

基于同伦分析法的FGM输流管非线性频率分析

周杰, 常学平, 李映辉, 邵永波

Nonlinear Frequency Analysis of FGM Pipes Based on the Homotopy Method

ZHOU Jie, CHANG Xueping, LI Yinghui, and SHAO Yongbo

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430296>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

超临界输流管道3 : 1内共振下参激振动响应

Parametric Vibration Responses of Supercritical Fluid-Conveying Pipes in 3 : 1 Internal Resonance

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1227-1235 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390121>

非线性振动分析的均向量场法

An Average Vector Field Method for Nonlinear Vibration Analysis

应用数学和力学. 2019, 40(1): 47-57 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390178>

弹性约束边界条件下矩形蜂窝夹芯板的自由振动分析

Free Vibration Analysis of Rectangular Honeycomb-Cored Plates Under Elastically Constrained Boundary Conditions

应用数学和力学. 2019, 40(6): 583-594 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390348>

柔性输流管泄流效应实验研究

An Experimental Study of Leakage Effects on Flexible Pipelines

应用数学和力学. 2019, 40(8): 866-879 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390296>

具结构阻尼的耦合梁方程组在非线形边界条件下的吸引子

Attractors of Coupled Beam Equations With Structural Damping Under Nonlinear Boundary Conditions

应用数学和力学. 2021, 42(1): 102-112 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410089>

纵向磁场激励下筒支输流微梁的动力学行为研究

Dynamical Behavior Analysis of Micro Beams Conveying Fluid in Longitudinal Magnetic Fields

应用数学和力学. 2019, 40(5): 498-507 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390185>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

基于同伦分析法的 FGM 输流管非线性频率分析*

周杰¹, 常学平¹, 李映辉², 邵永波³

(1. 西南石油大学 机电工程学院, 成都 610500;
2. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031;
3. 西南石油大学 土木工程与测绘学院, 成都 610500)

摘要: 该文基于同伦分析法研究了广义边界条件下含孔隙功能梯度材料 (FGM) 输流管道的非线性振动. 基于 FGM 的幂律分布规律和 Voigt 模型来描述具有孔隙的 FGM 管道的材料特性. 基于 Euler-Bernoulli 梁理论和 von Kármán 非线性理论, 利用 Hamilton 变分原理, 建立了含孔隙功能梯度流体输送管道的动力学控制方程和广义边界条件. 采用同伦分析法求解了广义边界条件下的功能梯度流管道的非线性振动特性. 数值结果表明: 平移弹簧对失稳的临界流速影响不明显, 而扭转弹簧则提高了失稳的临界流速, 使系统更加稳定; 在非线性系统中, 黏弹性系数不会改变失稳临界流速; 管道长度、幂律指数和孔隙率都会对 FGM 多孔输流管道的非线性自由振动有明显的影

关键词: 同伦分析法; 广义边界条件; 非线性振动; 孔隙率; 输流管道
中图分类号: O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430296

Nonlinear Frequency Analysis of FGM Pipes Based on the Homotopy Method

ZHOU Jie¹, CHANG Xueping¹, LI Yinghui², SHAO Yongbo³

(1. School of Mechatronic Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, P.R.China;
2. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China;
3. School of Civil Engineering and Geomatics, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, P.R.China)

Abstract: Based on the homotopy analysis method, the nonlinear vibration of porous functionally graded material (FGM) conveying pipes under generalized boundary conditions was studied. Based on the power-law distribution of the FGM and the Voigt model, the physical properties of the porous pipe material were described. Under the Euler-Bernoulli beam theory and the von Kármán nonlinear theory, and by means of Hamilton's variational principle, the dynamic control equations and generalized boundary conditions for porous FGM conveying pipes were established. The homotopy analysis method was used to solve the nonlinear vibration characteristics of the porous FGM conveying pipe under generalized boundary conditions. The numerical results show that, the translation spring has little effect on the critical velocity of instability, while the rotation spring increases the critical velocity of instability, making the system more stable; in the nonlinear system, the viscoelastic coefficient does not change the critical velocity; the pipe length, the power-law exponent and the porosity all

* 收稿日期: 2022-09-27; 修订日期: 2023-01-05

基金项目: 国家自然科学基金(51674216)

作者简介: 周杰(1997—), 男, 硕士生(E-mail: 17713653269@163.com);

常学平(1977—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: xuepingch0952@sina.com).

引用格式: 周杰, 常学平, 李映辉, 邵永波. 基于同伦分析法的 FGM 输流管非线性频率分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(2): 191-200.

influence the nonlinear free vibration of the porous FGM conveying pipe.

Key words: homotopy analysis; generalized boundary condition; nonlinear vibration; porosity; conveying pipe

0 引言

输流管道在海洋工程、核工程、航空航天等领域有着广泛的应用,而随着制造业的发展以及科技的进步,实际工程的结构和工作环境也变得越来越复杂,因此,由单一材料制成的产品越来越难以在如此恶劣的环境中使用.在这种情况下,功能梯度材料(FGM)作为一种优异的复合材料,由于其独特的材料分布特性,可作为钻柱、核电站蒸汽发生器中的换热管等产品的设计材料,与传统复合材料(如层状结构)相比,梯度复合材料在某些方向上保持了材料性能连续变化,这有助于抵抗各种环境梯度,如温度、湿度和腐蚀,并消除应力集中.因此,提高对这些系统振动的认识非常重要.输送流体的FGM多孔管道的振动分析是流固耦合领域的一个分支.多年来,一些理论、实验和数值模型已用于研究输送流体管道的动力学分析^[1-3].对于输送流体管道的线性和非线性振动分析,也已经提出了几种方法,如朱晨光等^[4]采用多尺度法研究了功能梯度管在内流作用下的自由振动问题.范谨明和常学平等^[5]采用Green函数法研究了气-液双相流、轴向外载及自旋角速度对系统稳定性的影响.马腾等^[6]通过改进的Fourier法求解了任意边界支撑条件下输流管道的振动特性.张博等^[7]通过降阶升维的方法求解了扭转输液管系统的特征值问题并分析了其自由振动特性.龚琳琦等^[8]通过基面力单元法对梁、板结构进行了弹性大变形数值模拟.而对于边界条件,在输流管动力学的研究中也是一个热点问题.包日东和闻邦椿^[9]研究了弹性支撑的输流管道的静态与动态失稳临界流速.赵千里等^[10]研究了截面内流速不均以及弹性支承对输流管路振动问题的影响.巨维博等^[11]研究了实际支撑条件下管路系统的振动特性,说明了支撑弹簧刚度对系统稳定性的影响.Babaei和Eslami^[12]研究了弹性FGM多孔微管在不同边界条件下的非线性弯曲分析.通过非线性振动理论研究非线性动力学的各个方面,可以发现一些有趣的现象.Zhu等^[13]研究了输送流体的FGM多孔管道的非线性自由振动和受迫振动.Long和Van Tung^[14]研究了剪切变形圆柱壳的非线性分析和FGM多孔圆柱壳的热非线性屈曲行为.Liu等^[15]研究了弹性基底上FGM多孔夹层圆柱壳的非线性强迫振动.Setoodeh和Afrahim^[16]研究了FGM流体输送微管的非线性振动行为,并通过同伦分析法(HAM)求解了控制方程.Ghazavi和Molki等^[17]研究了流体输送弯曲微管的非线性振动和稳定性分析.Khodabakhsh等^[18]研究了输送流体的FGM管道的非线性振动和稳定性分析.Mashrouteh等^[19]获得了流体输送微管非线性频率的解析表达式,并利用修正偶应力理论、Galerkin法和变分迭代研究了振动的时间响应.Dehrouyeh-Semnani等^[20]研究了不同边界条件下输送流体的微管的非线性振动.Kheiri^[21]研究了输送流体的管道的非线性动力学行为.

同伦方法是求解非线性代数方程组的有力工具^[22-23].HAM是廖世俊教授^[24-25]提出的一种求解非线性微分方程的数值方法,与Adomian分解法、 δ 展开法和Lyapunov人工小参数法等其他分析方法相比,HAM具有独立于小参数或大参数、能够使用不同的基函数和引入辅助参数来控制收敛区域等优点^[24].HAM已被用于固体力学领域,如Ali-Asgari等^[25]利用HAM显示了基于非局部理论和von Kármán非线性耦合的输送流体的碳纳米管的非线性频率和时间响应.Setoodeh等^[26]应用Galerkin法和HAM研究了FGM微管/纳米管的线性和非线性扭转自由振动.Tang和Yang^[27]研究了基于Euler-Bernoulli梁理论并使用HAM的流体输送FGM管道的非线性振动.Khodabakhsh等^[18]利用HAM,基于Timoshenko梁理论、von Kármán非线性应变关系和Galerkin法,考虑扭转惯性和剪切变形效应,研究输送流体的FGM管道的非线性振动和稳定性分析.

从上述文献中我们可以知道,目前输流管道的非线性振动一般采用数值方法来求解系统的时间响应和固有频率.而对于解析解的研究,一般采用摄动法和变分迭代法.很少有人将HAM应用于求解输流管道的非线性振动.根据文献调研,目前还没有人研究广义边界条件下黏弹性输流管道的非线性振动.本文首先基于Euler-Bernoulli梁和von Kármán非线性理论,采用Kelvin-Voigt模型和Hamilton原理,建立了具有弹性边界支撑的输流复合管的动力学方程.然后利用Galerkin法推导出适用于弹性边界条件的模态函数,利用HAM求解了具有弹性边界支撑的输流复合管系统的非线性振动特性.数值结果显示了管道长度、孔隙率体积分、

幂律指数、流体流速和阻尼系数对 FGM 多孔输送流体管道非线性频率的影响。

1 数学模型的建立

图 1 为长度为 L 、内径为 R_i 、外径为 R_o 的广义边界条件下功能梯度输流管示意图。其中广义边界条件可以通过支撑平移弹簧 (K_L, K_R) 和扭转弹簧 (K_{BL}, K_{BR}) 来等效。假设材料成分的微观结构仅在厚度方向上连续变化。由于加工缺陷, 在横截面上有均匀的空隙, 故具有孔隙率体积分数 $\alpha (\alpha \ll 1)$ 的陶瓷相与金属相之间孔隙率分布的 FGM 管道的校正系数可以表示为^[28]

$$P_f = P_m(V_m - \alpha/2) + P_c(V_c - \alpha/2), \tag{1}$$

其中, P_m, P_c 是金属和陶瓷的材料特性; V_m 和 V_c 分别为金属相和陶瓷相的体积分数, 其成分表示为^[29]

$$V_c + V_m = 1. \tag{2}$$

陶瓷相的体积分数可以表示为

$$V_c = \left(\frac{R_o - r}{R_o - R_i} \right)^n. \tag{3}$$

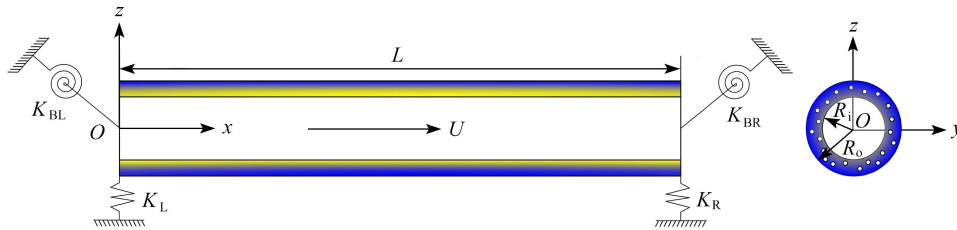


图 1 广义边界条件下输送流体的管道示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a pipeline conveying fluid under generalized boundary conditions

考虑管道轴向可伸长所带来的非线性张力项及管道内部阻尼, 根据文献 [30-31] 的推导过程, 我们可以得到输流管道的非线性运动控制方程:

$$\begin{aligned} & \left((EI)^* + \eta I \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_f u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - \\ & \frac{(EA)^*}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \eta \frac{(EA)^*}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

其中, $(EI)^*$ 为 FGM 管道的抗弯刚度, $(EA)^*$ 为 FGM 的轴向刚度, η 为黏弹性系数, m_f 和 m_p 分别代表管道和流体的单位长度质量, u 和 w 分别是流体流速和管道中间平面的横向位移, c_d 为阻尼系数。由于功能梯度管道的弹性模量沿管道径向变化, 因此可以表示为

$$(EA)^* = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} E r dr d\theta, \tag{5}$$

$$(EI)^* = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} E r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta, \tag{6}$$

其中 θ 为极坐标下的极角。

2 模态函数的计算

输流管道两端一般支承的边界条件为

$$\phi''(0) = K_{BL}\phi'(0), \phi'''(0) = -K_L\phi(0), \phi''(1) = K_{BR}\phi'(1), \phi'''(1) = -K_R\phi(1), \tag{7}$$

其中, K_{BL} 和 K_{BR} 为扭转弹簧系数, K_L 和 K_R 为线性弹簧系数。

输流管道横向弯曲振动模态函数的一般表达式为

$$\phi(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x), \tag{8}$$

其中, $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是由边界条件确定的系数。

将式(8)代入到式(7)中,我们可以得到

$$\begin{cases} K_{BL}C_1 + K_{BL}C_3 + \lambda C_2 - \lambda C_4 = 0, \\ -\lambda^3 C_1 + K_L C_3 + \lambda^3 C_3 + K_L C_4 = 0, \\ [-\lambda \sin(\lambda) + K_{BR} \cos(\lambda)]C_1 + [-\lambda \cos(\lambda) - K_{BR} \sin(\lambda)]C_2 + \\ \quad [\lambda \sinh(\lambda) + K_{BR} \cosh(\lambda)]C_3 + [\lambda \cosh(\lambda) + K_{BR} \sinh(\lambda)]C_4 = 0, \\ [-\lambda^3 \cos(\lambda) - K_R \sin(\lambda)]C_1 + [\lambda^3 \sin(\lambda) - K_R \cos(\lambda)]C_2 + \\ \quad [\lambda^3 \cosh(\lambda) - K_R \sinh(\lambda)]C_3 + [\lambda^3 \sinh(\lambda) + K_R \cosh(\lambda)]C_4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

上述公式是关于 C_i 的线性方程组,其具有非零解的唯一条件是其系数行列式为零.其展开后的行列式是关于 λ 的超越方程,其中 λ 为系统的特征值.用数值法求解此方程可得到系统的各阶特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$.

从式(9)中我们可以获得

$$C_2 = \frac{D_2}{D_0} C_1, C_3 = \frac{D_3}{D_0} C_1, C_4 = \frac{D_4}{D_0} C_1, \quad (10)$$

式中

$$\begin{cases} D_0 = (-R - FGR) \sin(\lambda) + (1 + FG) \cos(\lambda) + \\ \quad (-2F + R - FGR) \sinh(\lambda) + (R - GRF + 2G) \cosh(\lambda), \\ D_2 = -(1 + FG) \sin(\lambda) + (-FGR - R) \cos(\lambda) + \\ \quad (1 - GF + 2GR) \sinh(\lambda) + (-R + GRF - 2G) \cosh(\lambda), \\ D_3 = (2F - FRG + R) \sin(\lambda) + (2FR + FG - 1) \cos(\lambda) + \\ \quad (-R - FG^2) \sinh(\lambda) + (1 + FG) \cosh(\lambda), \\ D_4 = (1 - FG - 2GR) \sin(\lambda) + (R - FGR + 2G) \cos(\lambda) + \\ \quad (-1 - FG) \sinh(\lambda) + (R + FGR) \cosh(\lambda), \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$F = \frac{\lambda}{K_{BL}}, G = \frac{\lambda^3}{K_L}, R = \frac{\lambda^3}{K_R}. \quad (12)$$

因此,一般边界条件下的模态函数可以表示为

$$\phi(x) = \sin(\lambda x) + \frac{D_2}{D_0} \cos(\lambda x) + \frac{D_3}{D_0} \sinh(\lambda x) + \frac{D_4}{D_0} \cosh(\lambda x). \quad (13)$$

3 非线性振动分析

使用 Galerkin 法对式(4)进行离散,并将式(13)代入到式(4)中.然后在方程的两侧同时乘上 $\phi(x)$,并在 $[0, L]$ 上积分.我们可以得到

$$\ddot{q}(t) + \varepsilon_1 \dot{q}(t) + \varepsilon_2 q(t) - \varepsilon_3 \dot{q}(t) q(t)^2 - \varepsilon_4 q(t)^3 = 0, \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{(EI)^* \eta \int_0^L \phi_j \phi_i^{(4)} dx + 2m_f u \int_0^L \phi_j \phi_i' dx + c_d \int_0^L \phi_j \phi_i dx}{(m_f + m_p) \int_0^L \phi_j \phi_i d\xi}, \\ \varepsilon_2 = \frac{(EI)^* \int_0^L \phi_j \phi_i^{(4)} dx + mu^2 \int_0^L \phi_j \phi_i'' dx}{(m_f + m_p) \int_0^L \phi_j \phi_i dx}, \\ \varepsilon_3 = \frac{(EA)^* \eta}{2L(m_f + m_p) \int_0^L \phi_j \phi_i dx} \int_0^L \phi_j \phi_i'' dx \int_0^L \phi_i' \phi_i' dx, \\ \varepsilon_4 = \frac{(EA)^*}{2L(m_f + m_p) \int_0^L \phi_j \phi_i dx} \int_0^L \phi_j \phi_i'' dx \int_0^L \phi_i' \phi_i' dx. \end{cases} \quad (15)$$

利用 HAM 求解式(14),我们令

$$\tau = \varpi t, \quad (16)$$

$$q(t) = \eta(\tau). \tag{17}$$

将式(16)、(17)代入到式(14)中, 我们可以得到

$$\varpi \ddot{\eta}(\tau) + \varpi \varepsilon_1 \dot{\eta}(\tau) + \varepsilon_2 \eta(\tau) - \varepsilon_3 \dot{\eta}(\tau) \eta^2(\tau) - \varepsilon_4 \eta^3(\tau) = 0, \tag{18}$$

这里, 假设非线性常微分方程的初始解为

$$\eta(\tau) = a_0 \cos(\tau) + b_0 \sin(\tau), \tag{19}$$

其中, a_0, b_0 为任意常数.

根据式(18), 辅助线性算子可以定义为

$$L[\phi(\tau; q)] = \varpi^2 \left[\frac{d^2 \phi(\tau; q)}{d\tau^2} + \phi(\tau; q) \right]. \tag{20}$$

该辅助线性算子的性质为

$$L(C_1 \cos(\tau) + C_2 \sin(\tau)) = 0, \tag{21}$$

其中, C_1, C_2 为任意常数.

根据方程(18), 非线性辅助算子可以定义为

$$Nf = \varpi \ddot{\eta}(\tau) + \varpi \varepsilon_1 \dot{\eta}(\tau) + \varepsilon_2 \eta(\tau) - \varepsilon_3 \dot{\eta}(\tau) \eta^2(\tau) - \varepsilon_4 \eta^4(\tau). \tag{22}$$

接着建立零阶形变方程:

$$(1 - q)L[\phi(\tau; q) - \eta_0(\tau)] = qhN[\phi(\tau; q)], \tag{23}$$

其中, q 是嵌入参变量, h 是非零收敛控制参数.

由文献 [27] 可知, 使用 HAM 求解时, 离散残差只依赖于控制参数 h , 故在计算时只需要取最优的值, 即可保证计算的精度. 在本文中控制参数 $h=1$ [32].

当 $q = 0$ 时, 方程的解可以表示为

$$\phi(\tau; 0) = \eta_0(\tau); \tag{24}$$

当 $q = 1$ 时, 方程的解可以表示为

$$\phi(\tau; 1) = \eta(\tau). \tag{25}$$

当嵌入变量 q 从 0 到 1 时, 零阶形变方程的解 $\phi(\tau; q)$ 从初始猜测解 $\eta_0(\tau)$ 演变为精确解 $\eta(\tau)$. 假设对于所有情况, 零阶形变方程的解都存在, 同时假设无穷导数也存在. 利用 Taylor 定理, 将 $\phi(\tau; q)$ 展开为关于 q 的幂级数形式. 并将展开的幂级数形式的 $\phi(\tau; q)$ 代入到零阶形变方程中. 然后将 q 的相同次幂的系数令为 0, 这样我们就可以得到以下等式:

$$\phi(\tau; q) = \eta_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\tau) q^n, \tag{26}$$

其中

$$\eta_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \phi(\tau; q)}{\partial q^n} \right|_{q=0}. \tag{27}$$

将零阶形变方程对 q 求导 m 次, 然后使相同幂的系数为零并除以阶乘 $m!$. 最后令 $q=0$, 用这种方法得到 m 阶形变方程:

$$L[\eta_m(\tau) - \chi_m \eta_{m-1}(\tau)] = c_0 R_m, \tag{28}$$

其中

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \tag{29}$$

$$R_m = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} = \varpi^2 \ddot{\eta}_{m-1} + \varpi \varepsilon_1 \dot{\eta}_{m-1} + \varepsilon_2 \eta_{m-1} - \varpi \varepsilon_3 \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\eta}_i \sum_{j=0}^{m-1-i} \eta_j \eta_{m-1-i-j} - \varepsilon_4 \sum_{i=0}^{m-1} \eta_i \sum_{j=0}^{m-1-i} \eta_j \eta_{m-1-i-j}. \tag{30}$$

当 $m = 1$ 时, 有

$$\varpi^2 \left[\frac{d^2 \eta_1(\tau)}{d\tau^2} + \eta_1(\tau) \right] = \varpi^2 \dot{\eta}_0 + \varpi \varepsilon_1 \dot{\eta}_0 + \varepsilon_2 \eta_0 - \varpi \varepsilon_3 \dot{\eta}_0 \eta_0^2 - \varepsilon_4 \eta_0^3. \quad (31)$$

将方程(19)代入到式(31)中, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \varpi^2 \left[\frac{d^2 \eta_1(\tau)}{d\tau^2} + \eta_1(\tau) \right] = & \left(-a_0 \varpi + b_0 \varepsilon_1 \varpi + a_0 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} b_0^3 \varepsilon_3 \varpi - \frac{1}{4} a_0^2 b_0 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^3 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0 b_0^2 \right) \cos(\tau) + \\ & \left(-b_0 \varpi - a_0 \varepsilon_1 \varpi + b_0 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} a_0^3 \varepsilon_3 \varpi + \frac{1}{4} a_0 b_0^2 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} b_0^3 \varepsilon_4 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^2 b_0 \right) \sin(\tau) + \\ & \frac{1}{4} [\varpi \varepsilon_3 (a_0^3 - 3a_0 b_0^2) + \varepsilon_4 (b_0^3 - 3a_0^2 b_0)] \sin(3\tau) - \\ & \frac{1}{4} [\varpi \varepsilon_3 (3a_0^2 b_0 - b_0^3) + \varepsilon_4 (a_0^3 - 3a_0 b_0^2)] \cos(3\tau). \end{aligned} \quad (32)$$

通过求解等式(32)的微分方程, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -\frac{1}{2\varpi^2} \left(-a_0 \varpi + b_0 \varepsilon_1 \varpi + a_0 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} b_0^3 \varepsilon_3 \varpi - \frac{1}{4} a_0^2 b_0 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^3 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0 b_0^2 \right) \tau \cos(\tau) + \\ & \frac{1}{2\varpi^2} \left(-b_0 \varpi - a_0 \varepsilon_1 \varpi + b_0 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} a_0^3 \varepsilon_3 \varpi + \frac{1}{4} a_0 b_0^2 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} b_0^3 \varepsilon_4 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^2 b_0 \right) \tau \sin(\tau) - \\ & \frac{1}{32\varpi^2} [\varpi \varepsilon_3 (a_0^3 - 3a_0 b_0^2) + \varepsilon_4 (b_0^3 - 3a_0^2 b_0)] (\sin(3\tau) + \sin(\tau)) + \\ & \frac{1}{32\varpi^2} [\varpi \varepsilon_3 (3a_0^2 b_0 - b_0^3) + \varepsilon_4 (a_0^3 - 3a_0 b_0^2)] (\cos(3\tau) + \cos(\tau)). \end{aligned} \quad (33)$$

为了避免久期项的存在, 令公式中的久期项 $\tau \cos(\tau)$ 和 $\tau \sin(\tau)$ 等于 0, 我们可以得到

$$\begin{cases} -a_0 \varpi + b_0 \varepsilon_1 \varpi + a_0 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} b_0^3 \varepsilon_3 \varpi - \frac{1}{4} a_0^2 b_0 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^3 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0 b_0^2 = 0, \\ -b_0 \varpi - a_0 \varepsilon_1 \varpi + b_0 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} a_0^3 \varepsilon_3 \varpi + \frac{1}{4} a_0 b_0^2 \varepsilon_3 \varpi - \frac{3}{4} b_0^3 \varepsilon_4 - \frac{3}{4} \varepsilon_4 a_0^2 b_0 = 0. \end{cases} \quad (34)$$

4 数值分析

图 2 显示了在不同的幂律指数下, 系统的非线性频率随流体流速的变化. 从图中可以看出, 系统的非线性频率随着流体流速的增加而降低, 直到降至 0. 此时, 所对应的流体流速是系统失稳的临界流速. 同时, 系统的非线性频率随幂律指数的增大而减小, 幂律指数从零到无穷大是 FGM 从 Si_3N_4 到 SUS304 的变化. 幂律指数不仅改变了非线性频率, 而且降低了失稳的临界流速, 使系统更容易失稳. 从图 3 中我们可以看到孔隙率对系统非线性频率的影响. 孔隙的存在将改变输流管道的物理性质. 从图中可以看出, 系统的非线性频率变化速率将随着孔隙率的增加而增加. 孔隙率越大, 系统的非线性频率随流速变化越快. 同时孔隙率的增加也会使系统失稳的临界流速变小.

图 4 展示了系统的黏弹性系数对输流管道非线性频率的影响. 从图中可以看出, 非线性频率随着系统中黏弹性系数的增加而降低. 这是因为系统中考虑了结构阻尼的影响. 管道系统不再是保守系统, 存在能量损失. 黏弹性系数越大, 系统的能量损失越大. 黏弹性系数的变化不会影响系统失稳的临界流速, 这与 Deng 等^[33]在线性控制方程中所得的结论一致. 也就是说, 在非线性的情况下, 黏弹性系数也不会影响系统失稳的临界值.

图 5 和图 6 分别描述了支撑平移弹簧刚度系数和扭转弹簧刚度系数对系统非线性频率的影响. 图 5 表明, 系统的非线性频率随着平移弹簧刚度系数的增加而增加, 但是平移弹簧刚度系数的增加并没有明显地改变系统失稳的临界流速. 因此在非线性系统中, 平移弹簧刚度系数对系统失稳的临界流速的影响很小. 故我们可以近似地认为平移弹簧的刚度系数不会影响系统失稳的临界流速. 图 6 表明, 系统的非线性频率随着扭转弹簧刚度系数的增加而增加, 并且系统的临界流速也随着扭转弹簧刚度系数的增加而增加.

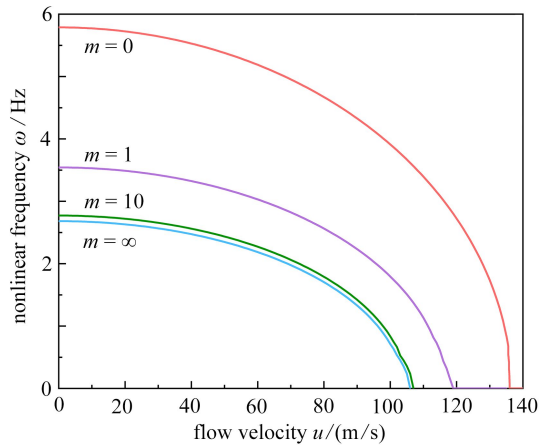


图 2 不同幂律指数下非线性频率随流速的变化

Fig. 2 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different power law indices

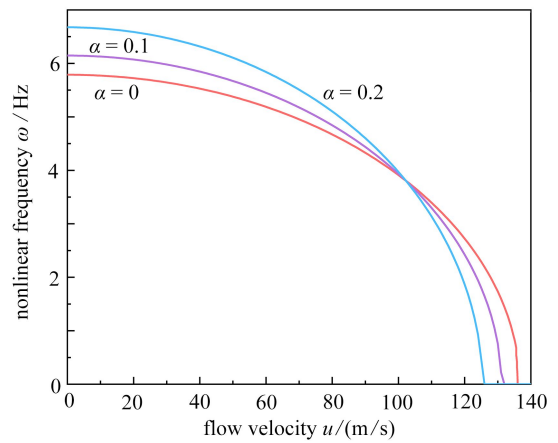


图 3 不同孔隙率下非线性频率随流速的变化

Fig. 3 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different porosities

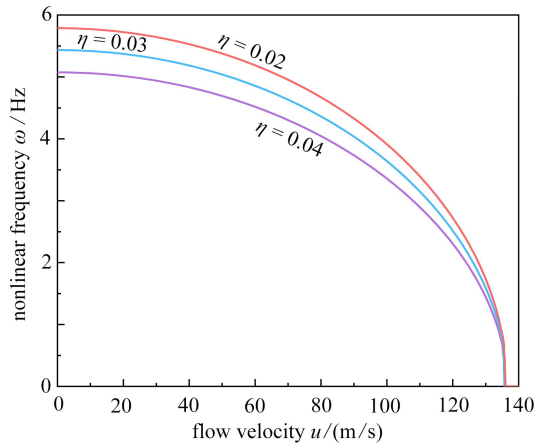


图 4 不同黏弹性系数下非线性频率随流速的变化

Fig. 4 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different viscoelastic coefficients

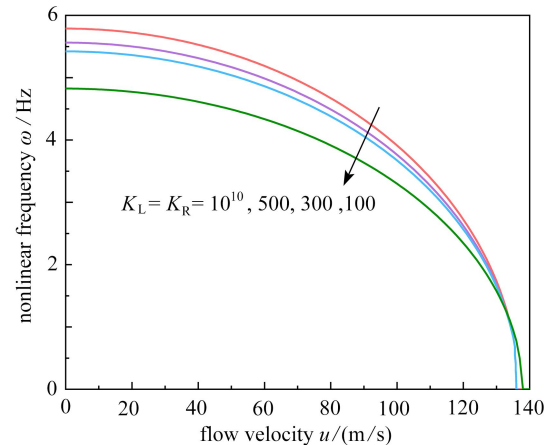


图 5 不同支撑平移弹簧刚度下非线性频率随流速的变化

Fig. 5 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different support spring stiffnesses

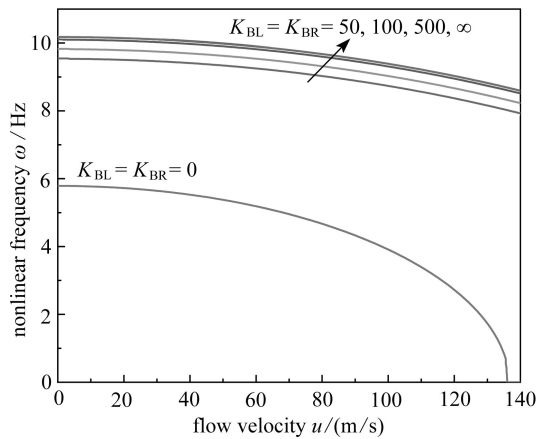


图 6 不同扭转弹簧刚度下非线性频率随流速的变化

Fig. 6 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different rotating spring stiffnesses

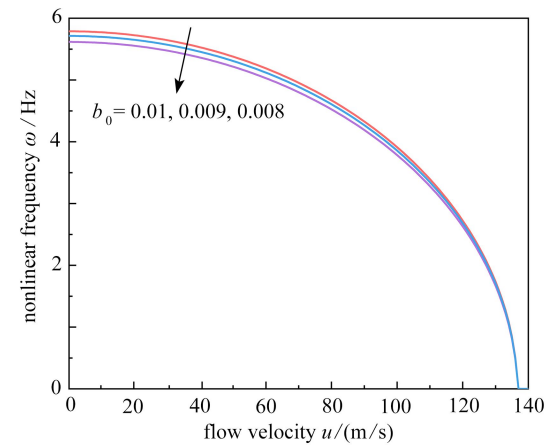


图 7 不同初始振幅下非线性频率随流速的变化

Fig. 7 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid velocity under different initial amplitudes

图7描述了初始振幅对系统非线性频率的影响。从图中可以看出,初始幅值的增加会增加非线性频率,但初始幅值不会改变系统失稳的临界值。图8描述了在不同幂律指数下非线性频率随流体密度的变化。随着流体密度的增加,系统的非线性频率降低。幂律指数的增加会改变系统的刚度,因此系统的非线性频率会随着幂律指数增加而降低。图9描述了在不同孔隙率下非线性频率随流体密度的变化。从图9中我们可以清楚地看到随着流体密度的增加,系统的非线性频率会减小,同时孔隙率会改变非线性频率的变化速率。

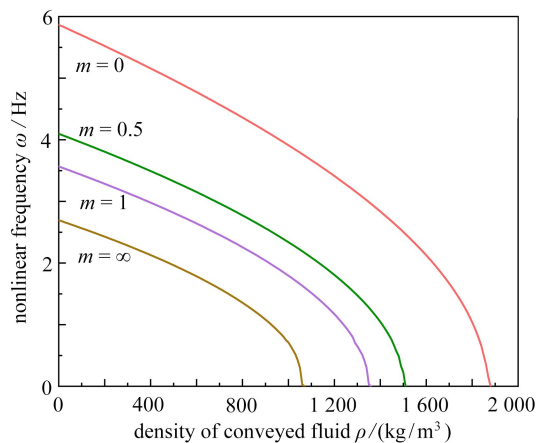


图8 不同幂律指数下非线性频率随流体密度的变化

Fig. 8 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid density under different power law indices

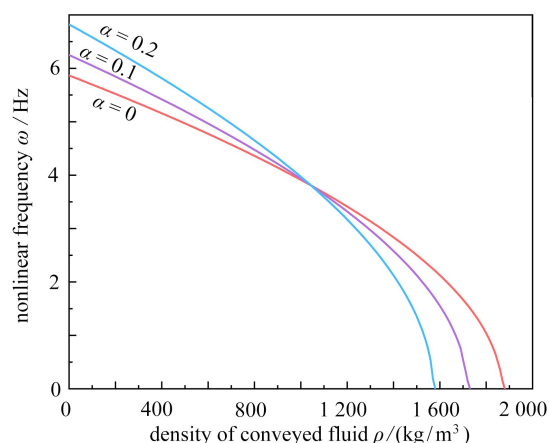


图9 不同孔隙率下非线性频率随流体密度的变化

Fig. 9 Variations of nonlinear natural frequencies with the fluid density under different porosities

5 结 论

基于HAM,本文研究了广义边界条件下含缺陷的FGM管道的非线性振动分析。基于Euler-Bernoulli梁理论和von Kármán非线性的影响,应用Hamilton原理得到运动的非线性偏微分方程,并使用Galerkin法将偏微分方程转化为运动的常微分方程。然后,利用HAM得到非线性振动频率的闭合表达式。根据数值结果,我们主要得出了以下结论:

- 1) 平移弹簧刚度系数的增加将增加系统的固有频率,但不会改变系统失稳的临界流速;扭转弹簧刚度系数的变化不仅会增加系统的固有频率,还会增加失稳的临界流速。
- 2) 幂律指数、孔隙率和流体密度都会影响系统的非线性频率。
- 3) 在非线性系统中,黏弹性系数会改变非线性系统的固有频率,但是不会改变系统失稳的临界流速。

参考文献(References):

- [1] TANG Y, YANG T, FANG B. Fractional dynamics of fluid-conveying pipes made of polymer-like materials[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, **31**(2): 243-258.
- [2] AMIRI A, MASOUMI A, TALEBITOOTI R. Flutter and bifurcation instability analysis of fluid-conveying micro-pipes sandwiched by magnetostrictive smart layers under thermal and magnetic field[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2020, **16**: 569-588.
- [3] ZHU H, WANG W, YIN X, et al. Spectral element method for vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2019, **15**(2): 345-360.
- [4] 朱晨光, 徐思朋. 功能梯度输流管的非线性自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(14): 195-201. (ZHU Chenguang, XU Sipeng. Nonlinear free vibration analysis of FG tubes conveying fluid[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(14): 195-201.(in Chinese))
- [5] 范谨铭, 常学平, 陈美. 旋转输流管中管结构强迫振动的格林函数解[J]. 振动与冲击, 2022, **41**(13): 17-25. (FAN Jinming, CHANG Xueping, CHEN Mei. Green's function solution to forced vibration of pipe-in-pipe structure in rotating flow pipe[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, **41**(13): 17-25.(in Chinese))
- [6] 马腾, 杜敬涛, 许得水, 等. 任意弹性边界支承输流管路系统耦合振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2018, **31**(3): 441-

449. (MA Teng, DU Jingtao, XU Deshui, et al. Vibration characteristics analysis of fluid-conveying pipe system with general elastic boundary supports[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, **31**(3): 441-449.(in Chinese))
- [7] 张博, 史天姿, 张贻林, 等. 旋转输液管动力稳定性理论分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(2): 166-175. (ZHANG Bo, SHI Tianzi, ZHANG Yilin, et al. Theoretical analysis on dynamic stability of rotating pipes conveying fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 166-175.(in Chinese))
- [8] 龚琳琦, 陈曦昀, 郭庆, 等. 基面力单元法在空间几何非线性问题中的应用[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(8): 785-793. (GONG Linqi, CHEN Xiyun, GUO Qing, et al. Application of the base force element method to spacial geometrically nonlinear problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 785-793.(in Chinese))
- [9] 包日东, 闻邦椿. 分析弹性支承输流管道的失稳临界流速[J]. *力学与实践*, 2007, **29**(4): 24-28. (BAO Ridong, WEN Bangchun. Analysis of critical instability flowrate of pipeline conveying fluid with elastic supports[J]. *Mechanics in Engineering*, 2007, **29**(4): 24-28.(in Chinese))
- [10] 赵千里, 孙志礼, 柴小冬. 具有弹性支承输流管路的振动分析[J]. *振动、测试与诊断*, 2017, **37**(6): 1222-1226. (ZHAO Qianli, SUN Zhili, CHAI Xiaodong. Vibration analysis of fluid conveying pipe with elastic support[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2017, **37**(6): 1222-1226.(in Chinese))
- [11] 巨维博, 顾致平, 苟兵旺. 支承刚度对输流管道振动特性的影响分析[J]. *西安工业大学学报*, 2011, **31**(7): 616-620. (JU Weibo, GU Zhiping, GOU Bingwang. Analysis of the influence of support stiffness on the vibration characteristics of flow transmission pipeline[J]. *Journal of Xi'an Technological University*, 2011, **31**(7): 616-620.(in Chinese))
- [12] BABAEI H, ESLAMI M R. Nonlinear bending analysis of size-dependent FG porous microtubes in thermal environment based on modified couple stress theory[J]. *Mechanics Based Design of Structure and Machines*, 2020, **50**(8): 2714-2735.
- [13] ZHU B, XU Q, LI M, et al. Nonlinear free and forced vibrations of porous functionally graded pipes conveying fluid and resting on nonlinear elastic foundation[J]. *Composite Structures*, 2020, **252**: 112672.
- [14] LONG V T, VAN TUNG H. Thermal nonlinear buckling of shear deformable functionally graded cylindrical shells with porosities[J]. *AIAA Journal*, 2021, **59**(6): 2233-2241.
- [15] LIU Y, QIN Z, CHU F. Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, **104**(2): 1007-1021.
- [16] SETOODEH A R, AFRAHIM S. Nonlinear dynamic analysis of FG micro-pipes conveying fluid based on strain gradient theory[J]. *Composite Structures*, 2014, **116**: 128-135.
- [17] GHAZAVI M R, MOLKI H, BEIGLOO A A. Nonlinear vibration and stability analysis of the curved microtube conveying fluid as a model of the micro coriolis flowmeters based on strain gradient theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **45**: 1020-1030.
- [18] KHODABAKHSH R, SAIDI A R, BAHADINI R. An analytical solution for nonlinear vibration and post-buckling of functionally graded pipes conveying fluid considering the rotary inertia and shear deformation effects[J]. *Applied Ocean Research*, 2020, **101**: 102277.
- [19] MASHROUTEH S, SADRI M, YOUNESIAN D, et al. Nonlinear vibration analysis of fluid-conveying microtubes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(2): 1007-1021.
- [20] DEHROUYEH-SEMNANI A M, NIKKHAH-BAHRAMI M, YAZDI M R H. On nonlinear stability of fluid-conveying imperfect micropipes[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2017, **120**: 254-271.
- [21] KHEIRI M. Nonlinear dynamics of imperfectly-supported pipes conveying fluid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, **93**: 102850.
- [22] WATSON L T. Globally convergent homotopy methods: a tutorial[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1989, **31**: 369-396.
- [23] ROITHMAYR C M, HODGES D H. Dynamics: theory and application of Kane's method[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, **11**(6): 066501.
- [24] 廖世俊. 关于非线性问题求解的同伦分析技术[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 1992. (LIAO Shijun. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai

- hai Jiao Tong University, 1992. (in Chinese))
- [25] ALI-ASGARI M, MIRDMADI H R, GHAYOUR M. Coupled effects of nano-size, stretching, and slip boundary conditions on nonlinear vibrations of nano-tube conveying fluid by the homotopy analysis method[J]. *Physica E: Low-Dimensional of Sysems and Nanostructures*, 2013, **52**: 77-85.
- [26] SETOODEH A, REZAEI M, SHAHRI M R Z. Linear and nonlinear torsional free vibration of functionally graded micro/nano-tubes based on modified couple stress theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2016, **37**(6): 725-740.
- [27] TANG Y, YANG T. Post-buckling behavior and nonlinear vibration analysis of a fluid-conveying pipe composed of functionally graded material[J]. *Composite Structures*, 2018, **185**: 393-400.
- [28] WATTANASAKULPONG N, UNGBHAKORN V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2014, **31**(1): 111-120.
- [29] EBRAHIMI F, GHASEMI F, SALARI E. Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities[J]. *Meccanica*, 2016, **51**(1): 223-249.
- [30] JIN J D, SONG Z Y. Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2005, **20**(6): 763-783.
- [31] PANDA L N, KAR R C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with parametric and internal resonances[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, **49**: 9-30.
- [32] 崔继峰. 应用同伦分析方法求解若干非线性周期振动问题[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2015. (CUI Jifeng. Applying of homotopy analysis method to some nonlinear periodic oscillation problems[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015. (in Chinese))
- [33] DENG J, LIU Y, ZHANG Z, et al. Stability analysis of multi-span viscoelastic functionally graded material pipes conveying fluid using a hybrid method[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2017, **65**: 257-270.