

# 曲率障碍下四阶变分不等式的交替方向乘子法\*

张霖森, 程 兰, 张守贵

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 对于重调和算子和曲率障碍表示的变分不等式, 提出了自适应交替方向乘子数值解法(SADMM). 对问题引入一个辅助变量表示曲率函数的增广 Lagrange 函数, 导出一个约束极小值问题, 并且该问题等价于一个鞍点问题. 然后采用交替方向乘子法(ADMM)求解这个鞍点问题. 通过采用平衡原理和迭代函数, 得到了自动调整罚参数的自适应法则, 从而提高了计算效率. 证明了该方法的收敛性, 并给出了利用迭代函数近似罚参数的具体方法. 最后, 用数值计算结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 四阶变分不等式; 曲率障碍; 交替方向乘子法; 自适应法则

**中图分类号:** O241.82      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.430243

## An Alternating Direction Multiplier Method for 4th-Order Variational Inequalities With Curvature Obstacle

ZHANG Linsen, CHENG Lan, ZHANG Shougui

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,  
Chongqing 401331, P.R.China)

**Abstract:** A self-adaptive alternating direction method of multipliers was proposed for the approximation solution of variational inequalities with biharmonic operators and curvature obstacle. An augmented Lagrange functional was introduced with an auxiliary variable to express the curvature function, and a constrained minimization problem equivalent to a saddle-point one was deduced. Then the alternating direction method of multipliers was applied to solve the saddle-point problem. By means of the balance principle and iterative functions, a self-adaptive rule was obtained to adjust the penalty parameter automatically, and improve the computation efficiency. The convergence of this method was proved and the penalty parameter approximation was given in detail with the iterative functions. The numerical results illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** 4th-order variational inequality; curvature obstacle; alternating direction multiplier method; self-adaptive rule

\* 收稿日期: 2022-07-23; 修订日期: 2022-09-19

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(11971085); 重庆市自然科学基金项目(cstc2020jcyj-msxmX0066); 重庆市研究生教育教学改革研究项目(yjg213071); 重庆市研究生科研创新项目(CYS22561)

**作者简介:** 张霖森(1997—), 男, 硕士生(E-mail: 398780730@qq.com);  
张守贵(1973—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: shgzhang@cqu.edu.cn).

**引用格式:** 张霖森, 程兰, 张守贵. 曲率障碍下四阶变分不等式的交替方向乘子法[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 595-604.

## 0 引言

迄今为止,已有很多关于各种变分不等式问题的研究<sup>[1-6]</sup>.但相对而言,关于曲率障碍的四阶椭圆变分不等式问题的研究还不多<sup>[7-9]</sup>.在这类障碍问题中,弹性膜在边界固定和垂直方向受到外力作用与曲率障碍条件下,需要确定弹性膜的平衡位置.对于这类问题的数值解法,有间断 Galerkin 方法<sup>[1]</sup>、有限元方法<sup>[3,7-8]</sup>、有限差分法<sup>[6]</sup>.交替方向乘子法(ADMM)在结构优化问题中有着广泛的应用,例如二维的变分不等式<sup>[10]</sup>、接触问题<sup>[11-12]</sup>和 Stokes 问题<sup>[13]</sup>.ADMM 的每一次迭代,只需要求解一个线性问题,而且辅助未知量和 Lagrange 乘子是显式计算的.对于任意的正参数,ADMM 都是全局收敛的.但是该方法对罚参数非常敏感,很难根据具体问题选择合适的罚参数.

本文重点分析了 ADMM 和罚参数的自适应法则求解关于单侧曲率障碍四阶变分不等式的组合算法<sup>[14-15]</sup>.首先将 ADMM 应用于求解曲率障碍问题,由于 ADMM 的收敛速度严重依赖于罚参数,为了改进算法性能,我们提出了一种自适应法则,通过平衡原理和迭代函数来选择合适的罚参数<sup>[16-17]</sup>,然后得到了一种自适应交替方向乘子算法(SADMM),并分析了该方法的收敛性.最后给出了一些数值结果来验证该方法的可行性和有效性.

## 1 单侧曲率障碍问题的 ADMM

本文考虑以下四阶椭圆变分不等式问题:给定  $f \in L^2(\Omega)$ , 求解  $u \in K$ , 使得

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in K, \quad (1)$$

其中  $\Omega$  是平面区域  $R^2$  中的有界闭区域,其边界为  $\Gamma = \partial\Omega$ , 闭凸集

$$K = \{v \in H_0^2(\Omega), \Delta v \leq 0, \text{ a.e. in } \Omega\}. \quad (2)$$

定义以下符号:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta v(x) dx, \quad \forall u, v \in H_0^2(\Omega),$$

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall u, v \in H_0^2(\Omega),$$

$$l(v) := \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

则问题(1)可以写成如下变分不等式:求解  $u \in K$ , 使得

$$a(u, v - u) \geq l(v - u), \quad \forall v \in K. \quad (3)$$

由式(3)可知式(1)是一个变分不等式问题,则式(3)有如下性质:

(i) 双线性形式  $a(\cdot, \cdot)$  是连续的  $H_0^2$ - 椭圆,使得

$$a(v, v) \geq C \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

其中  $C > 0$ ;

(ii)  $l$  是线性连续的;

(iii)  $K$  是  $H_0^2(\Omega)$  的一个闭凸非空子集.

由性质(i)、(ii)、(iii)可知,问题(1)存在唯一解.

由于双线性形式  $a(\cdot, \cdot)$  是对称的,故变分不等式问题(1)等价于如下变分形式的极小值问题:求解  $u \in K$ , 使得

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K, \quad (4)$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - l(v). \quad (5)$$

由式(1)、(4)和文献[8]定义如下 Lagrange 函数  $L: H^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$L(v, \mu) = J(v) + \int_{\Omega} \mu \Delta v dx \quad (6)$$

和函数空间

$$L_+^2(\Omega) = \{q \mid q \in L^2(\Omega), q(x) \geq 0\}, \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (7)$$

**引理 1** 令  $\{u, \lambda\} \in H_0^2(\Omega) \times L_+^2(\Omega)$  是  $L$  在  $H_0^2(\Omega) \times L_+^2(\Omega)$  上的鞍点, 则  $u$  是问题(1)和(4)的解, 而且有

$$\int_{\Omega} (\Delta u)(\mu - \lambda) dx \leq 0, \quad \forall \mu \in L_+^2(\Omega), \quad (8)$$

$$a(u, v) = (f, v) - \int_{\Omega} \lambda \Delta v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (9)$$

**证明** 根据鞍点的定义, 我们有: 对任意  $\{u, \lambda\} \in H_0^2(\Omega) \times L_+^2(\Omega)$  和  $\{v, \mu\} \in H_0^2(\Omega) \times L_+^2(\Omega)$  满足

$$L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda). \quad (10)$$

由式(10)中  $L(u, \mu) \leq L(u, \lambda)$  直接得到的结论(8), 可以推出

$$\Delta u \leq 0, \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \lambda \Delta u dx = 0, \quad (12)$$

则

$$L(u, \lambda) = J(u). \quad (13)$$

在此基础上, 考虑增广 Lagrange 乘法. 我们观察到, 问题(1)和(4)都等价于: 求解  $\{u, p\} \in H$ , 使得

$$j(u, p) \leq j(v, q), \quad \forall \{v, q\} \in H, \quad (14)$$

其中

$$j(v, q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |q|^2 dx - (f, v), \quad (15)$$

$$H = \{ \{v, q\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \Delta v - q = 0, q \leq 0, \text{ a.e. in } \Omega \}. \quad (16)$$

对于  $\rho > 0$ , 由增广 Lagrange 乘法

$$L_{\rho}: ((H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)) \times L^2(\Omega)) \rightarrow \mathbf{R}$$

定义

$$L_{\rho}(v, q, \mu) = j(v, q) + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\Delta v - q|^2 dx + \int_{\Omega} \mu (\Delta v - q) dx. \quad (17)$$

接着定义

$$\hat{K} = \{q \mid q \in L^2(\Omega), q(x) \leq 0, \text{ a.e. in } \Omega\}, \quad (18)$$

$\hat{K}$  显然是一个闭凸非空子集. 则有如下结果<sup>[8]</sup>.

**引理 2** 如果  $\{u, p, \lambda\}$  是  $L_{\rho}$  在  $H_0^2(\Omega) \times \hat{K} \times L^2(\Omega)$  上的一个鞍点, 则  $u$  是问题(1)和问题(4)的解, 且  $p = \Delta u$ <sup>[2]</sup>.

根据引理 2 和文献[2]中的 ADMM, 我们可以通过寻找  $L_{\rho}$  的鞍点得到式(2)的解. 该方法通过鞍点问题表示的极小化问题依次计算  $p^{n+1}, u^{n+1}$ , 然后更新 Lagrange 乘子得到  $\lambda^{n+1}$ . 给定初始函数  $\{u^0, \lambda^0\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \rho > 0$ :

求解  $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ , 使得

$$L_{\rho}(u^n, p^{n+1}, \lambda^n) \leq L_{\rho}(u^n, q, \lambda^n), \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (19)$$

求解  $u^{n+1} \in H_0^2(\Omega)$ , 使得

$$L_{\rho}(u^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^n) \leq L_{\rho}(v, p^{n+1}, \lambda^n), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (20)$$

更新 Lagrange 乘子, 得到

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho(\Delta u^{n+1} - p^{n+1}). \quad (21)$$

在这种方法中, 最小化问题(19)中的  $p^{n+1}$  可以由  $u^n$  和  $\lambda^n$  显式求解. 最小化问题(20)形成一个变分问

题,对于给定的  $\lambda^n, p^{n+1}$  和  $\rho > 0$ , 该变分问题具有唯一的解.因此,我们得到下面的 ADMM<sup>[10,16]</sup>.

### 算法 1(ADMM)

第一步 给定初始函数  $\lambda^0 \in L^2(\Omega), u^0 \in H_0^2(\Omega), \rho > 0$ , 置  $n := 0$ .

第二步 计算辅助变量  $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ ,

$$p^{n+1} = \Delta u^n + \frac{1}{\rho}[\lambda^n - (\lambda^n + \rho \Delta u^n)^+]. \quad (22)$$

第三步 求解  $u^{n+1} \in H_0^2(\Omega)$ ,

$$a(u^{n+1}, v) + \rho(\Delta u^{n+1}, \Delta v) = l(v) + (\lambda^n - \rho p^{n+1}, -\Delta v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (23)$$

第四步 更新 Lagrange 乘子

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho(\Delta u^{n+1} - p^{n+1}). \quad (24)$$

第五步 给定某种迭代终止条件,如果满足该条件,则停止迭代得到数值解  $(u^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^{n+1})$ ; 否则,置  $n := n + 1$ , 返回第二步.

## 2 单侧曲率障碍问题的 SADMM

对于算法 1,我们注意到它对于任何固定参数  $\rho > 0$  都是无条件收敛的.然而,如果参数太小或太大,该方法的效率将大大降低.为了改进 ADMM 的性能,我们提出了一个可变参数  $\rho_n$  的自适应规则.下面我们假设一个非负序列  $\{s_n\}$  满足

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty. \quad (25)$$

在此基础上,我们提出 SADMM,具体算法过程如下<sup>[11]</sup>.

### 算法 2(SADMM)

第一步 给定初始函数  $\lambda^0 \in L^2(\Omega), u^0 \in H_0^2(\Omega), \rho > 0$ , 置  $\rho_0 = \rho, n := 0$ .

第二步 计算辅助变量  $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ ,

$$p^{n+1} = \Delta u^n + \frac{1}{\rho_n}[\lambda^n - (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+]. \quad (26)$$

第三步 求解  $u^{n+1} \in H_0^2(\Omega)$ ,

$$a(u^{n+1}, v) + \rho_n(\Delta u^{n+1}, \Delta v) = l(v) + (\lambda^n - \rho_n p^{n+1}, -\Delta v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (27)$$

第四步 更新 Lagrange 乘子

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n(\Delta u^{n+1} - p^{n+1}). \quad (28)$$

第五步 选取罚参数,使得

$$\frac{1}{1+s_n} \rho_n < \rho_{n+1} \leq (1+s_n) \rho_n. \quad (29)$$

关于算法 2 中第五步罚参数的选取将在算例分析部分详细说明.为了证明算法 2 的收敛性,需要如下的基本结论.

**引理 3** 如果序列  $\{s_n\}$  满足  $s_n \geq 0$ , 并且  $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty$ , 则  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+s_n) < +\infty$ .

**证明** 因为  $s_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty$ , 所以  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n s_k < +\infty$ . 则由均值不等式和重要极限有

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1+s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1+s_k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (1+s_k) \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n s_k \right)^{n / \sum_{k=0}^n s_k} \right)^{\sum_{k=0}^n s_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{k=0}^n s_k} < +\infty.$$

定义以下符号:

$$C_s := \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + s_n).$$

由算法 2 的第五步可知罚参数  $\rho_n \in \left[ \frac{1}{C_s} \rho_0, C_s \rho_0 \right]$  是有界的, 设

$$\rho_L := \inf \{ \rho_n \}_{n=0}^{+\infty} > 0, \rho_U := \sup \{ \rho_n \}_{n=0}^{+\infty} > 0.$$

根据问题的性质和算法的原理, 可得算法 2 的收敛性结果.

**定理 1** 设  $\{u^n, p^n, \lambda^n\}$  是算法 2 产生的序列, 则

$$2\rho_n(\delta\lambda^n, -\delta\Delta u^n) + \rho_n^2 \|\Delta u^n - p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\delta\lambda^{n+1} - \rho_n \delta\Delta u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{30}$$

其中  $p = \Delta u$ .

**证明** 令  $\delta u^n = u^n - u, \delta\Delta u^n = \Delta u^n - \Delta u, \delta\rho^n = \rho^n - \rho, \delta\lambda^n = \lambda^n - \lambda$ . 由式(9)和(23), 有

$$\begin{cases} a(u, v) = (f, v) - \int_{\Omega} \lambda \Delta v dx, & \forall v \in H_0^2(\Omega), \\ a(u^{n+1}, v) + \rho_n(\Delta u^{n+1}, \Delta v) = l(v) + (\lambda^n - \rho_n p^{n+1}, -\Delta v), & \forall v \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

在以上两式中取  $v = \delta\Delta u^{n+1}$ , 将它们相减得到

$$a(\delta u^{n+1}, \delta u^{n+1}) = (\delta\lambda^n + \rho_n(\Delta u^{n+1} - p^{n+1}), -\delta\Delta u^{n+1}), \tag{31}$$

在式(31)中, 用  $p = \Delta u$ , 我们得到

$$a(\delta u^{n+1}, \delta u^{n+1}) = (\delta\lambda^n + \rho_n(\delta\Delta u^{n+1} - \delta p^{n+1}), -\delta\Delta u^{n+1}). \tag{32}$$

根据式(28), 有

$$\delta\lambda^{n+1} = \delta\lambda^n + \rho_n(\delta\Delta u^{n+1} - \delta p^{n+1}).$$

因此  $a(\cdot, \cdot)$  是  $H_0^2$ -椭圆, 所以由式(31)可以得出

$$a(\delta u^{n+1}, \delta u^{n+1}) = (\delta\lambda^{n+1}, -\delta\Delta u^{n+1}) \geq \alpha \|\delta u^{n+1}\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq 0. \tag{33}$$

从引理 1 的式(11)和(12), 有  $\lambda \geq 0, -\Delta u \geq 0$ , 且在  $\Omega$  上  $(-\Delta u, \lambda) = 0$ , 因此可以得到

$$\rho_n(-\Delta u, (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+ - \lambda) \geq 0, \tag{34}$$

又有

$$(\lambda^n + \rho_n \Delta u^n - (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+, (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+ - \lambda) \geq 0. \tag{35}$$

结合式(34)和(35), 有

$$(\lambda^n + \rho_n \delta\Delta u^n - (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+, (\lambda^n + \rho_n \Delta u^n)^+ - \lambda) \geq 0.$$

再根据式(26), 可得到

$$(-\rho_n(\Delta u^n - p^{n+1}) + \rho_n \delta\Delta u^n, \delta\lambda^n + \rho_n(\Delta u^n - p^{n+1})) \geq 0,$$

因此

$$\rho_n(\delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n, \Delta u^n - p^{n+1}) \leq -\rho_n(\delta\lambda^n, -\delta\Delta u^n) - \rho_n^2 \|\Delta u^n - p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{36}$$

根据式(28), 可得到

$$\delta\lambda^{n+1} - \rho_n \delta\Delta u^{n+1} = \delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n + \rho_n(\Delta u^n - p^{n+1}).$$

最后, 由式(36)得到

$$\begin{aligned} \|\delta\lambda^{n+1} - \rho_n \delta\Delta u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \\ &\|\delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_n^2 \|\Delta u^n - p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_n(\delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n, \Delta u^n - p^{n+1}) \leq \\ &\|\delta\lambda^n - \rho_n \delta\Delta u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \rho_n^2 \|\Delta u^n - p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_n(\delta\lambda^n, -\delta\Delta u^n). \end{aligned}$$

因此, 该定理得证.

**定理 2** 算法 2 生成的序列  $\{u^n, p^n, \lambda^n\}$  收敛于  $\{u, p, \lambda\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , 且  $p = \Delta u$ .

**证明** 根据  $s_n \geq 0, 0 \leq \rho_{n+1} \leq (1 + s_n)\rho_n$  和式(33), 有

$$\|\delta\lambda^{n+1} - \rho_{n+1} \delta\Delta u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 =$$

$$\begin{aligned} & \| \delta \lambda^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{n+1}^2 \| \delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_{n+1}(\delta \lambda^{n+1}, -\delta \Delta u^{n+1}) \leq \\ & (1+s_n)^2 \| \delta \lambda^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_n^2(1+s_n)^2 \| \delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_n(1+s_n)(\delta \lambda^{n+1}, -\delta \Delta u^{n+1}) = \\ & (1+s_n)^2 \| \delta \lambda^{n+1} - \rho_n \delta \Delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

将式(30)代入式(37),有

$$\begin{aligned} & \| \delta \lambda^{n+1} - \rho_{n+1} \delta \Delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_n)^2 \| \delta \lambda^n - \rho_n \delta \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_n(1+s_n)^2(\delta \lambda^n, -\delta \Delta u^n) - \\ & \rho_n^2(1+s_n)^2 \| \Delta u^n - p^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_n)^2 \| \delta \lambda^n - \rho_n \delta \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_n(\delta \lambda^n, -\delta \Delta u^n) - \rho_n^2 \| \Delta u^n - p^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (38)$$

令  $\xi_n := 2s_n + s_n^2$ , 由引理3可知  $\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n < +\infty$ ,  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + \xi_n) < +\infty$ . 定义以下符号:

$$C_0 := \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n, \quad C_p := \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + \xi_n).$$

由式(33)和(38),可得

$$\begin{aligned} & \| \delta \lambda^{n+1} - \rho_{n+1} \delta \Delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \prod_{i=0}^n (1 + \xi_i) \| \delta \lambda^0 - \rho_0 \delta \Delta u^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & C_p \| \delta \lambda^0 - \rho_0 \delta \Delta u^0 \|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall n \geq 1, \end{aligned} \quad (39)$$

即存在一个常数  $C > 0$ ,使得对于任意的  $n \geq 0$ ,有

$$\| \delta \lambda^n - \rho_n \delta \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (40)$$

根据式(38),我们也可以得出

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n (\delta \lambda^n, -\delta \Delta u^n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^2 \| \Delta u^n - p^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \| \delta \lambda^0 - \rho_0 \delta \Delta u^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \| \delta \lambda^n - \rho_n \delta \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (41)$$

由式(33)、(40)和(41),有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} 2\alpha\rho_L \| \delta u^n \|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_L^2 \| \Delta u^n - p^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \| \delta \lambda^0 - \rho_0 \delta \Delta u^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \| \delta \lambda^n - \rho_n \delta \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & C + C \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \leq (1 + C_0)C. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \delta u^n \|_{H_0^2(\Omega)}^2 = 0. \quad (42)$$

故在  $H_0^2(\Omega)$  上,  $u^n \rightarrow u$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \Delta u^n - p^{n+1} \|_{H_0^2(\Omega)}^2 = 0. \quad (43)$$

因为  $p = \Delta u$ , 再结合式(43),可以得到

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \| p^{n+1} - p \|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \| p^{n+1} - \Delta u \|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \| p^{n+1} - \Delta u^n \|_{L^2(\Omega)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \| \Delta u^n - \Delta u \|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

因此,在  $L^2(\Omega)$  上,  $p^n \rightarrow p$ .

对于  $\forall n \geq 1$ , 由式(39),有

$$\begin{aligned} & \| \delta \lambda^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \rho_{n+1} \delta \Delta u^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_{n+1}(\delta \lambda^{n+1}, -\delta \Delta u^{n+1}) \leq \\ & C_p \| \delta \lambda^0 - \rho_0 \delta \Delta u^0 \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (45)$$

根据式(33)和(45)可知  $\{\lambda^n\}$  是有界的,可得  $\lambda^n \rightarrow \lambda$ .

注 1 在算法 2 的第五步中令  $s_n = 0$ , 有  $\rho_n = \rho_0$ , 则算法 2 中罚参数为固定参数, 即为算法 1, 从而可以得算法 1 也是收敛的.

### 3 算例分析

本文利用自适应交替方向乘子算法求解四阶单侧曲率障碍的变分不等式问题, 迭代过程中通过迭代函数自动调整罚参数, 用变参数  $\rho_n$  代替  $\rho$ , 从而达到提高算法效率的目的<sup>[2,10,13]</sup>. 下面具体考虑算法 2 (SADMM) 中选择罚参数  $\rho_n$  的自适应法则. 根据算法的收敛性证明式 (30) 知下式成立:

$$\|\lambda^{n+1} - \lambda - \rho_n(\Delta u^{n+1} - \Delta u)\| \leq \|\lambda^n - \lambda - \rho_n(\Delta u^n - \Delta u)\|.$$

利用平衡加快收敛, 我们希望

$$\|\lambda^n - \lambda\| \approx \|\rho_n(\Delta u^n - \Delta u)\|.$$

使用以下方法来确定合适的参数  $\rho_n$ , 给定常数  $\mu > 0$ , 如果

$$\|\lambda^n - \lambda\| > (1 + \mu) \|\rho_n(\Delta u^n - \Delta u)\|,$$

那么在下次迭代的时候要增加  $\rho_n$ ; 如果

$$\|\lambda^n - \lambda\| < \frac{1}{1 + \mu} \|\rho_n(\Delta u^n - \Delta u)\|,$$

那么在下次迭代的时候要减小  $\rho_n$ . 即令  $\omega_n = \frac{\|\rho_n(\Delta u^n - \Delta u)\|}{\|\lambda^n - \lambda\|}$ , 然后让

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} (1 + s_n)\rho_n, & \omega_n < \frac{1}{1 + \mu}, \\ \frac{1}{1 + s_n}\rho_n, & \omega_n > \frac{1}{1 + \mu}, \\ \rho_n, & \text{others.} \end{cases}$$

为了分析算法收敛, 构造一个非负序列  $\{s_n\}$ , 使其满足  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n < +\infty$ . 下面给出了构造序列  $\{s_n\}$  的具体过程.

用  $c_n$  计算  $\rho_n$  改变的次数, 令  $c_0 = 0$ , 则

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_n, & \frac{1}{1 + \mu} \leq \omega_n \leq 1 + \mu, \\ c_n + 1, & \text{others.} \end{cases}$$

采用如下方法得到非负序列  $\{s_n\}$ :

$$s_n = \begin{cases} \mu, & c_n < c_{n+1}, c_{n+1} \leq c_{\max}, \\ \frac{1}{(c_{n+1} - c_{\max})^2} \rho_n, & c_n < c_{n+1}, c_{n+1} > c_{\max}, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

对于给定的整数  $c_{\max} > 0$ , 很容易知道由以上方法得到的非负序列  $\{s_n\}$  满足  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n < +\infty$ . 在数值算例中, 我们取  $\mu = 2, c_{\max} = 100$ .

为了检验本文算法的可行性, 这里根据具体的算例进行数值分析. 考虑一个具体的障碍问题: 求解  $u \in K$ , 使得

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in K,$$

其中  $\Omega = (0, 1)^2, f = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ , 这个问题的解析解为  $u = \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ <sup>[15]</sup>.

采用本文的 ADMM 和 SADMM 两种方法进行求解, 取步长  $h = 1/40$  和参数  $\rho = 1, u$  和  $-\Delta u$  的数值解结

果如图 1 和图 2 所示,解析解如图 3 所示,图 4 为逐点误差,可见数值解和精确解是吻合的.

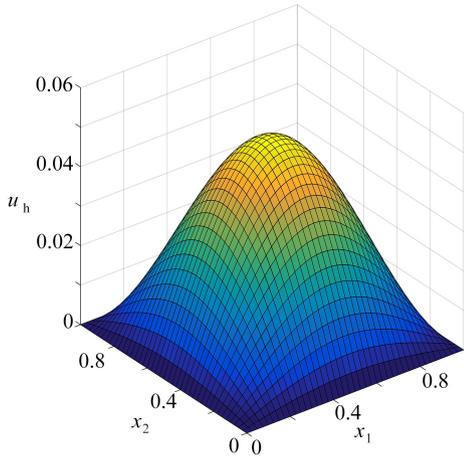


图 1  $u$  的数值解

Fig. 1 Numerical solutions of  $u$

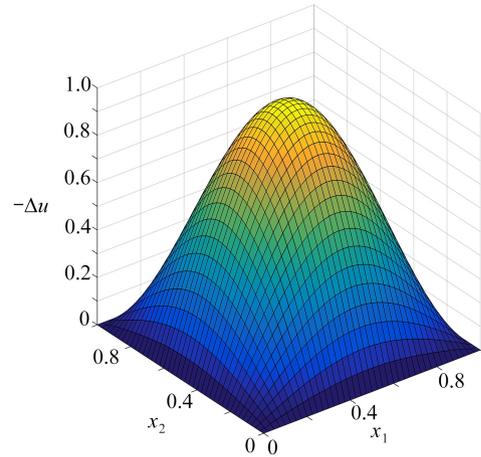


图 2  $-\Delta u$  的数值解

Fig. 2 Numerical solutions of  $-\Delta u$

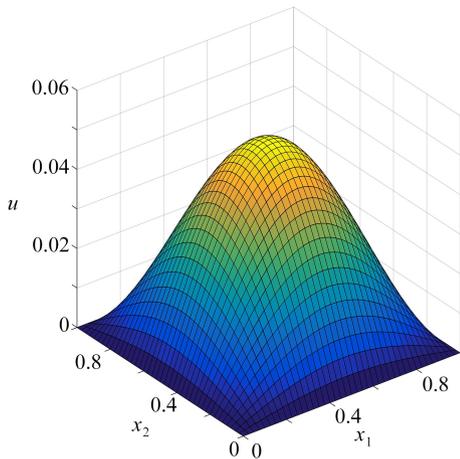


图 3 精确解  $u$

Fig. 3 Analytical solutions of  $u$

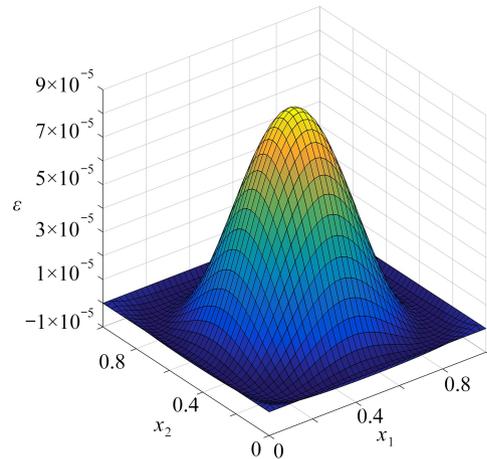


图 4 逐点误差

Fig. 4 Pointwise errors between numerical and analytical solutions

对于不同的初始罚参数取值  $\rho$ , 表 1 分别对步长  $h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$  时 ADMM 和 SADMM 所需的迭代次数进行了比较,表中 \* 表示迭代达到了最大迭代次数 200 后即停止.表 2 分别给出了迭代所需的 CPU 运行时间,单位为 s.表 1 和表 2 的结果表明,SADMM 不仅有效减少了迭代次数,收敛速度更快,而且很稳定.SADMM 的收敛速度和 CPU 运行时间受初始参数  $\rho$  的影响很小.

表 1 算法随步长变化所需迭代次数的情况

Table 1 The numbers of iterations required for the algorithm to change with the step size

$\rho$	algorithm 1 (ADMM)				algorithm 2 (SADMM)			
	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$
$10^{-2}$	*	*	*	*	25	28	24	28
$10^{-1}$	*	*	*	*	26	34	29	34
$10^0$	47	59	93	101	30	39	33	39
$10^1$	*	*	*	*	32	41	35	41
$10^2$	*	*	*	*	33	42	36	42
$10^3$	*	*	*	*	34	43	37	43
$10^4$	*	*	*	*	35	44	38	44

表 2 算法随步长变化所需 CPU 时间情况

Table 2 CPU times required for the algorithm to change with the step size

$\rho$	algorithm 1 (ADMM)				algorithm 2 (SADMM)			
	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$
$10^{-2}$	*	*	*	*	0.117 5	0.255 1	1.911 9	80.095 4
$10^{-1}$	*	*	*	*	0.020 0	0.174 4	2.126 9	95.011 4
$10^0$	0.035 5	0.276 9	6.770 4	280.995 9	0.021 8	0.178 1	2.521 3	109.381 1
$10^1$	*	*	*	*	0.024 8	0.168 2	2.647 1	114.965 5
$10^2$	*	*	*	*	0.024 2	0.181 6	2.620 6	117.895 8
$10^3$	*	*	*	*	0.024 3	0.172 3	2.791 4	120.384 8
$10^4$	*	*	*	*	0.025 6	0.183 3	2.875 5	123.236 0

## 4 结 论

本文提出了求解四阶单侧曲率障碍变分不等式问题的 SADMM. 先引入辅助函数和 Lagrange 函数, 将问题转化为鞍点问题, 使用 ADMM 求解. 为了提高计算效率, 通过平衡原理和迭代函数, 迭代过程使用自适应法则选取合适的罚参数. 数值算例的结果表明, 参数对 SADMM 影响较小, 该方法加快了收敛速度, 且较为稳定. 该方法还可以推广到四阶双侧曲率障碍问题的数值求解中.

**致谢** 本文作者衷心感谢重庆师范大学教学改革研究项目(xyjg007;sz202114)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] CUI J T, ZHANG Y. A new analysis of discontinuous Galerkin methods for a fourth order variational inequality [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **351**(1): 531-547.
- [2] 郭楠馨, 张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(6): 682-693. (GUO Nanxin, ZHANG Shougui. Self-adaptive Uzawa block relaxation method for the free boundary problem [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 682-693. (in Chinese))
- [3] GUSTAFSSON T, STENBERG R, VIDEMAN J. A stabilized finite element method for the plate obstacle problem[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2019, **59**(1): 97-124.
- [4] LI M, GUAN X, MAO S. New error estimates of the Morley element for the plate bending problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, **26**(3): 405-416.
- [5] 饶玲. 单调迭代结合虚拟区域法求解非线性障碍问题[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(4): 485-492. (RAO Ling. Monotone iterations combined with fictitious domain methods for numerical solution of nonlinear obstacle problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 485-492. (in Chinese))
- [6] 王霄婷, 龙宪军, 彭再云. 求解非单调变分不等式的一种二次投影算法[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(8): 927-934. (WANG Xiaoting, LONG Xianjun, PENG Zaiyun. A double projection algorithm for solving non-monotone variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 927-934. (in Chinese))
- [7] AL-SAID E A, NOOR M A, KAYA D. Finite difference method for solving fourth-order obstacle problems[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2004, **81**(6): 741-748.
- [8] GLOWINSKI R, MARINI L D, VIDRASCU M. Finite-element approximations and iterative solutions of a fourth-order elliptic variational inequality[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1984, **4**(2): 127-167.
- [9] SHI D Y, CHEN S C, HAGIWARA I. Highly nonconforming finite element approximations for a fourth order variational inequality with curvature obstacle[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2005, **18**(1): 136-142.
- [10] ZHANG S G, GUO N X. Uzawa block relaxation method for free boundary problem with unilateral obstacle [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2021, **98**(4): 671-689.

- [11] ESSOUFI E H, KOKO J, ZAFRAR A. Alternating direction method of multiplier for a unilateral contact problem in electro-elastostatics[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2017, **73**(8): 1789-1802.
- [12] KOKO J. Uzawa block relaxation method for the unilateral contact problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 2343-2356.
- [13] 张茂林, 冉静, 张守贵. 具有滑动边界条件 Stokes 问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(2): 188-198. (ZHANG Maolin, RAN Jing, ZHANG Shougui. A self-adaptive Uzawa block relaxation method for Stokes problems with slip boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(2): 188-198. (in Chinese))
- [14] ICHIRO H. Highly nonconforming finite element approximations for a fourth order variational inequality with curvature obstacle[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2005, **18**(1): 136-142.
- [15] CAO W, YANG D. Adaptive optimal control approximation for solving a fourth-order elliptic variational inequality[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2014, **66**(12): 2517-2531.
- [16] GLOWINSKI R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [17] SCHOLZ R. Mixed finite element approximation of a fourth order variational inequality by the penalty method [J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2007, **9**(3/4): 233-247.