

具有媒体报道和有限医疗资源的传染病模型

刘单, 王艳, 任新志, 刘贤宁

An Infectious Disease Model With Media Coverage and Limited Medical Resources

LIU Dan, WANG Yan, REN Xinzhi, and LIU Xianning

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430160>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑媒体报道效应的谣言传播模型研究

Research on a Rumor Spreading Model With Media Coverage

应用数学和力学. 2018, 39(12): 1400–1409 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390137>

考虑媒体播报效应的双时滞传染病模型

An Epidemic Model With Dual Delays in View of Media Coverage

应用数学和力学. 2017, 38(12): 1412–1424 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380025>

同时具有logistic出生和Markov切换的随机SIRS传染病模型的动力学

Dynamics of a Class of Stochastic SIRS Infectious Disease Models With Both Logistic Birth and Markov Switching

应用数学和力学. 2021, 42(12): 1327–1337 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420140>

一类潜伏期有传染性的传染病模型动力学分析

Dynamic Analysis of an Epidemic Model With Infectivity in the Incubation Period

应用数学和力学. 2021, 42(8): 866–873 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410251>

基于两斑块和人口流动的SIR传染病模型的稳定性

Stability of an SIR Epidemic Model With 2 Patches and Population Movement

应用数学和力学. 2017, 38(4): 486–494 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370087>

带有标准发生率和信息干预的随机时滞SIRS传染病模型的动力学行为

Dynamic Behaviors of Stochastically Delayed SIRS Epidemic Models With Standard Incidence Rates Under Information Intervention

应用数学和力学. 2019, 40(12): 1373–1388 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400031>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

具有媒体报道和有限医疗资源的传染病模型*

刘 单, 王 艳, 任新志, 刘贤宁

(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要: 该文建立和分析了一类具有媒体报道效应和有限医疗资源的传染病动力学模型, 定义了疾病的基本再生数, 分析了平衡点的存在性和稳定性, 给出了系统发生前向分支、后向分支和 Hopf 分支的条件. 通过数值模拟发现: 提高媒体报道的信息覆盖率或医院对病人的最大容纳量, 可以显著降低疾病流行的峰值或稳态时的感染人数; 随着参数变化, 系统不仅可能会产生后向分支或前向分支, 还可能会出现鞍结点分支、Hopf 分支以及地方病平衡点稳定性随参数变化而变化等动力学行为.

关键词: 媒体报道; 有限医疗资源; 后向分支; Lyapunov 稳定

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430160

An Infectious Disease Model With Media Coverage and Limited Medical Resources

LIU Dan, WANG Yan, REN Xinzhi, LIU Xianning

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, P.R.China)

Abstract: A dynamical model for infectious disease with media coverage effects and limited medical resources was established and analyzed. The basic reproduction number of the disease was defined, the existence and stability of the equilibria were analyzed, and the conditions for the forward bifurcation, the backward bifurcation and the Hopf bifurcation to occur in the system were given. Numerical simulation results show that, increasing the media coverage rate or the maximum hospital capacity can significantly reduce the number of infections at the peak or in the steady state of the epidemic. With the variations of parameters, the system will exhibit dynamic behaviors including not only the backward bifurcation or the forward bifurcation, but also the saddle node bifurcation, the Hopf bifurcation, or the change of the endemic equilibrium point stability with parameters.

Key words: limited medical resources; media coverage; backward bifurcation; Lyapunov stability

* 收稿日期: 2022-05-10; 修订日期: 2022-06-06

基金项目: 国家自然科学基金 (12071382; 12101513; 11901477); 重庆市自然科学基金 (博士后基金)(cstc2021jcyj-bshX0070); 中国博士后科学基金 (2021M702704)

作者简介: 刘单 (1996—), 女, 硕士生 (E-mail: 3194564533@qq.com);

刘贤宁 (1972—), 男, 博士 (通讯作者. E-mail: liuxn@swu.edu.cn).

引用格式: 刘单, 王艳, 任新志, 刘贤宁. 具有媒体报道和有限医疗资源的传染病模型[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(3): 333-344.

0 引言

随着科技发展,以手机、互联网等为代表的新媒体日益覆盖人们生活的各个方面,成为人们及时获取所关注信息的主要渠道.特别地,疫情期间通过综合利用新媒体和传统媒体及时发布关于疾病信息的报道,让人们了解其风险水平,并鼓励人们采取预防措施,如戴口罩、避免在生病时前往公共场所、经常洗手等,对流行病的防控具有显著的积极影响^[1].因此,研究媒体报道如何影响疾病传播与防控变得非常重要.此外,治疗是控制传染病一个极为重要的措施.由于病床数目、药品的存储数量与供应速度、医护人员数量等医疗资源的有限性,如何合理有效地分配、利用医疗资源一直是公共卫生领域关注的重点问题之一.

目前,已有许多学者通过构建传染病动力学模型研究媒体报道或有限医疗资源的影响.学者们在构建具有媒体报道因素的传染病模型时,主要从两个角度出发:一是改变传染病发生率,即通过多种形式的非线性发病率来刻画媒体报道对发病率的直接或间接影响,如指数型发生率^[2-4]、分数型发生率^[5-6]、分段光滑感染率^[7]以及一般发生率^[8]等形式;二是通过单独引入媒体报道量的仓室来刻画媒体报道随时间变化的动态过程^[9-12]等.在关于有限医疗资源对传染病防控影响的研究中,学者们构建模型时根据不同的情况采用了不同的治疗函数,例如连续可微的饱和治疗函数^[13-15]、分段治疗函数^[16-17]等.值得注意的是,同时考虑媒体报道和有限医疗资源对疾病防控影响的研究还比较少.

为了研究媒体报道和有限医疗资源对疾病传播防控的综合影响,本文将借助传染病的“仓室”建模思想建立和分析一类具有媒体报道效应和有限医疗资源的传染病动力学模型.

1 模型建立

受上述研究启发,本文将人群分为易感者(S)、感染者(I)、住院者(H)和康复者(R),引入信息仓室(M).考虑到媒体报道主要影响易感人群的行为,继而影响易感人群与感染人群的发生率,且通常发生率与信息函数 $M(t)$ 呈负相关关系^[11],因此我们采用非线性发生率 $\frac{\beta}{1+qM}$ 来描述媒体报道的影响,其中, β 和 q 均为正数,分别表示发生率和信息覆盖率.此外,在传染病爆发期间,政府相关部门往往会依据感染者的数量增长加大宣传力度,因此我们假设媒体报道的产生与感染者(I)的数量成比例,即 aI ,其中, a 是度量感染者数量变化对媒体信息影响的系数.

由于医疗资源主要影响感染者的就医与治疗,而现有住院者的数量与医院所能收治病人的最大容量将决定感染者的就医程度,因此,我们通过 $rI\left(1-\frac{H}{K}\right)$ 来刻画有限医疗资源对感染者就医的影响,其中, r 是感染者的就医转移率, K 表示医院所能收治病人的最大容量.基于上述假设,我们建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta}{1+qM} SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{1+qM} SI - rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \mu I - \gamma_1 I - d_1 I, \\ \frac{dH}{dt} = rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \mu H - \gamma_2 H - d_2 H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 H - \mu R, \\ \frac{dM}{dt} = aI - \tau M, \\ S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, H(0) = H_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0, M(0) = M_0 \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $S(t)$, $I(t)$, $H(t)$, $R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、感染者、住院者和治愈者的数量, Λ 和 μ 分别是人口输入率和自然死亡率, d_1 和 d_2 分别是感染者与住院者的因病死亡率, γ_1 是感染者的自愈率, γ_2 是住院者的治愈率, τ 是信息的失效率.假设模型(1)的参数均为正常数.

显然,模型(1)的第4个方程可与其他方程解耦,故只需考虑如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta}{1+qM} SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{1+qM} SI - rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \mu I - \gamma_1 I - d_1 I, \\ \frac{dH}{dt} = rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \mu H - \gamma_2 H - d_2 H, \\ \frac{dM}{dt} = aI - \tau M, \\ S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, H(0) = H_0 \geq 0, M(0) = M_0 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

关于模型 (2) 的适定性, 有如下结果.

定理 1 假设初始值满足 $S_0 > 0, I_0 > 0, H_0 > 0, M_0 > 0$, 则模型 (2) 的解 $(S(t), I(t), H(t), M(t))$ 对于任意 $t \geq 0$ 均为正且最终一致有界.

证明 首先证明对于任意的 $t \geq 0$, 有 $S(t) > 0$. 否则, $\exists t > 0$ 使得 $S(t) = 0$, 记上式成立的最小时刻为 t_1 . 故对于 $\forall t \in [0, t_1), S(t) > 0$ 成立. 从而由模型 (2) 的第一个方程可知

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=t_1} = \Lambda > 0.$$

因此, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对于 $\forall t \in (t_1 - \delta_1, t_1)$, 都有 $S(t) < 0$. 这与当 $t \in [0, t_1)$ 时 $S(t) > 0$ 矛盾. 所以, $S(t) > 0$ 对 $\forall t > 0$ 均成立.

由模型 (2) 的第 2 个方程可得

$$I(t) = I(0) \exp\left(\int_0^t \left[\frac{\beta}{1+qM(\eta)} S(\eta) - r\left(1 - \frac{H(\eta)}{K}\right) - \mu - \gamma_1 - d_1 \right] d\eta\right).$$

显然, $I(t) > 0$ 对 $\forall t \geq 0$ 成立. 然后, 由模型 (2) 的第 4 个方程和 $I(t) > 0$ 可知, 对任意的 $t \geq 0$,

$$M(t) = \left(M(0) + \int_0^t aI(\eta)e^{\tau\eta} d\eta\right)e^{-\tau t} > 0.$$

接下来证明对 $\forall t \geq 0$ 都有 $H(t) > 0$. 否则, 存在 $t > 0$ 使得 $H(t) = 0$, 记 t_2 为上式成立的最小时刻. 则对于 $\forall t \in [0, t_2), H(t) > 0$. 从而, 由模型 (2) 的第 3 个方程可得

$$\left. \frac{dH}{dt} \right|_{t=t_2} = rI(t_2) > 0.$$

所以, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得 $\forall t \in (t_2 - \delta_2, t_2), H(t) < 0$. 这与当 $t \in [0, t_2)$ 时 $H(t) > 0$ 矛盾. 故, 对 $\forall t \geq 0, H(t) > 0$ 均成立.

最后, 证明解的一致有界性. 令 $N(t) = S(t) + I(t) + H(t)$, 从而由模型 (2) 可得

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - (\gamma_1 + d_1)I(t) - (\gamma_2 + d_2)H(t) \leq \Lambda - \mu N(t).$$

所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

因此, 存在 $t_3 > 0$ 使得当 $t > t_3$ 时

$$I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

所以 $M(t)$ 满足

$$\frac{dM}{dt} = aI - \tau M \leq \frac{a\Lambda}{\mu} - \tau M, \quad t > t_3.$$

由上式易得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M(t) \leq \frac{a\Lambda}{\mu\tau}.$$

综上所述, 模型 (2) 的解最终一致有界. 得证.

由定理 1 及其证明过程, 可定义模型 (2) 的可行域为

$$\Gamma = \left\{ (S(t), I(t), H(t), M(t)) \in R_+^4 : S(t) + I(t) + H(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}; 0 \leq M(t) \leq \frac{a\Lambda}{\mu\tau} \right\}.$$

本文后续部分中,我们将在上述可行域中进行研究.

2 基本再生数和无病平衡点的稳定性

显然,模型(2)始终存在一个无病平衡点 $P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$. 运用文献[18]中的下一代矩阵法,令

$$F = \begin{bmatrix} \beta \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \mu + \gamma_1 + d_1 + r & 0 \\ -r & \mu + \gamma_2 + d_2 \end{bmatrix}.$$

从而,可定义模型(2)的基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)}.$$

定理 2 若 $R_0 < 1$, 则模型(2)无病平衡点 P_0 局部渐近稳定; 若 $R_0 > 1$, 则 P_0 不稳定.

证明 模型(2)在平衡点 P_0 处线性化后所对应的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\mu & -\beta \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\Lambda}{\mu} - (r + \mu + \gamma_1 + d_1) & 0 & 0 \\ 0 & r & -(\mu + \gamma_2 + d_2) & 0 \\ 0 & a & 0 & -\tau \end{pmatrix}.$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \beta \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \beta \frac{\Lambda}{\mu} + (r + \mu + \gamma_1 + d_1) & 0 & 0 \\ 0 & -r & \lambda + (\mu + \gamma_2 + d_2) & 0 \\ 0 & -a & 0 & \lambda + \tau \end{vmatrix} = 0,$$

对应的特征根为

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{\beta\Lambda}{\mu} - (r + \mu + \gamma_1 + d_1), \lambda_3 = -(\mu + \gamma_2 + d_2), \lambda_4 = -\tau.$$

显然,当 $R_0 < 1$ 时,上述所有特征根都为负数;当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_2 > 0$. 所以,若 $R_0 < 1$, 则无病平衡点 P_0 局部渐近稳定;若 $R_0 > 1$, 则 P_0 不稳定.

定理 3 当 $\frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \gamma_1 + d_1)} < 1$ 时, P_0 在 Γ 内全局渐近稳定.

证明 令

$$V(t) = I(t) + H(t).$$

将 $V(t)$ 沿着模型(2)的解轨线求导,得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{\beta}{1+qM} SI - rI \left(1 - \frac{H}{K}\right) - (\mu + \gamma_1 + d_1)I + rI \left(1 - \frac{H}{K}\right) - (\mu + \gamma_2 + d_2)H = \\ &= \frac{\beta}{1+qM} SI - (\mu + \gamma_1 + d_1)I - (\mu + \gamma_2 + d_2)H \leq \left(\frac{\beta}{1+qM} S - (\mu + \gamma_1 + d_1)\right)I \leq \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma_1 + d_1)\right)I. \end{aligned}$$

所以,当 $\frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \gamma_1 + d_1)} < 1$ 时, $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$. $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ 当且仅当 $I = 0, H = 0$. 所以, $\left\{ (S, I, H, M) \in \Gamma \mid \frac{dV(t)}{dt} = 0 \right\}$ 的最大不变集是 $\{P_0\}$. 由 LaSalle 不变集原理可知, P_0 全局渐近稳定.

3 地方病平衡点的存在性与分支分析

本节将讨论模型(2)正平衡点的存在性及分支问题.

3.1 地方病平衡点的存在性

假设 $E^* = (S^*, I^*, H^*, M^*)$ 为系统 (2) 的正平衡点, 则下述等式成立:

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\beta}{1+qM^*} S^* I^* - \mu S^* = 0, \\ \frac{\beta}{1+qM^*} S^* - r \left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - \mu - \gamma_1 - d_1 = 0, \\ rI^* \left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - \mu H^* - \gamma_2 H^* - d_2 H^* = 0, \\ aI^* - \tau M^* = 0. \end{cases} \quad (3)$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda(1+qM^*)}{\beta I^* + \mu(1+qM^*)}, \\ H^* &= \frac{rI^*}{\frac{r}{K} I^* + \mu + \gamma_2 + d_2}, \\ M^* &= \frac{aI^*}{\tau}. \end{aligned}$$

将上述 S^*, H^*, M^* 的表达式代入式 (3) 的第二个等式, 得到一个关于 I^* 的一元二次方程:

$$A_1(I^*)^2 + B_1 I^* + C = 0, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= -(\mu + \gamma_1 + d_1) \left(\beta + \frac{q\mu a}{\tau} \right) \frac{r}{K}, \\ B_1 &= \frac{\tau r [\beta \Lambda - \mu(\mu + \gamma_1 + d_1)] - K(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)(\mu + \gamma_2 + d_2)(\beta \tau + q\mu a)}{K\tau}, \\ C &= \mu(\mu + \gamma_2 + d_2)(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)(R_0 - 1). \end{aligned}$$

显然, $A_1 < 0$ 恒成立, R_0 与 C 有如下等价关系:

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow C > 0, \quad R_0 = 1 \Leftrightarrow C = 0, \quad R_0 < 1 \Leftrightarrow C < 0.$$

下面讨论方程 (4) 根的情况.

当 $R_0 > 1$ 时, 易知 $C > 0$, 此时方程 (4) 存在唯一正根.

当 $R_0 = 1$ 时, 显然 $C = 0$. 此时, 若 $B_1 > 0$, 则方程 (4) 必存在一个正根; 若 $B_1 < 0$, 方程 (4) 不存在正根.

当 $R_0 < 1$ 时, $C < 0$. 令

$$\bar{R}_0 = \frac{B_1^2 + 4A_1\mu(\mu + \gamma_2 + d_2)(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)}{4A_1\mu(\mu + \gamma_2 + d_2)(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)}, \quad (5)$$

记

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C.$$

经计算可得下述等价关系:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow R_0 = \bar{R}_0, \quad \Delta > 0 \Leftrightarrow R_0 > \bar{R}_0, \quad \Delta < 0 \Leftrightarrow R_0 < \bar{R}_0.$$

因此, 当 $R_0 < 1$ 且 $B_1 > 0$ 时, $R_0 = \bar{R}_0 \Leftrightarrow$ 方程 (4) 有一个正根; $R_0 > \bar{R}_0 \Leftrightarrow$ 方程 (4) 存在两个正根; $R_0 < \bar{R}_0 \Leftrightarrow$ 方程 (4) 没有正根.

此外, 当 $R_0 < 1$ 且 $B_1 < 0$, 方程 (4) 不存在正根.

综上所述, 下述定理成立.

定理 4 模型 (2) 的地方病平衡点存在性条件如下:

- 1) 若 $R_0 > 1$, 则模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点;
- 2) 若 $R_0 \leq 1$ 且 $B_1 < 0$, 则模型 (2) 不存在地方病平衡点;
- 3) 若 $R_0 = 1$ 且 $B_1 > 0$, 则模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点;
- 4) 若 $\bar{R}_0 < R_0 < 1$ 且 $B_1 > 0$, 则模型 (2) 存在两个地方病平衡点;

- 5) 若 $R_0 = \bar{R}_0 < 1$ 且 $B_1 > 0$, 则模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点;
 6) 若 $R_0 < \bar{R}_0 < 1$ 且 $B_1 > 0$, 则模型 (2) 不存在地方病平衡点.

3.2 后向分支

本小节将利用文献 [19] 中的后向分支定理分析系统 (2) 是否会产生后向分支, 并给出其产生条件. 定义

$$\bar{R}^* = \frac{r^2 \Lambda \tau}{K(\mu + \gamma_2 + d_2)[\tau(\mu + \gamma_1 + d_1 + r) + qa\Lambda](\mu + \gamma_1 + d_1 + r)}. \quad (6)$$

定理 5 若 $\bar{R}^* > 1$, 则模型 (2) 在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支; 若 $\bar{R}^* < 1$, 则模型 (2) 在 $R_0 = 1$ 处发生前向分支.

证明 选择 β 作为分支参数. 记 $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (S, I, H, M)$, 则系统 (2) 可表示为

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, \beta),$$

其中 $\bar{f}(\bar{x}, \beta) = (\bar{f}_1(\bar{x}, \beta), \bar{f}_2(\bar{x}, \beta), \bar{f}_3(\bar{x}, \beta), \bar{f}_4(\bar{x}, \beta))$ 的具体形式由系统 (2) 中方程的右端函数确定, 此处不再赘述. 令

$$\beta^* = \frac{\mu(\mu + \gamma_1 + d_1 + r)}{\Lambda},$$

则当 $\beta = \beta^*$ 时, $R_0 = 1$.

经计算可得模型 (2) 在 (P_0, β^*) 处的线性化矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta^* \Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta^* \Lambda}{\mu} - (r + \mu + \gamma_1 + d_1) & 0 & 0 \\ 0 & r & -(\mu + \gamma_2 + d_2) & 0 \\ 0 & a & 0 & -\tau \end{pmatrix},$$

则 \bar{A} 的特征方程为

$$(\lambda + \mu) \left(\lambda - \frac{\beta^* \Lambda}{\mu} + r + \mu + \gamma_1 + d_1 \right) (\lambda + \mu + \gamma_2 + d_2) (\lambda + \tau) = 0.$$

显然 0 是 \bar{A} 的单特征根, 且其他特征根都具有负实部.

下面计算 \bar{A} 的零特征根所对应的右特征向量 \bar{w} . 则 \bar{w} 满足:

$$\begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta^* \Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -(\mu + \gamma_2 + d_2) & 0 \\ 0 & a & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 \end{pmatrix} = 0,$$

经计算可得

$$\bar{w} = \left(-\frac{\beta^* \Lambda}{\mu^2}, 1, \frac{r}{\mu + \gamma_2 + d_2}, \frac{a}{\tau} \right)^T.$$

同理, 计算左特征向量 \bar{v} , 可得

$$\bar{v} = (0, 1, 0, 0).$$

为了利用文献 [19] 的方法, 我们需计算 $\bar{f}_2(\bar{x}, \beta)$ 在 (P_0, β^*) 处所对应的各项偏导数. 经计算可得

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \beta^*, \quad \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{r}{K},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_2 \partial x_4} = \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_4 \partial x_2} = -\frac{\beta^* q \Lambda}{\mu}, \quad \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial x_2 \partial \beta} = \frac{\Lambda}{\mu},$$

其余偏导数都为零. 故

$$\bar{a} = 2\bar{w}_2\bar{v}_2 \left(-\frac{(\beta^*)^2\Lambda}{\mu^2} + \frac{r^2}{K(\mu + \gamma_2 + d_2)} - \frac{\beta^*q\Lambda a}{\mu\tau} \right),$$

$$\bar{b} = \bar{w}_2\bar{v}_2 \frac{\Lambda}{\mu}.$$

显然, $b > 0$, 且 \bar{a} 与 \bar{R}^* 有如下关系:

$$\bar{a} > 0 \Leftrightarrow \bar{R}^* > 1, \bar{a} < 0 \Leftrightarrow \bar{R}^* < 1.$$

由此可知, 当 $\bar{R}^* > 1$ 时, 模型 (2) 在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支; 若 $\bar{R}^* < 1$, 则模型 (2) 在 $R_0 = 1$ 处发生前向分支.

3.3 Hopf 分支

在地方病平衡点 E^* 处的特征方程为

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0, \tag{7}$$

其中

$$A_1 = \tau + \frac{r}{K} I^* + 2\mu + \gamma_2 + d_2 + \frac{\beta I^*}{1 + qM^*},$$

$$A_2 = \tau \left(\frac{r}{K} I^* + \mu + \gamma_2 + d_2 \right) - \left(1 - \frac{H^*}{K} \right) r^2 \tau (I^*)^2 + \frac{a\beta q S^* I^*}{(1 + qM^*)^2} + \frac{\beta^2 S^* I^*}{(1 + qM^*)^2} + \left(\frac{\beta I^*}{1 + qM^*} + \mu \right) \left(\tau + \frac{r}{K} I^* + \mu + \gamma_2 + d_2 \right),$$

$$A_3 = -\frac{r^2 I^*}{K} \left(1 - \frac{H^*}{K} \right) \left(\tau - \mu - \frac{\beta I^*}{1 + qM^*} \right) + \left(\frac{r I^*}{K} + \mu + \gamma_2 + d_2 \right) \left[\frac{a\beta q S^* I^*}{(1 + qM^*)^2} + \mu\tau + \frac{\beta\tau I^*}{1 + qM^*} \right] + \frac{\beta S^* I^*}{(1 + qM^*)^2} \left[aq\mu + \beta \left(\frac{r I^*}{K} + \mu + \gamma_2 + d_2 + \tau \right) \right],$$

$$A_4 = \frac{\beta\tau r I^*}{K(1 + qM^*)} \left[\mu + (\mu + \gamma_1 + d_1) \left(\frac{\mu}{\beta} (1 + qM^*) + I^* \right) \right] + \frac{\beta S^* I^*}{(1 + qM^*)^2} \left[\frac{aq r I^*}{K} + (aq + \beta\tau)(\mu + \gamma_2 + d_2) \right].$$

定理 6 若条件 (8) 成立, 则当 β 穿过曲线 $\beta = \beta^*$ 时, 在地方病平衡点 E^* 附近会出现 Hopf 分支.

证明 选择 β 作为分支参数. 假设在地方病平衡点 E^* 处的特征方程 (7) 有两个实根 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 和一对共轭虚根 $\alpha \pm bi, \alpha, b \in \mathbf{R}$. 于是, 有

$$Q(\lambda) = \lambda^4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha)\lambda^3 + (\lambda_1\lambda_2 + 2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha^2 + b^2)\lambda^2 - ((\alpha^2 + b^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\alpha\lambda_1\lambda_2)\lambda + (\alpha^2 + b^2)\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

结合方程 (7) 可知, $A_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha), A_2 = \lambda_1\lambda_2 + 2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha^2 + b^2, A_3 = (\alpha^2 + b^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\alpha\lambda_1\lambda_2, A_4 = (\alpha^2 + b^2)\lambda_1\lambda_2$.

因此, 我们考虑当特征方程 $Q(\lambda) = 0$ 时, 有两个实根 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 和一对纯虚根 $\pm bi, b \in \mathbf{R}$ 的情况. 此时, $A_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), A_2 = \lambda_1\lambda_2 + b^2, A_3 = -b^2(\lambda_1 + \lambda_2), A_4 = b^2\lambda_1\lambda_2$. 于是

$$A_3(A_1A_2 - A_3) - A_4A_1^2 = 0,$$

可解得 $\beta = \beta^*$. 因此, 这一对纯虚根出现对应的阈值曲线为 $\beta = \beta^*$. 此时, 特征方程 (7) 可改写为

$$\left(\lambda^2 + \frac{A_3}{A_1} \right) \left(\lambda^2 + A_1\lambda + \frac{A_1A_4}{A_3} \right) = 0,$$

且 $b^2 = A_3/A_1$.

下面我们验证 Hopf 分支的横截条件. 将 $\alpha + bi$ 代入特征方程 (7), 显然 $Q(\alpha + bi) = 0$, 相应地, 其对应的实部 $\text{Re}(Q(\alpha + bi)) = 0$. 通过计算 $\text{Re}(Q(\alpha + bi)) = 0$, 可知

$$\Delta = \alpha^4 - 6\alpha^2b^2 + b^4 + A_1(\alpha^3 - 3\alpha b^2) + A_2(\alpha^2 - b^2) + A_3\alpha + A_4 = 0,$$

Δ 是关于 α 和 β 的函数, 于是, $\Delta(\alpha, \beta) = 0$ 定义了一个隐函数 $\alpha(\beta)$. 对于 Δ 关于 β 求导, 可得 $\partial\Delta/\partial\beta = 0$, 即

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha} \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta} = 0, \text{ 因此 } \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\frac{\partial\Delta/\partial\beta}{\partial\Delta/\partial\alpha}.$$

下面我们将确定在曲线 $\beta = \beta^*$ 处 $\partial\alpha/\partial\beta$ 的符号.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\beta^*} &= \left(-b^2\frac{\partial A_2}{\partial\beta} + \frac{\partial A_4}{\partial\beta}\right)\Big|_{\beta=\beta^*} = \\ &= -b^2\left[\frac{aqS^*I^*}{(1+qM^*)^2} + \frac{I^*}{1+qM^*}\left(\tau + \frac{r}{K}I^* + \mu + \gamma_2 + d_2\right) + \frac{2\beta S^*I^*}{(1+qM^*)^2}\right] + \\ &= \frac{2\beta\tau S^*I^*}{(1+qM^*)^2}\left(\frac{r}{K}I^* + \mu + \gamma_2 + d_2\right) - \left(1 - \frac{H^*}{K}\right)\frac{r^2\tau(I^*)^2}{K(1+qM^*)}, \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=\beta^*} = -3b^2A_1 + A_3 = 2b^2(\lambda_1 + \lambda_2) < 0.$$

若条件

$$\begin{aligned} -\frac{A_3}{A_1}\left[\frac{aqS^*I^*}{(1+qM^*)^2} + \frac{I^*}{1+qM^*}\left(\tau + \frac{r}{K}I^* + \mu + \gamma_2 + d_2\right) + \frac{2\beta S^*I^*}{(1+qM^*)^2}\right] + \\ \frac{2\beta\tau S^*I^*}{(1+qM^*)^2}\left(\frac{r}{K}I^* + \mu + \gamma_2 + d_2\right) - \left(1 - \frac{H^*}{K}\right)\frac{r^2\tau(I^*)^2}{K(1+qM^*)} \neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

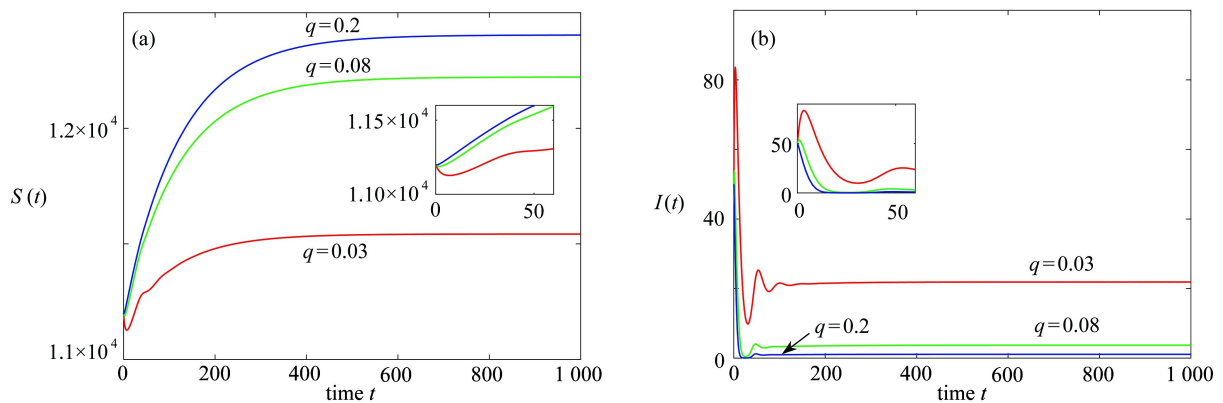
成立, 则有 $\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\beta^*} \neq 0$. 因此, $\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\frac{\partial\Delta/\partial\beta}{\partial\Delta/\partial\alpha} \neq 0$, 即证明了当 β 穿过曲线 $\beta = \beta^*$ 时, Hopf 分支将会出现.

4 数值模拟

令

$$\begin{aligned} \Lambda = 100, \beta = 0.0001, \mu = 0.008, K = 20, r = 0.6, \gamma_1 = 0.09, \\ \gamma_2 = 0.3, d_1 = 0.06, d_2 = 0.001, a = 0.7, \tau = 0.2, \end{aligned}$$

并取初值为 $(S(0), I(0), H(0), M(0)) = (11\ 200, 50, 10, 7)$, 则系统(2)解的长期性态随媒体报道信息覆盖率 q 的变化趋势如图1所示. 图1(b)和图1(c)表明提高媒体报道的信息覆盖率不仅可以降低稳态时的疾病感染人数和住院人数, 而且可以降低疾病流行阶段感染人数和住院人数的峰值. 此外, 当 $q=0.03$, $(S(0), I(0), H(0), M(0)) = (10\ 000, 50, 10, 7)$, 除 K 外其余参数均与图1相同时, 系统(2)解的长期性态随医院收治病人的最大容量 K 的变化趋势如图2所示. 图2(b)和图2(c)表明, 提高医院对病人的最大容纳量不仅可以降低稳态时的疾病感染人数和住院人数, 而且可以降低疾病流行阶段感染人数峰值. 值得注意的是, 图1和图2中参数所对应的基本再生数均相同, 均为 $R_0 = 1.6491$. 所以, 上述数值结果表明: 虽然提高媒体报道的信息覆盖率或医院对病人的最大容纳量并不能降低基本再生数, 但却可以显著降低疾病流行的峰值或稳态时的感染人数.



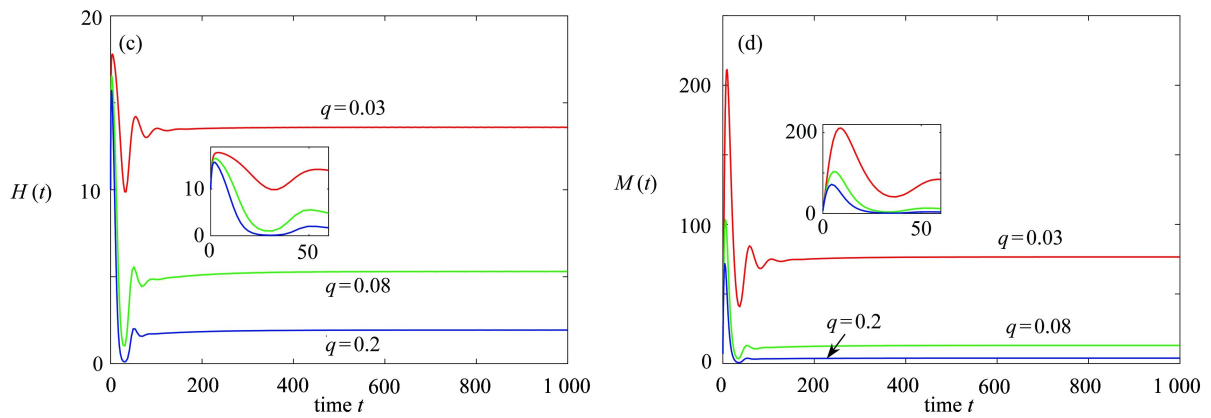


图 1 当 $q = 0.03, 0.08, 0.2$ 时, 模型 (2) 解的长期行为
 Fig. 1 For $q = 0.03, 0.08, 0.2$, the long-term behavior of the solution for model (2)

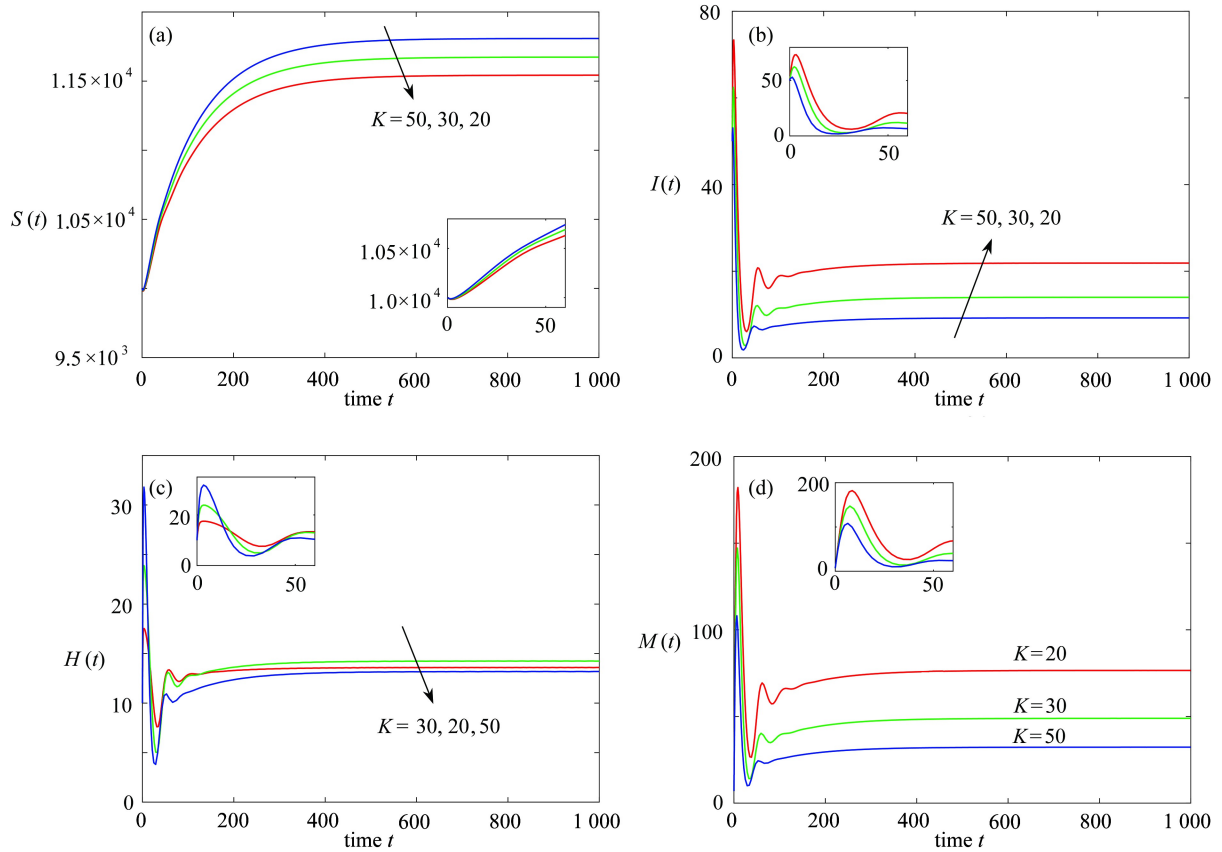


图 2 当 $K = 20, 30, 50$ 时, 模型 (2) 解的长期行为
 Fig. 2 For $K = 20, 30, 50$, the long-term behavior of the solution for model (2)

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

定理 4 和定理 5 结果表明, 系统可能会存在多个平衡点或在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支. 接下来, 我们将以 β 为分支参数, 进一步研究系统可能会产生的复杂动力学行为. 令

$$\Lambda = 5, \mu = 0.008, K = 2, r = 0.2, \gamma_1 = 0.06,$$

$$\gamma_2 = 0.3, d_1 = 0.01, d_2 = 0.001, a = 0.7, \tau = 0.2, q = 0.03,$$

此时系统 (2) 随 β 变化会在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支 (见图 3(a), 图中红色虚线代表不稳定平衡点, 蓝色实线代表稳定平衡点, SN 代表鞍结点分支, Hopf 代表 Hopf 分支). 随着 R_0 的不断增大, 系统 (2) 首先在 $R_0 = 0.943$ 处发生

鞍结点分支,此时系统出现一个重数为2的正平衡点;随着 R_0 的进一步增大,系统在区间(0.943,1)内出现两个正平衡点,其中取值较小的平衡点始终不稳定.此外,系统在 $R_0 = 0.949\ 378$ 处发生亚临界 Hopf 分支,因此取值较大的正平衡点会从不稳定的平衡点变为稳定的平衡点.当 R_0 大于1时,系统存在唯一稳定的正平衡点.值得注意的是,当系统发生后向分支时,可能会出现双稳定现象.令 $\beta = 0.000\ 06$, $q = 0.01$, $K = 30$,其余参数与图1相同.此时 $\bar{R}_0 = 0.971\ 7 < R_0 = 0.989\ 4 < 1$,系统(2)存在两个正平衡点(12 371, 1.463 6, 2.596 0, 5.122 5)和(11 732, 12.576 4, 134 620, 44.017 3),数值模拟表明系统解的最终性态依赖于初值(见图4),即此时系统发生了双稳定现象.

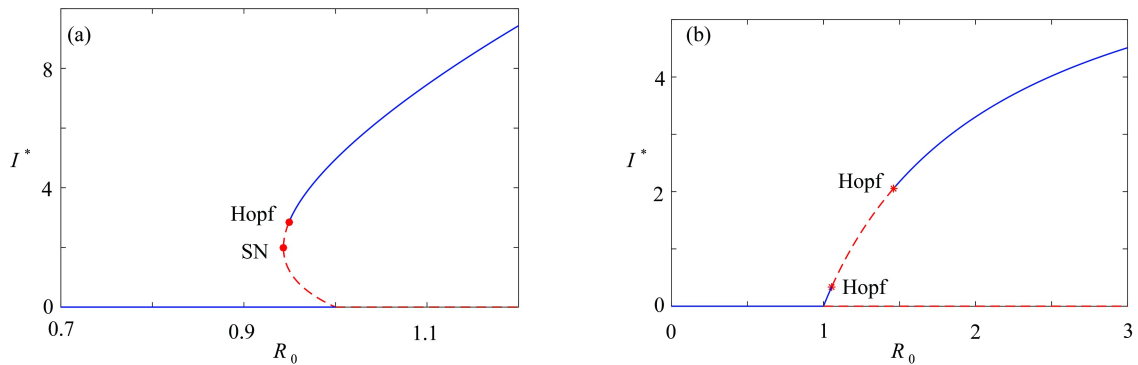


图3 当 $\Lambda = 5$ 或 1 时,模型(2)的非负平衡点随 R_0 变化的分支图:(a) $\Lambda = 5$; (b) $\Lambda = 1$
 Fig. 3 For $\Lambda = 5$ or 1 , the bifurcation of nonnegative equilibria for model (2) with respective to R_0 : (a) $\Lambda = 5$; (b) $\Lambda = 1$

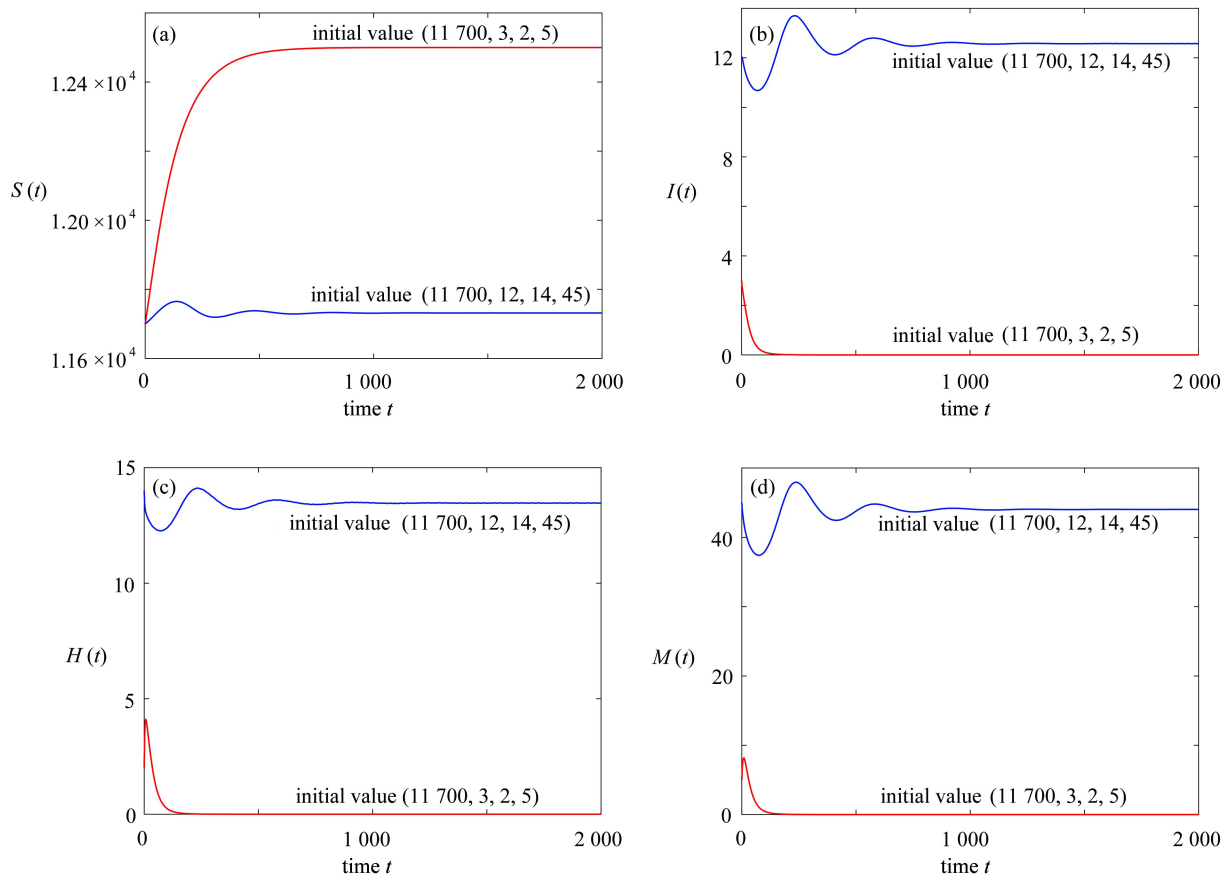


图4 模型(2)解的最终性态对初值的依赖性(双稳定现象)
 Fig. 4 Dependence of the final behavior of the solution for model (2) on the initial value (bistable phenomenon)

当取 $\Lambda = 1$,其余参数取值与图3(a)相同时,随着 β 变化,系统会在 $R_0 = 1$ 处发生前向分支(见图3(b)).当

$R_0 > 1$ 时,随着 R_0 的不断增大,系统始终存在唯一正平衡点,其稳定性经历了从稳定到不稳定再到稳定的变化过程.特别地,系统在 $R_0 = 1.053\ 383$ 和 $1.460\ 520$ 处会产生超临界 Hopf 分支.此外,在区间 $(1.053\ 38, 1.460\ 520)$ 内系统(2)存在稳定的周期解(见图5).

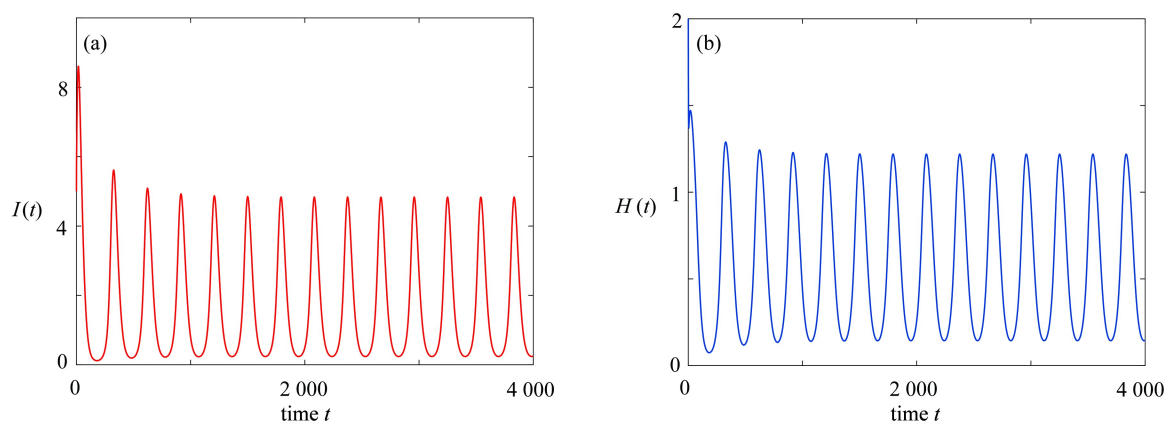


图5 当 $R_0 = 1.3$ 时,模型(2)解的长期行为,其中 $\Lambda = 1, \mu = 0.008, K = 2, r = 0.2, \gamma_1 = 0.06, \gamma_2 = 0.3,$

$d_1 = 0.01, d_2 = 0.001, a = 0.7, \tau = 0.2, q = 0.03,$ 初值为 $(100, 5, 2, 10)$

Fig. 5 For $R_0 = 1.3$, the long-term behavior of the solution for model (2), where $\Lambda = 1, \mu = 0.008, K = 2, r = 0.2, \gamma_1 = 0.06, \gamma_2 = 0.3,$

$d_1 = 0.01, d_2 = 0.001, a = 0.7, \tau = 0.2, q = 0.03,$ and the initial value is $(100, 5, 2, 10)$

5 结 语

媒体报道和医院治疗都是防控传染病的关键因素,基于此,本文建立了一个考虑媒体报道和饱和治疗综合影响的传染病模型.定义了疾病的基本再生数 R_0 ,得到了无病平衡点的稳定性条件,并讨论了正平衡点的存在性,发现系统可能会发生后向分支和 Hopf 分支.后向分支的出现意味着当基本再生数小于 1 时,疾病仍可能会持续流行,从而不利于传染病的控制.同时,利用文献 [19] 中的方法,得到了后向分支发生的参数条件: $\bar{R}^* > 1$. \bar{R}^* 的表达式表明媒体报道的信息覆盖率 q 、感染者数量变化对媒体信息的影响系数 a 及医院接收病人的最大容纳量 K 均与 \bar{R}^* 成反比.所以,媒体报道的覆盖率越高或医院收治病人的最大容纳量越大,系统发生后向分支的可能性就越低,对疾病的控制越有利.与此同时, Hopf 分支发生的条件 (8) 与媒体报道和有限医疗资源均有关,这也说明二者对模型稳定性的影响.另外,我们还通过数值模拟进一步研究了上述因素的影响,研究发现:虽然提高媒体报道的信息覆盖率或医院对病人的最大容纳量并不能降低基本再生数,但却可以显著降低疾病流行的峰值或稳态时的感染人数;系统不仅可能会发生后向分支,还可能会发生鞍结点分支、Hopf 分支等复杂动力学现象,正平衡点的稳定性也会随参数的变化而改变.事实上,媒体报道与有限医疗资源二者是交互影响疾病的传播和控制,而本文则是侧重于二者分别对易感者和感染者的影响.因此,我们将在接下来的工作中进一步研究媒体报道与有限医疗资源互相耦合的传染病模型.

参考文献 (References):

- [1] 陈兴志, 田宝单, 王代文, 等. 基于SEIR模型的COVID-19疫情防控效果评估和预测[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(2): 199-211. (CHEN Xingzhi, TIAN Baodan, WANG Daiwen, et al. Evaluation and prediction of prevention and control effects of the COVID-19 epidemic based on the SEIR model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(2): 199-211. (in Chinese))
- [2] LIU R, WU J, ZHU H. Media psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases[J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2007, 8(3): 153-164.
- [3] CUI J, SUN Y, ZHU H. The impact of media on the control of infectious diseases[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2008, 20(1): 31-53.
- [4] XIAO Y, ZHAO T, TANG S. Dynamics of an infectious diseases with media/psychology induced non-smooth in-

- cidence[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2013, **10**(2): 445-461.
- [5] LIU Y, CUI J. The impact of media coverage on the dynamics of infectious disease[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2008, **1**(1): 65-74.
- [6] TCHUENCHE J M, DUBE N, BHUNU C P, et al. The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza[J]. *BMC Public Health*, 2011, **11**(1): 31-53.
- [7] 刘玉英, 肖燕妮. 一类受媒体影响的传染病模型的研究[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(4): 399-407. (LIU Yuying, XIAO Yanni. An epidemic with saturated media/psychological impact[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(4): 399-407.(in Chinese))
- [8] CUI J, TAO X, ZHU H. An SIS infection model incorporating media coverage[J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2008, **38**(5): 1323-1334.
- [9] D'ONOFRIO A, MANFREDI P. Information-related changes in contact patterns may trigger oscillations in the endemic prevalence of infectious diseases[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2009, **256**(3): 473-478.
- [10] BUONOMO B, D'ONOFRIO A, LACITIGNOLA D. Globally stable endemicity for infectious diseases with information-related changes in contact patterns[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, **25**(7): 1056-1060.
- [11] HUO H, YANG P, XIANG H. Stability and bifurcation for an SEIS epidemic model with the impact of media[J]. *Physica A*, 2018, **490**: 702-720.
- [12] 廖书, 杨炜明. 考虑媒体播报效应的双时滞传染病模型[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(12): 1412-1424. (LIAO Shu, YANG Weiming. An epidemic model with dual delays in view of media coverage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1412-1424.(in Chinese))
- [13] ALQAHTANI R T, AJBAR A. Study of dynamics of a COVID-19 model for Saudi Arabia with vaccination rate, saturated treatment function and saturated incidence rate[J]. *Mathematics*, 2021, **9**(23): 3134.
- [14] AVILA-VALES E, PEREZ A G C. Dynamics of a time-delayed SIR epidemic model with logistic growth and saturated treatment[J]. *Chaos Soliton & Fractals*, 2019, **127**: 55-69.
- [15] LI J, TENG Z, WANG G, et al. Stability and bifurcation analysis of an SIR epidemic model with logistic growth and saturated treatment[J]. *Chaos Soliton & Fractals*, 2017, **99**: 63-71.
- [16] WANG W. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment[J]. *Mathematical Biosciences*, 2006, **201**(1/2): 58-71.
- [17] ZHANG X, LIU X. Backward bifurcation and global dynamics of an SIS epidemic model with general incidence rate and treatment[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(2): 565-575.
- [18] HEFFERNAN J M, SMITH R J, WAHL L M. Perspectives on the basic reproductive ratio[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2005, **2**(4): 281-293.
- [19] CASTILLO-CHOVEZ C, SONG B J. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. *Mathematical Bioscience and Engineering*, 2004, **1**(2): 361-404.