

一类 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的 三次 B 样条方法*

胡行华, 蔡俊迎

(辽宁工程技术大学 理学院, 辽宁 阜新 123000)

摘要: 基于分数阶微积分基本定理和三次 B 样条理论, 构造了求解线性 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解的三次 B 样条方法, 利用分数阶微积分基本定理将初值问题转化为关于解函数的表达式, 再使用三次 B 样条函数逼近表达式中积分项的被积函数, 进而计算了一类 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的数值解. 给出了所构造的三次 B 样条方法的误差估计、收敛性和稳定性的理论证明. 数值实验表明, 该文数值方法在求解一类 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解时具有一定的可行性和有效性, 且计算精度和计算效率优于现有的两种数值方法.

关键词: Caputo-Fabrizio 分数阶导数; 三次 B 样条方法; 误差估计; 收敛性; 稳定性

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430195

The Cubic B-Spline Method for a Class of Caputo-Fabrizio Fractional Differential Equations

HU Xinghua, CAI Junying

(School of Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, P.R.China)

Abstract: Based on the basic theorem of fractional calculus and the cubic B-spline theory, the cubic B-spline method for numerical solution of linear Caputo-Fabrizio fractional differential equations was proposed. The basic theorem of fractional calculus was used to transform the initial value problem into an expression about the solution function, and the cubic B-spline function was used to approximate the integrand function in the expression. Then the numerical solutions of the Caputo-Fabrizio fractional differential equations were calculated. The error estimation, convergence and stability of the constructed cubic B-spline method were given theoretically. Numerical experiments show that, the presented numerical method is feasible and effective in solving a class of Caputo-Fabrizio fractional differential equations, and the computation accuracy and efficiency are better than the 2 existing numerical methods.

Key words: Caputo-Fabrizio fractional derivative; cubic B-spline method; error estimation; convergence; stability

* 收稿日期: 2022-06-07; 修订日期: 2022-08-24

基金项目: 辽宁省自然科学基金项目(2020-MS-301); 教育部人文社会科学研究项目(2021YJCZH204); 辽宁省教育厅高等学校基本科研项目(LJ2019JL005; LJ2020ZD002; 2022lslwtk-069)

作者简介: 胡行华(1978—), 男, 副教授, 硕士生导师(E-mail: 121681692@qq.com);
蔡俊迎(1998—), 女, 硕士生(通讯作者. E-mail: caijy0302@163.com).

引用格式: 胡行华, 蔡俊迎. 一类 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的三次 B 样条方法[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(6): 744-756.

0 引 言

由于分数阶微分方程的非局部性可用来描述不同物质的“记忆性”和“遗传性”等物理特征,因此,其在众多科学和工程领域中具有重要的应用价值.分数阶导数有多种定义,较为常用的是 Caputo 型定义,作为弱奇异的分数阶导数定义, Caputo 型定义比其他经典定义更适合于分数阶微分方程的描述,在进行 Laplace 变换时,其物理意义更加明确,因此,众多学者对 Caputo 型分数阶微分方程进行了广泛研究^[1-2],但缺点是其定义中存在一个奇异核.2015 年, Caputo 和 Fabrizio^[3-4]提出了一个新的分数阶导数定义,即 Caputo-Fabrizio 型定义,其为指数函数与一阶导数的卷积,不存在奇异项,修正后的定义形式^[5]如下:

$${}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau,$$

其中, $\alpha \in (0,1)$, $t \in [0, T]$, ${}^{\text{CF}}D_t^\alpha$ 为 Caputo-Fabrizio 定义下的分数阶微分算子.与 Caputo 分数阶导数相比,新的导数在材料应用领域中具有一些好的特性^[6-7]: ① 已经证明材料的异质性和不同尺度的波动可以用 Caputo-Fabrizio 分数阶导数来具体描述,但不能用著名的局部理论或具有奇异核的分数阶导数来很好地描述; ② Caputo-Fabrizio 分数阶导数可以用来研究与原子间非局部通信相关的某些材料的宏观行为.鉴于此,该定义下的分数阶微分方程在生物学^[8-9]、经济学^[10]、物理学^[11]、流体力学^[12]、黏弹性材料^[13]等众多科学和工程领域中均具有广泛的应用.本文将研究如下分数阶微分方程初值问题:

$$\begin{cases} {}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\alpha \in (0,1)$, $f(t) \in C[0, T]$ 为线性光滑函数,且问题(1)存在唯一解 $u(t)$.

然而,对于一般的右端项,通常很难获得精确解,因此在该定义下,方程数值方法的研究显得很有必要.许多学者对此展开了研究,2017 年, Owolabi 等^[6]提出了线性和非线性具有 Caputo-Fabrizio 导数的分数阶微分方程的三步 Adams-Bashforth 格式,该格式具有条件稳定性.2020 年, Cao 等^[14]针对 Caputo-Fabrizio 型分数阶常微分方程,构造了一种改进 block-by-block 算法. Guo 等^[15]基于 Lagrange 多项式,提出了求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的有限差分方法.2021 年, Al-Smadi 等^[16]提出了一个 Caputo-Fabrizio 型非线性分数阶 Abel 微分方程的再生核方法,该方法具有较好的稳定性. Douaifia 等^[17]基于 Newton 插值提出了一种适用于 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的预测-校正数值格式.何广婷^[18]提出了一种基于 L2 方案和递推关系的快速高阶数值方法,求解 Caputo-Fabrizio 型的分数阶常微分方程,该算法大大降低了存储容量和总计算成本.

通过现有文献发现,这些数值方法还存在一些不足之处:求解效率较低,求解精度有待进一步提高等.众所周知,样条插值函数非常接近被插值函数^[19],而三次 B 样条函数具有计算简单、稳定性、收敛性有保证且易于在计算机上实现等优点,可以克服现有方法的缺点.本文基于分数阶微积分基本定理和三次 B 样条函数构造 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的数值格式,并对所构造的三次 B 样条方法的误差进行估计,对收敛性和稳定性进行理论证明.数值实验表明,三次 B 样条方法具有一定的可行性和有效性,在计算精度和计算效率上具有明显优势.

1 基础知识

1.1 Caputo-Fabrizio 分数阶导数的基本定义

下面,给出 Caputo 分数阶导数具体的定义形式.

定义 1^[20] 函数 $u(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u'(\tau) d\tau, \quad (2)$$

其中, $u(t) \in H^1(0, b)$, $b > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数.

2015 年, Caputo 和 Fabrizio^[3]提出了一个具有光滑核的分数阶导数新定义,其定义如下.

定义 2^[3] 令 $u(t) \in H^1(0, b)$, $b > 0$, 并且 $\alpha \in (0,1)$, 通过用函数 $\exp(-\alpha(t-\tau)/(1-\alpha))$ 替换核 $(t-\tau)^{-\alpha}$, 用 $M(\alpha)/(1-\alpha)$ 替换 $1/\Gamma(1-\alpha)$, 函数 $u(t)$ 的 α 阶 Caputo-Fabrizio 分数阶导数定义为

$${}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau, \quad (3)$$

其中, $M(\alpha)$ 是一个标准化函数. 与式(2)相比, 新定义在 $t = \tau$ 时无奇异核.

Losada 和 Nieto^[5] 对 Caputo-Fabrizio 分数阶导数进行了修正, 首先有以下定义.

定义 3^[5] 假设 $u(t) \in H^1(0, b)$, $\alpha \in (0, 1)$, 将 Caputo-Fabrizio 分数阶导数定义为

$${}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t u'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau. \quad (4)$$

Losada 和 Nieto^[5] 提供了 $M(\alpha)$ 的一个显式公式: $M(\alpha) = 2/(2-\alpha)$. 将 $M(\alpha)$ 的显式公式代入式(4), 即得式(3)修正后的公式^[5]:

$${}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau. \quad (5)$$

接下来, 对于一个一般的 $\alpha, \alpha \in (0, 1)$ 阶 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程(1), 利用分数阶微积分基本定理^[5] 可将其转换为

$$u(t) = u(0) + \alpha \int_0^t f(\tau) d\tau + (1-\alpha)f(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

由上式易得, 当且仅当 $f(0) = 0$ 时, 式(1)中的 $u(t)$ 满足初始条件 $u(0) = u_0$. 鉴于此, 求解式(1)的数值解即转化为逼近式(6)右端项中积分的问题.

1.2 m 次 B 样条插值函数

将区间 $[0, T]$ 剖分成等距的 N 个小区间, 对于给定的任一整数 $N > 0$, 其小区间的步长为 $h = T/N$. 对于 $j = 0, 1, \dots, N, t_j = jh$, 并且 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. 对于任意整数 $m \geq 1, m$ 次样条插值函数^[21] 如下:

$$S_m(t) = \sum_{j=0}^{N+m-1} \beta_j B_j^m(t), \quad (7)$$

其中, 样条函数 $S_m(t) \in C^{m-1}[0, T]$, β_j 为常数, $B_j^m(t)$ 为第 j 个 m 次的 B 样条基函数, 简称 B 样条基函数.

B 样条基函数 $B_j^m(t)$ 有如下的递推关系^[22]:

$$B_j^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0, & \text{others,} \end{cases} \quad (8)$$

$$B_j^m(t) = \left(\frac{t-t_j}{t_{j+m}-t_j}\right) B_j^{m-1}(t) + \left(\frac{t_{j+m+1}-t}{t_{j+m+1}-t_{j+1}}\right) B_{j+1}^{m-1}(t), \quad m \geq 1. \quad (9)$$

在 m 次 B 样条插值函数中, 相比于低次和高次的 B 样条函数, 三次 B 样条函数具有需要较少的信息、精度高、计算简单和易于实现编程的优势^[23]. 因此, 本文使用三次 B 样条函数求解一类 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程.

2 三次 B 样条方法数值格式的构造

首先, 考虑右端项与 $u(t)$ 无关的线性初值问题(1), 即

$$\begin{cases} {}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (10)$$

使用三次 B 样条插值函数 $S_3(\tau)$ 来近似代替式(6)中积分里的函数 $f(\tau)$, 可得

$$\begin{aligned} u(t_k) &= u(0) + \alpha \int_0^{t_k} f(\tau) d\tau + (1-\alpha)f(t_k) \approx \\ &u(0) + \alpha \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} S_3(\tau) d\tau + (1-\alpha)f(t_k) = \\ &u(0) + \frac{\alpha}{6h^3} \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\beta_{j-1}(t_j - \tau)^3 + \beta_j(h^3 + 3h^2(t_j - \tau) + 3h(t_j - \tau)^2 - 3(t_j - \tau)^3) + \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha)[u(t_k) + g(t_k)] = u(0) + \frac{\alpha h}{24} \sum_{j=1}^k (\tilde{\beta}_{j-1} + 11\tilde{\beta}_j + 11\tilde{\beta}_{j+1} + \tilde{\beta}_{j+2}) + (1 - \alpha)[u(t_k) + g(t_k)].$$

令 $u_k \approx u(t_k)$, 因此, 得出关于初值问题(12)的 S_3 公式, 并使用符号 $\tilde{u}_{S_3}(t_k)$ 表示, 即

$$\tilde{u}_{S_3}(t_k) = u_k = u(0) + \frac{\alpha h}{24} \sum_{j=1}^k (\tilde{\beta}_{j-1} + 11\tilde{\beta}_j + 11\tilde{\beta}_{j+1} + \tilde{\beta}_{j+2}) + (1 - \alpha)[u_k + g(t_k)], \quad (13)$$

其中, $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{N+2}$ 为常数, $\tilde{u}_{S_3}(t_k)$ 满足 $N+1$ 个插值条件 $y_j = u_j + g(t_j)$ ($j=0, 1, \dots, N$), 且 $\tilde{S}_3(t_j) = y_j$ ($j=0, 1, \dots, N$) 成立. 同理, 选择固定边界条件 $\tilde{S}'_3(t_0) = u'(0) + g'(0)$, $\tilde{S}'_3(t_N) = u'(t_N) + g'(t_N)$, 由此可得系数 $\tilde{\beta}$ 满足线性方程组 $M\tilde{\beta} = F$, 即

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{N+1} \\ \tilde{\beta}_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(0) + g'(0) \\ u_0 + g(0) \\ u_1 + g(t_1) \\ \vdots \\ u_N + g(t_N) \\ u'(t_N) + g'(t_N) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

根据上式, 需要 $u'(0)$ 和 $u'(t_N)$ 的值, 它们分别由以下四阶正向差分公式和四阶反向差分公式^[24]来近似, 即

$$\begin{cases} u'(0) \approx \frac{1}{12h}(-25u_0 + 48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4), \\ u'(t_N) \approx \frac{1}{12h}(25u_N - 48u_{N-1} + 36u_{N-2} - 16u_{N-3} + 3u_{N-4}). \end{cases} \quad (15)$$

由式(13)–(15)即可求得 $u(t_k)$ 的近似数值 u_k .

3 三次 B 样条方法的误差估计、收敛性和稳定性分析

3.1 三次 B 样条方法的误差估计

首先, 在对三次 B 样条方法进行误差估计之前, 给出以下定理.

定理 1^[25] 设函数 $f \in C^4[0, T]$, 则函数 f 与三次样条插值函数 S_3 之间的距离为

$$\|f^{(r)} - S_3^{(r)}\|_\infty \leq C_r h^{4-r} \|f^{(4)}\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

其中, r 为函数的导数阶次, 常数 C_r 依赖于 r 而不依赖于 f , 且 $C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_2 = \frac{3}{8}$. 其证明过程可参见文献[25].

定理 2 若 $f \in C^4[0, t_k]$, 且 $R(t_k) = u(t_k) - u_{S_3}(t_k)$, 则有

$$|R(t_k)| \leq \frac{5}{384} \alpha h^4 \|f^{(4)}(t_k)\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

证明 对于任意的 $1 \leq k \leq N$, 根据定理 1 可得

$$\begin{aligned} |R(t_k)| &= |u(t_k) - u_{S_3}(t_k)| = \\ &= \left| \left[u(0) + \alpha \int_0^{t_k} f(\tau) d\tau + (1 - \alpha)f(t_k) \right] - \left[u(0) + \alpha \int_0^{t_k} S_3(\tau) d\tau + (1 - \alpha)f(t_k) \right] \right| = \\ &= \left| \alpha \int_0^{t_k} [f(\tau) - S_3(\tau)] d\tau \right| \leq \\ &= \frac{5}{384} \alpha h^4 \|f^{(4)}(t_k)\|_\infty. \end{aligned}$$

定理 2 证毕.

3.2 三次 B 样条方法的收敛性分析

下面给出三次 B 样条方法的收敛性分析.

定理 3 三次 B 样条方法在区间 $[0, T]$ 上是一致收敛的, 即当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|R_3(t_k)\|_\infty \rightarrow 0$.

证明 根据定理 2 中三次 B 样条方法的误差估计, 可得

$$\|R(t_k)\|_\infty = \left\| \alpha \int_0^{t_k} [f(\tau) - S_3(\tau)] d\tau \right\|_\infty \leq \frac{5}{384} \alpha h^4 \|f^{(4)}\|_\infty,$$

其中, $f \in C^4[0, T]$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$\|R(t_k)\|_\infty = \left\| \alpha \int_0^{t_k} [f(\tau) - S_3(\tau)] d\tau \right\|_\infty \rightarrow 0.$$

因此, 此数值格式在区间 $[0, T]$ 上是一致收敛的. 定理 3 证毕.

3.3 三次 B 样条方法的稳定性分析

接下来对三次 B 样条方法进行稳定性分析.

定理 4 三次 B 样条方法在区间 $[0, T]$ 上是无条件稳定的.

证明 在利用三次 B 样条方法进行实际计算时, 由于舍入误差的影响, S_3 公式往往有误差, 即 $\bar{S}_3 \approx S_3$, 记 $\bar{R} = u_{S_3}(t_k) - u_{\bar{S}_3}(t_k)$, 则有

$$|\bar{R}| = \left| \alpha \int_0^{t_k} [S_3(\tau) - \bar{S}_3(\tau)] d\tau \right| \leq \alpha T \|S_3(t_k) - \bar{S}_3(t_k)\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

因此, 三次 B 样条方法是无条件稳定的. 定理 4 证毕.

4 数值算例

本节主要给出几个数值算例来验证在前几节中三次 B 样条方法(本节简记为 S_3)的理论结果, 并与文献[14]中改进的 block-by-block 算法和文献[18]中的快速高阶数值方法进行比较. 假设 $t_N = T = 1$, 各节点的精确解记为 $u^k = u(t_k)$, 利用三次 B 样条方法求得的数值解记为 $u_{S_3}^k = u_{S_3}(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, 则各节点的误差 $E^N = |u^N - u_{S_3}^N|$, 并且收敛阶被定义为如下形式:

$$r = \log_2 \frac{E^N}{E^{2N}},$$

其中, N 为各数值方法在 $[0, 1]$ 区间分割的份数, 也为待求未知量的个数, 代表以上各数值方法在数值求解的计算量大小, 且 3 种数值方法的带状矩阵皆采用 Gauss 消元法来计算. 所有程序均在 CPU 为 Inter Core i5 Processor 2.30 GHz、内存为 8 GB 的笔记本电脑环境下运行, 利用 MATLAB 2018a 平台实现.

例 1 本文考虑具有两个不同右端项的初值问题^[14,18]:

情况 1

$$\begin{cases} {}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = G_1(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (17)$$

情况 2

$$\begin{cases} {}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = G_2(t) + u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (18)$$

两种情况的初值均为 $u_0 = 0$, 精确解均为 $u(t) = t^3$, 并且右端项中 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 分别为

$$G_1(t) = \frac{3}{\alpha} t^2 - \frac{6(1-\alpha)}{\alpha^2} t + \frac{6(1-\alpha)^2}{\alpha^3} - \frac{6(1-\alpha)^2}{\alpha^3} \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} t\right),$$

$$G_2(t) = G_1(t) - t^3.$$

可见, 情况 1 与情况 2 均属于线性初值问题, 情况 2 的右端项与 $u(t)$ 有关, 且 $G_1(0) = 0, G_2(0) + u(0) = 0$.

下面,使用本文提出的三次 B 样条方法分别求解情况 1 和情况 2 的初值问题。

求解情况 1 已知插值条件 $S_3(t_j) = G_1(t_j)$ ($j = 0, 1, \dots, N$) 和固定边界条件 $S'_3(0) = G'_1(0)$, $S'_3(1) = G'_1(1)$ 成立,使用三次 B 样条方法求解不同的分割数 N ($N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$) 与不同 α ($\alpha = 0.3, 0.7$) 阶的 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解,并与文献[14]中改进的 block-by-block 算法和文献[18]中的快速高阶数值方法进行对比。当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶对比如表 1 所示,3 种数值方法的最大误差比较如图 1 所示。当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶对比如表 2 所示,3 种数值方法的最大误差比较如图 2 所示。

表 1 当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶(情况 1)

Table 1 Maximum errors and convergence orders of 3 numerical methods for $\alpha = 0.3$ (case 1)

N	method in ref. [14]	rate r	CPU time T/s	method in ref. [18]	rate r	CPU time T/s	S_3	rate r	CPU time T/s
4	2.863 3E-4	-	0.000 6	4.244 2E-4	-	0.000 3	4.861 4E-6	-	0.000 1
8	2.181 2E-5	3.714 5	0.001 5	2.634 4E-5	4.001 0	0.001 1	3.039 0E-7	3.999 7	0.000 2
16	1.495 5E-6	3.866 4	0.004 3	1.640 7E-6	4.005 1	0.001 2	1.899 5E-8	3.999 9	0.000 2
32	9.776 7E-8	3.935 1	0.010 7	1.023 6E-7	4.002 6	0.015 7	1.187 2E-9	4.000 0	0.000 4
64	6.247 4E-9	3.968 0	0.046 2	6.391 9E-9	4.001 3	0.033 1	7.420 7E-11	3.999 9	0.002 8
128	3.947 8E-10	3.984 1	0.292 1	4.821 1E-10	3.728 8	0.185 1	4.645 2E-12	3.997 8	0.005 6

表 2 当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶(情况 1)

Table 2 Maximum errors and convergence orders of 3 numerical methods for $\alpha = 0.7$ (case 1)

N	method in ref. [14]	rate r	CPU time T/s	method in ref. [18]	rate r	CPU time T/s	S_3	rate r	CPU time T/s
4	1.498 5E-3	-	0.000 5	2.440 9E-3	-	0.000 3	6.803 8E-5	-	0.000 2
8	1.131 7E-4	3.727 0	0.002 7	1.477 4E-4	4.046 3	0.001 1	4.278 2E-6	3.991 3	0.000 2
16	7.205 3E-6	3.973 3	0.004 1	9.070 8E-6	4.025 7	0.001 5	2.677 9E-7	3.997 8	0.000 3
32	4.431 2E-7	4.023 3	0.021 2	5.616 7E-7	4.013 4	0.016 8	1.674 3E-8	3.999 5	0.000 3
64	3.077 3E-8	3.848 0	0.046 9	3.493 8E-8	4.006 9	0.040 4	1.046 6E-9	3.999 9	0.002 6
128	2.046 0E-9	3.910 8	0.303 5	2.178 4E-9	4.003 5	0.212 4	6.541 1E-11	4.000 0	0.005 5

由表 1 和表 2 可知,在不同的分数阶次下,与改进的 block-by-block 算法相比,本文方法的误差明显更小,数值逼近效果更佳,且收敛阶较高。与快速高阶数值方法相比,本文方法的误差明显更小,数值逼近效果更佳,收敛阶相当,此外,本文数值方法的 CPU 时间较短,具有可观的计算效率。显然,采用三次 B 样条方法求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程比其他两种方法更加有效。

由图 1 和图 2 可知,改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法在各分割数下的最大误差相差不多,与以上两种数值方法相比,本文方法的最大误差明显更小,数值逼近效果更佳。

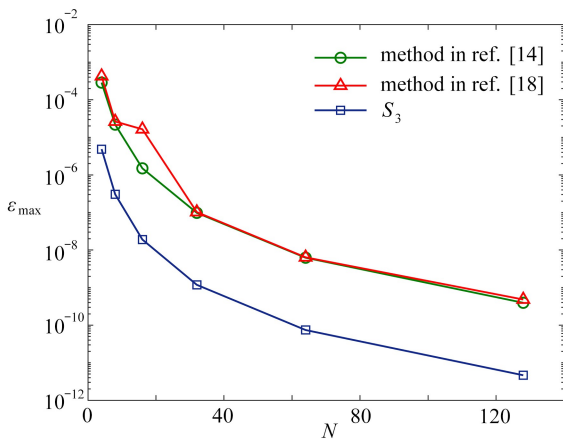


图 1 当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差(情况 1)

Fig. 1 Maximum errors of the 3 numerical methods for $\alpha = 0.3$ (case 1)

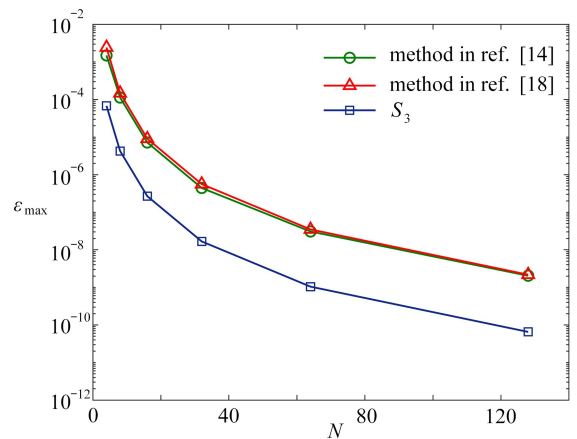


图 2 当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差(情况 1)

Fig. 2 Maximum errors of the 3 numerical methods for $\alpha = 0.7$ (case 1)

下面,固定分割数 $N = 100$,使用三次 B 样条方法分别求解情况 1 中不同阶次 $\alpha (\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ 的初值问题,其各节点处的绝对误差结果如图 3 所示.固定分割数 $N = 10$,本文方法在阶次 α 取不同值时所得各节点的数值解如图 4 所示.

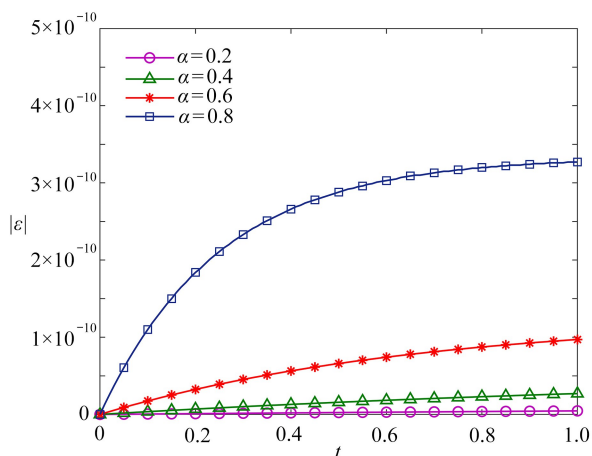


图 3 不同 α 值时各节点的绝对误差 (情况 1)

Fig. 3 Absolute errors of each node with different α values (case 1)

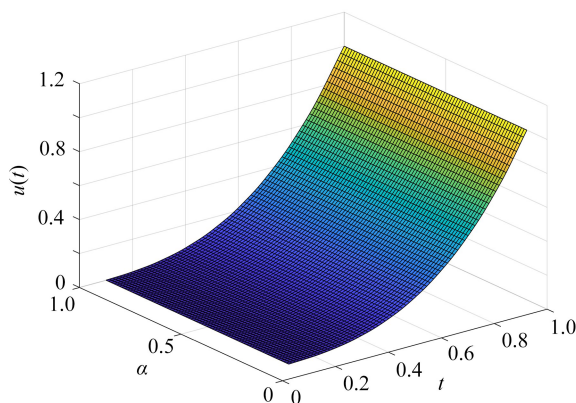


图 4 不同 α 值时各节点的数值解 (情况 1)

Fig. 4 Numerical solutions of each node with different α values (case 1)

由图 3 可知,不同的阶次 α 导致本文方法的绝对误差有所不同,阶次 α 越小,各节点处的绝对误差越小,数值逼近的效果越佳.由图 4 可知,当阶次 α 取不同值时,各节点处的数值解均保持平稳状态,本文方法在 $t \in [0, 1]$ 时具有良好的稳定性.

求解情况 2 已知插值条件 $\tilde{S}_3(t_j) = u_j + G_2(t_j) (j = 0, 1, \dots, N)$ 和固定边界条件 $\tilde{S}'_3(0) = u'(0) + G'_2(0), \tilde{S}'_3(1) = u'(1) + G'_2(1)$ 成立,使用三次 B 样条方法求解不同的分割数 $N (N = 4, 8, 16, 32, 64, 128)$ 与不同 $\alpha (\alpha = 0.3, 0.7)$ 阶的 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解,并与文献 [14] 中改进的 block-by-block 算法和文献 [18] 中的快速高阶数值方法进行对比.当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶对比如表 3 所示,3 种数值方法的最大误差比较如图 5 所示.当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶对比如表 4 所示,3 种数值方法的最大误差比较如图 6 所示.

表 3 当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶 (情况 2)

Table 3 Maximum errors and convergence orders of 3 numerical methods for $\alpha = 0.3$ (case 2)

N	method in ref. [14]	rate r	CPU time T/s	method in ref. [18]	rate r	CPU time T/s	S_3	rate r	CPU time T/s
4	1.044 5E-3	-	0.000 8	1.882 9E-3	-	0.000 2	2.909 0E-5	-	0.000 2
8	7.592 6E-5	3.782 0	0.003 5	1.104 9E-4	4.090 9	0.001 2	1.806 0E-6	4.009 7	0.000 3
16	5.354 7E-6	3.825 7	0.004 6	6.649 0E-6	4.054 7	0.001 9	1.127 0E-7	4.002 3	0.000 3
32	3.633 3E-7	3.881 5	0.021 3	4.070 3E-7	4.030 0	0.014 8	7.040 6E-9	4.000 6	0.000 6
64	2.381 4E-8	3.931 4	0.047 4	2.512 5E-8	4.017 9	0.038 2	4.400 3E-10	4.000 0	0.003 8
128	1.319 4E-9	4.173 9	0.300 7	1.338 0E-9	4.231 0	0.269 6	2.753 6E-11	3.998 2	0.007 7

表 4 当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差和收敛阶 (情况 2)

Table 4 Maximum errors and convergence orders of 3 numerical methods for $\alpha = 0.7$ (case 2)

N	method in ref. [14]	rate r	CPU time T/s	method in ref. [18]	rate r	CPU time T/s	S_3	rate r	CPU time T/s
4	2.550 6E-3	-	0.000 8	4.181 8E-3	-	0.000 3	2.068 7E-4	-	0.000 2
8	2.102 5E-4	3.600 7	0.003 2	2.302 9E-4	4.182 6	0.001 3	1.256 8E-5	4.041 0	0.000 2
16	1.295 5E-5	4.020 5	0.004 7	1.352 3E-5	4.090 0	0.001 7	7.797 0E-7	4.010 6	0.000 4
32	7.477 9E-7	4.114 7	0.025 8	8.194 8E-7	4.044 6	0.015 6	4.863 9E-8	4.002 7	0.000 6
64	4.419 4E-8	4.080 7	0.050 2	5.043 7E-8	4.022 2	0.035 4	3.038 5E-9	4.000 7	0.004 1
128	2.930 5E-9	3.914 6	0.333 5	3.128 2E-9	4.011 1	0.284 8	1.898 9E-10	4.000 2	0.007 3

由表 3 和表 4 可知,在不同的分数阶次下,与改进的 block-by-block 算法相比,本文方法的误差明显更小,数值逼近效果更佳,且收敛阶较高.与快速高阶数值方法相比,本文方法的误差明显更小,数值逼近效果更佳,收敛阶相当.此外,本文数值方法的 CPU 时间较短,具有可观的计算效率.显然,三次 B 样条方法在求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程时比其他两种方法更加有效.

由图 5 和图 6 可知,改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法在各分割数下的最大误差相差不多,与以上两种数值方法相比,本文方法的最大误差明显更小,数值逼近效果更佳.

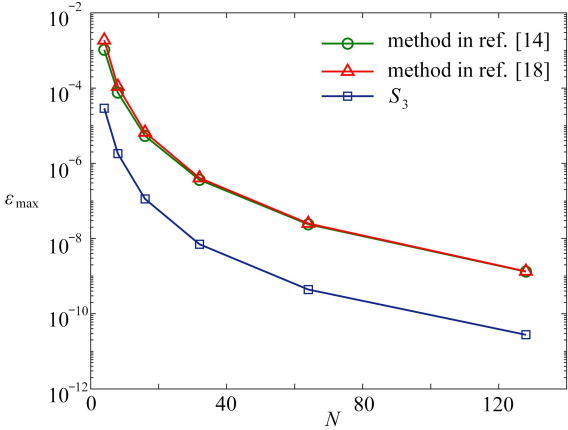


图 5 当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的最大误差(情况 2)

Fig. 5 Maximum errors of the 3 numerical methods for $\alpha = 0.3$ (case 2)

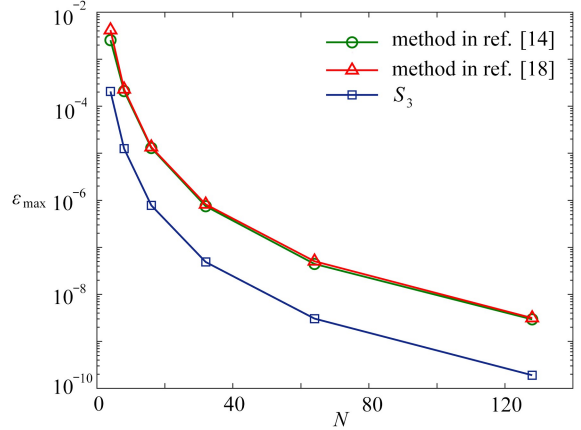


图 6 当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的最大误差(情况 2)

Fig. 6 Maximum errors of the 3 numerical methods for $\alpha = 0.7$ (case 2)

接下来,固定分割数 $N = 100$,使用三次 B 样条方法分别求解情况 2 中不同阶次 α ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) 的初值问题,其各节点处的绝对误差结果如图 7 所示.固定分割数 $N = 10$,本文方法在阶次 α 取不同值时所得各节点的数值解如图 8 所示.

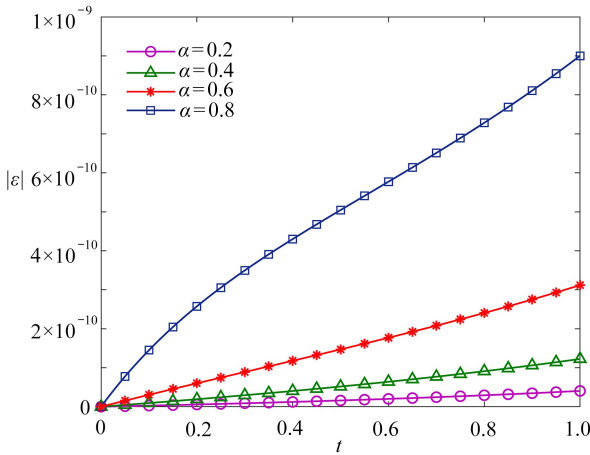


图 7 不同 α 值时各节点的绝对误差(情况 2)

Fig. 7 Absolute errors of each node with different α values (case 2)

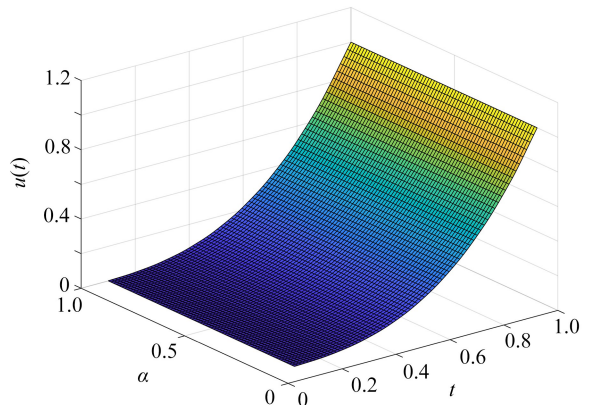


图 8 不同 α 值时各节点的数值解(情况 2)

Fig. 8 Numerical solutions of each node with different α values (case 2)

由图 7 可知,不同的阶次 α 导致本文方法的绝对误差有所不同,阶次 α 越小,各节点处的绝对误差越小,数值逼近的效果越佳.由图 8 可知,当阶次 α 取不同值时,各节点处的数值解均保持平稳状态,本文方法在 $t \in [0, 1]$ 时具有良好的稳定性.

例 2 下面将验证三次 B 样条方法的稳定性,考虑如下的初值问题^[14,18]:

$$\begin{cases} {}^{\text{CF}}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1 - 2\alpha + 2\alpha^2} \left[-\alpha \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} t\right) + \alpha \cos t + (1 - \alpha) \sin t \right], \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中,精确解为 $u(t) = \sin t$, 右端项满足 $f(0) = 0$.

已知插值条件 $S_3(t_j) = f(t_j) (j = 0, 1, \dots, N)$ 和固定边界条件 $S_3'(0) = f'(0), S_3'(1) = f'(1)$ 成立,固定分割数 $N = 10\ 000$,使用 3 种数值方法分别求解不同的 $\alpha (\alpha = 0.3, 0.5, 0.7)$ 阶的 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解,一直计算到 $T = 1\ 000$.当 $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$ 时,3 种数值方法在不同节点处的绝对误差 ($|\varepsilon| = |u(t_k) - u_k|$) 和相对误差 ($\varepsilon' = |\varepsilon|/u(t_k)$) 结果分别如表 5、表 6 和表 7 所示,3 种数值方法的相对误差对比如图 9、图 10 和图 11 所示.

表 5 $\alpha = 0.3, N = 10\ 000$ 时,3 种数值方法在不同节点处的绝对误差和相对误差

Table 5 The absolute and relative errors of the 3 numerical methods at different nodes for $\alpha = 0.3, N = 10\ 000$

t_i	method in ref. [14]		method in ref. [18]		S_3		exact solution
	(CPU time $T = 25.11$ s)		(CPU time $T = 23.05$ s)		(CPU time $T = 10.91$ s)		
	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	
100	1.179 7E-6	-2.329 6E-6	1.105 8E-6	-2.183 6E-6	5.867 9E-9	-1.158 8E-8	-0.506 4
200	1.418 9E-6	-1.624 8E-6	1.594 7E-6	-1.826 1E-6	5.127 6E-9	-5.871 5E-9	-0.873 3
300	1.591 7E-6	-1.592 1E-6	1.658 1E-6	-1.658 4E-6	2.809 5E-8	-2.810 0E-8	-0.999 8
400	1.650 6E-6	-1.939 8E-6	1.278 6E-6	-1.502 6E-6	5.670 9E-8	-6.664 6E-8	-0.850 9
500	1.579 2E-6	-3.375 8E-6	5.608 3E-7	-1.198 9E-6	8.309 1E-8	-1.776 2E-7	-0.467 8
600	1.397 3E-6	3.161 3E-5	2.977 0E-7	6.735 3E-6	9.997 6E-8	2.261 9E-6	0.044 2
700	1.154 9E-6	2.123 0E-6	1.060 5E-6	1.949 4E-6	1.027 2E-7	1.888 2E-7	0.544 0
800	9.188 7E-7	1.027 8E-6	1.517 6E-6	1.697 5E-6	9.055 4E-8	1.012 9E-7	0.894 0
900	7.540 9E-7	7.557 5E-7	1.543 1E-6	1.546 5E-6	6.684 1E-8	6.698 8E-8	0.997 8
1 000	7.059 8E-7	8.537 7E-7	1.129 9E-6	1.366 4E-6	3.814 1E-8	4.612 5E-8	0.826 9

由表 5 所示,与改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法相比,三次 B 样条方法在不同节点处的绝对误差和相对误差较小,经过长时间的计算,不同节点上的数值解均可以很好地逼近精确解,并且本文方法的 CPU 时间较短,计算效率可观.由图 9 所示,3 种数值方法的相对误差在个别节点处均有起伏,但与其他两种方法相比,本文方法的平稳状态更佳.此外,3 种数值方法相对误差的方差分别为 1.074×10^{-10} , 7.603×10^{-12} 和 5.157×10^{-13} .显然,三次 B 样条方法在求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程时比其他两种方法更加稳定.

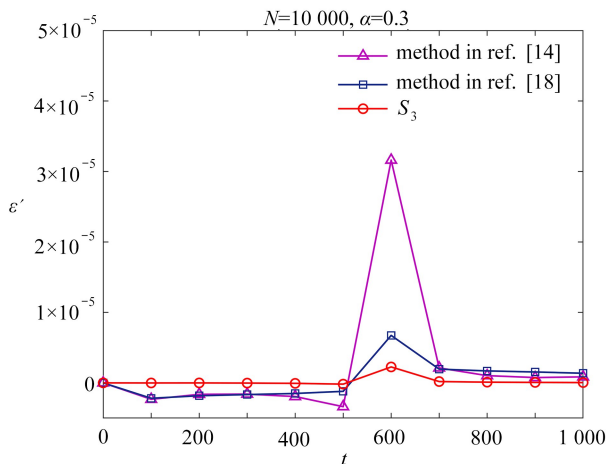


图 9 当 $\alpha = 0.3$ 时,3 种数值方法的相对误差

Fig. 9 Relative errors of 3 numerical methods for $\alpha = 0.3$

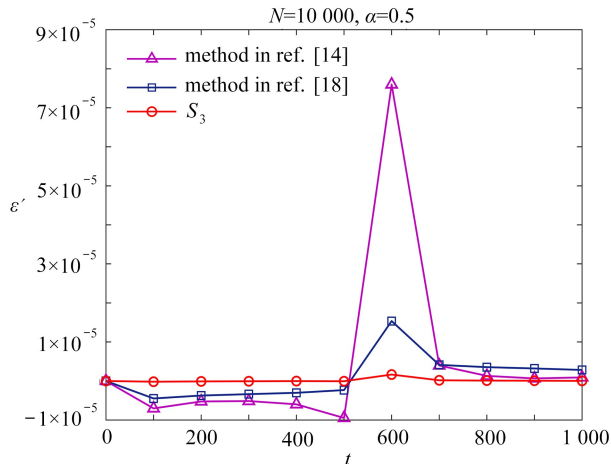


图 10 当 $\alpha = 0.5$ 时,3 种数值方法的相对误差

Fig. 10 Relative errors of 3 numerical methods for $\alpha = 0.5$

表6 $\alpha = 0.5, N = 10\ 000$ 时,3种数值方法在不同节点处的绝对误差和相对误差Table 6 The absolute and relative errors of the 3 numerical methods at different nodes for $\alpha = 0.5, N = 10\ 000$

t_i	method in ref. [14]		method in ref. [18]		S_3		exact solution
	(CPU time $T = 25.21$ s)		(CPU time $T = 21.79$ s)		(CPU time $T = 10.72$ s)		
	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	
100	3.560 3E-6	-7.030 6E-6	-7.030 6E-6	-4.480 6E-6	9.535 4E-8	-1.883 0E-7	-0.506 4
200	4.582 3E-6	-5.247 2E-6	-5.247 2E-6	-3.733 8E-6	9.478 3E-8	-1.085 3E-7	-0.873 3
300	5.143 2E-6	-5.144 3E-6	-5.144 3E-6	-3.374 4E-6	6.810 3E-8	-6.811 6E-8	-0.999 8
400	5.088 5E-6	-5.980 1E-6	-5.980 1E-6	-3.028 3E-6	2.266 0E-8	-2.663 1E-8	-0.850 9
500	4.433 2E-6	-9.476 7E-6	-9.476 7E-6	-2.329 0E-6	2.903 1E-8	-6.205 8E-8	-0.467 8
600	3.357 8E-6	7.596 9E-5	7.596 9E-5	1.535 6E-5	7.273 7E-8	1.645 6E-6	0.044 2
700	2.158 5E-6	3.967 8E-6	3.967 8E-6	4.119 3E-6	9.642 3E-8	1.772 5E-7	0.544 0
800	1.165 4E-6	1.303 6E-6	1.303 6E-6	3.542 4E-6	9.356 7E-8	1.046 6E-7	0.894 0
900	6.520 4E-7	6.534 7E-7	6.534 7E-7	3.208 8E-6	6.495 6E-8	6.509 9E-8	0.997 8
1 000	7.597 7E-7	9.188 2E-7	9.188 2E-7	2.824 8E-6	1.840 6E-8	2.2258E-8	0.826 9

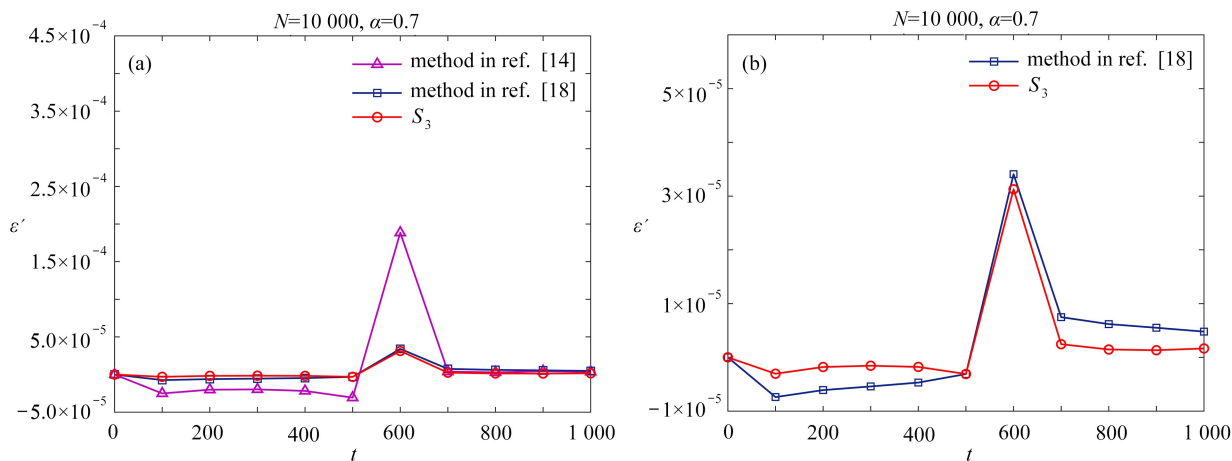
由表6所示,与改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法相比,三次 B 样条方法在不同节点处的绝对误差和相对误差较小,经过长时间的计算,不同节点上的数值解均可以很好地逼近精确解,并且本文方法的 CPU 时间较短,计算效率可观。由图 10 所示,3 种数值方法的相对误差在个别节点处均有起伏,但与其他两种方法相比,本文方法的平稳状态更佳。此外,3 种数值方法相对误差的方差分别为 6.410×10^{-10} , 3.654×10^{-11} 和 2.853×10^{-13} 。显然,三次 B 样条方法在求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程时比其他两种方法更加稳定。

表7 $\alpha = 0.7, N = 10\ 000$ 时,3种数值方法在不同节点处的绝对误差和相对误差Table 7 The absolute and relative errors of the 3 numerical methods at different nodes for $\alpha = 0.7, N = 10\ 000$

t_i	method in ref. [14]		method in ref. [18]		S_3		exact solution
	(CPU time $T = 26.02$ s)		(CPU time $T = 22.70$ s)		(CPU time $T = 10.21$ s)		
	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	absolute error $ \varepsilon $	relative error ε'	
100	1.272 2E-5	-2.512 2E-5	3.742 0E-6	-7.389 4E-6	1.541 5E-6	-3.044 1E-6	-0.506 4
200	1.759 9E-5	-2.015 2E-5	5.318 1E-6	-6.089 7E-6	1.565 8E-6	-1.793 0E-6	-0.873 3
300	1.973 9E-5	-1.974 3E-5	5.409 3E-6	-5.410 4E-6	1.555 0E-6	-1.555 3E-6	-0.999 8
400	1.855 2E-5	-2.180 3E-5	3.990 5E-6	-4.689 7E-6	1.512 1E-6	-1.777 0E-6	-0.850 9
500	1.436 5E-5	-3.070 8E-5	1.452 4E-6	-3.104 7E-6	1.448 9E-6	-3.097 2E-6	-0.467 8
600	8.331 4E-6	1.884 9E-4	1.506 2E-6	3.407 7E-5	1.382 8E-6	3.128 4E-5	0.044 2
700	2.112 3E-6	3.882 8E-6	4.070 5E-6	7.482 5E-6	1.332 0E-6	2.448 5E-6	0.544 0
800	2.579 9E-6	2.885 8E-6	5.534 5E-6	6.190 7E-6	1.310 5E-6	1.465 9E-6	0.894 0
900	4.453 1E-6	4.462 9E-6	5.495 0E-6	5.507 1E-6	1.324 2E-6	1.327 2E-6	0.997 8
1 000	2.991 4E-6	3.617 6E-6	3.962 9E-6	4.792 5E-6	1.369 6E-6	1.656 3E-6	0.826 9

由表7所示,与改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法相比,三次 B 样条方法在不同节点处的绝对误差和相对误差较小,经过长时间的计算,不同节点上的数值解均可以很好地逼近精确解,并且本文方法的 CPU 时间较短,计算效率可观。

图 11(a)为当 $\alpha = 0.7$ 时 3 种数值方法的相对误差对比,图 11(b)为快速高阶数值方法和三次 B 样条方法的相对误差对比。由图 11 所示,3 种数值方法在个别节点处均有起伏,但与其他两种方法相比,本文方法的平稳状态更佳。此外,3 种数值方法相对误差的方差分别为 4.188×10^{-9} , 1.514×10^{-10} 和 1.051×10^{-10} 。因此,三次 B 样条方法在求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程时比其他两种方法更加稳定。

图 11 当 $\alpha = 0.7$ 时,3 种数值方法的相对误差Fig. 11 Relative errors of 3 numerical methods for $\alpha = 0.7$

5 结 论

本文将三次 B 样条方法应用于 Caputo-Fabrizio 定义下的分数阶微分方程的数值求解.基于分数阶微积分基本定理和三次 B 样条函数,构造了解 α 阶线性 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程数值解的三次 B 样条方法.对所构造的数值方法进行了误差估计,并对其收敛性和稳定性进行了理论证明.实验结果表明:三次 B 样条方法具有一定的有效性,且具有 4 阶收敛阶和良好的稳定性;在求解线性初值问题时,与改进的 block-by-block 算法和快速高阶数值方法相比,三次 B 样条方法明显具有较高的精度和较快的收敛速度,且计算复杂度低,计算成本小.综上,三次 B 样条方法在求解 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程时具有明显优势,为一类 α 阶 Caputo-Fabrizio 型分数阶微分方程的数值求解提供了新的选择.

参考文献 (References):

- [1] 张曼,曹艳华,杨晓忠.一类分数阶 Langevin 方程 block-by-block 算法的数值分析[J].应用数学和力学,2021,42(6):562-574.(ZHANG Man, CAO Yanhua, YANG Xiaozhong. Numerical analysis of a class of fractional Langevin equations with the block-by-block method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(6): 562-574.(in Chinese))
- [2] 鲍四元,沈峰.分数阶常微分方程的改进精细积分法[J].应用数学和力学,2019,40(12):1309-1320.(BAO Siyuan, SHEN Feng. An improved precise integration method for fractional ordinary differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(12): 1309-1320.(in Chinese))
- [3] CAPUTO M, FABRIZIO M. A new definition of fractional derivative without singular kernel[J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2015, 1: 73-85.
- [4] CAPUTO M, FABRIZIO M. Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels [J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2016, 2(1): 1-11.
- [5] LOSADA J, NIETO J J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel[J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2015, 1(2): 87-92.
- [6] OWOLABI K M, ATANGANA A. Analysis and application of new fractional Adams-Bashforth scheme with Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, 105: 111-119.
- [7] ATANGANA A, ALQAHTANI R T. Numerical approximation of the space-time Caputo-Fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation[J]. *Advances in Difference Equations*, 2016, 2016(1): 156.
- [8] BALEANU D, JAJARMI A, MOHAMMADI H, et al. A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 134: 109705.

- [9] BOUDAOU A, MOUSSA Y, HAMMOUCH Z, et al. A fractional-order model describing the dynamics of the novel coronavirus (COVID-19) with nonsingular kernel[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, **146**: 110859.
- [10] GONG X, FATMAWATI, KHAN M A. A new numerical solution of the competition model among bank data in Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2020, **59**(4): 2251-2259.
- [11] LIAO X, LIN D, DONG L, et al. Analog implementation of fractional-order electric elements using Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu definitions[J]. *Fractals*, 2021, **29**(7): 2150235.
- [12] ARIF M, ALI F, SHEIKH N A, et al. Fractional model of couple stress fluid for generalized Couette flow; a comparative analysis of Atangana-Baleanu and Caputo-Fabrizio fractional derivatives[J]. *IEEE Access*, 2019, **7**: 88643-88655.
- [13] YOUSSEF H M, EL-BARY A A. Generalized fractional viscothermoelastic nanobeam under the classical Caputo and the new Caputo-Fabrizio definitions of fractional derivatives[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2023, **33**(3): 545-566.
- [14] CAO J, WANG Z, XU C. A high-order scheme for fractional ordinary differential equations with the Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, 2020, **2**(2): 179-199.
- [15] GUO X, LI Y T, ZENG T Y. A finite difference scheme for Caputo-Fabrizio fractional differential equations [J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2020, **17**(2): 195-211.
- [16] AL-SMADI M, DJEDDI N, MOMANI S, et al. An attractive numerical algorithm for solving nonlinear Caputo-Fabrizio fractional Abel differential equation in a Hilbert space[J]. *Advances in Difference Equations*, 2021, **271**: 2-18.
- [17] DOUAIFIA R, BENDOUKHA S, ABDELMALEK S. A Newton interpolation based predictor-corrector numerical method for fractional differential equations with an activator-inhibitor case study[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, **187**: 391-413.
- [18] 何广婷. 带有 Caputo-Fabrizio 导数的分数阶微分方程的快速高阶算法的研究[D]. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2021. (HE Guangting. Fast higher order algorithms research for fractional differential equations with Caputo-Fabrizio derivatives[D]. Master Thesis. Harbin: Harbin Normal University, 2021. (in Chinese))
- [19] 李鹏柱, 李风军, 李星, 等. 基于三次样条插值函数的非线性动力系统数值求解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(8): 887-896. (LI Pengzhu, LI Fengjun, LI Xing, et al. A numerical method for the solutions to nonlinear dynamic systems based on cubic spline interpolation functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(8): 887-896. (in Chinese))
- [20] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [21] RAMEZANI M, MOKHTARI R, HAASE G. Some high order formulae for approximating Caputo fractional derivatives[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, **153**: 300-318.
- [22] 李庆扬, 关治, 白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. (LI Qingyang, GUAN Zhi, BAI Fengshan. *Theory of Numerical Calculation*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000. (in Chinese))
- [23] 黎天送. 基于粒子群的全局双三次 B 样条曲面插值方法及实验研究[D]. 硕士学位论文. 昆明: 云南大学, 2014. (LI Tiansong. Global bicubic B-spline surface interpolation method based on particle swarm optimization and experimental research[D]. Master Thesis. Kunming: Yunnan University, 2014. (in Chinese))
- [24] KINCAID D R, CHENEY W. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*[M]. Pacific Grove, CA, USA: Cole Publishing Company, 2002.
- [25] HALL C A, MEYER W W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1976, **16**(2): 105-122.