chinese))
- [10] QIAO B, ZHANG X, WANG C, et al. Sparse regularization for force identification using dictionaries[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 368: 71-86.
- [11] ZHANG Z, HE W, REN W. Moving force identification based on learning dictionary with double sparsity[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 170: 108811.
- [12] LIU J, LI K. Sparse identification of time-space coupled distributed dynamic load[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 148: 107177.
- [13] SAMAGASSI S, KHAMLICH A, DRIOUACH A, et al. Reconstruction of multiple impact forces by wavelet relevance vector machine approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 359: 56-67.
- [14] YAN G, SUN H. A non-negative Bayesian learning method for impact force reconstruction[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 457: 354-367.
- [15] PRAWIN J, RAMA MOHAN RAO A. An online input force time history reconstruction algorithm using dynamic principal component analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 99: 516-533.
- [16] 张开华.运载火箭时域分段拟合动态载荷识别研究[D].硕士学位论文.大连:大连理工大学,2021. (ZHANG Kaihua. Dynamic load identification of launch vehicles by time-domain piecewise fitting[D]. Master Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2021. (in Chinese))
- [17] PAN C, YU L. Identification of external forces via truncated response sparse decomposition under unknown initial conditions[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2019, 22(15): 3161-3175.
- [18] PAN C, YE X, ZHOU J, et al. Matrix regularization-based method for large-scale inverse problem of force identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 140: 106698.
- [19] PAN C, DENG X, HUANG Z. Parallel computing-oriented method for long-time duration problem of force identification[J]. *Engineering With Computers*, 2022, 38(2): 919-937.
- [20] TIPPING M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1(3): 211-244.
- [21] TIPPING M E, FAUL A C. Fast marginal likelihood maximisation for sparse Bayesian models[C]//*Ninth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*. Florida, USA, 2003: 276-283.
- [22] LAW S S, ZHU X Q. *Moving Loads-Dynamic Analysis and Identification Techniques*[M]. London: CRC Press, 2011.
- [23] 朱斯岩,朱礼文.运载火箭动态载荷识别研究[J].振动工程学报,2008,21(2):135-139. (ZHU Siyan, ZHU Liwen. Dynamic load identification on launch vehicle[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(2): 135-139. (in Chinese))
- [24] PAN C, YU L, LIU H, et al. Moving force identification based on redundant concatenated dictionary and weighted l_1 -norm regularization[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 98: 32-49.