

SAV/重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程*

黄蓉, 邓杨芳, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

(我刊编委赵景军推荐)

摘要: 采用标量辅助变量 (scalar auxiliary variable, SAV) 方法结合重心插值配点法求解二维 Allen-Cahn 方程. 在时间方向上分别采用 Crank-Nicolson 格式、二阶向后差分格式离散, 空间方向上采用重心 Lagrange 插值配点法离散, 建立了两种无条件能量稳定 SAV 格式, 并给出了重心插值配点格式的逼近性质. 数值实验表明: 两种 SAV 配点格式的时间收敛阶为二阶, 并满足能量递减规律. 与空间采用有限差分法离散对比, 重心 Lagrange 配点格式具有指数收敛的特性.

关键词: Allen-Cahn 方程; 重心 Lagrange 插值配点法; SAV 方法; 能量稳定

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430149

The SAV Scheme Based on the Barycentric Interpolation Collocation Method for the Allen-Cahn Equation

HUANG Rong, DENG Yangfang, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, P.R.China)

(Recommended by ZHAO Jingjun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The scalar auxiliary variable (SAV) approach combined with the barycentric interpolation collocation method was proposed to solve the 2D Allen-Cahn equation. Two unconditional energy-stable SAV schemes were constructed based on the Crank-Nicolson scheme and the 2nd-order backward difference scheme for discretization in time, respectively, and the barycentric Lagrange interpolation collocation method for discretization in space. Moreover, the approximation properties of the barycentric Lagrange interpolation were presented. Numerical experiments show that the time-convergence rates of the 2 types of SAV schemes are of the 2nd order and both schemes satisfy the energy decay law. Compared with the finite difference method in space, the barycentric Lagrange interpolation collocation scheme features exponential convergence.

Key words: Allen-Cahn equation; barycentric Lagrange interpolation collocation method; scalar auxiliary variable scheme; energy stability

* 收稿日期: 2022-04-27; 修订日期: 2022-06-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701197); 中央高校基本科研业务费(ZQN-702)

作者简介: 黄蓉(1995—), 女, 硕士生 (E-mail: hraccount@163.com);

邓杨芳(1997—), 女, 硕士生 (E-mail: hqu deng@163.com);

翁智峰(1985—), 男, 副教授 (通讯作者. E-mail: zfwmath@163.com).

引用格式: 黄蓉, 邓杨芳, 翁智峰. SAV/重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 573-582.

0 引言

Allen-Cahn 方程是一类求解界面问题的数学模型,最早由 Allen 和 Cahn^[1]在 1979 年引入,用来描述晶体反相位边界的运动.此后,Allen-Cahn 方程在描述各类复杂现象中占据着重要地位,如图像处理^[2]、晶体生长^[3]、平均曲率-流量^[4]等.本文考虑如下的 Allen-Cahn 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \Delta u(\mathbf{x},t) + F'(u(\mathbf{x},t)) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(\mathbf{x},t) = f(t), u(\mathbf{x},t) = g(t), & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $u(\mathbf{x},t)$ 是相场函数, $F(u) = (u^2 - 1)^2 / (4\varepsilon^2)$, $\varepsilon > 0$ 是界面宽度参数, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是有界区域.

Allen-Cahn 方程可以视为自由能泛函的 L^2 梯度流^[5]:

$$E(u) = \int_{\Omega} F(u) + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx. \quad (2)$$

将能量泛函 $E(u)$ 关于 t 求导,可知 Allen-Cahn 方程满足能量递减规律,即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u) &= \int_{\Omega} (F'(u)u_t + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx = \\ &= \int_{\Omega} (F'(u)u_t - \Delta u \cdot u_t) dx = - \int_{\Omega} u_t^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Allen-Cahn 方程具有广泛的应用前景,但其解析解往往难以求出,因此许多学者致力于其数值模拟的研究,提出了各种稳定高效的数值模拟方法.Zhai 等^[6]采用紧致差分交替方向隐式(ADI)方法求解高维 Allen-Cahn 方程;Weng 等^[7]基于算子分裂法求解 Allen-Cahn 方程,并给出了格式的稳定性分析;Li 等^[8]采用有限元法建立 Allen-Cahn 方程的无条件能量稳定格式,并对数值格式进行了误差分析;Liao 等在文献[9]中构建了变步长的二阶向后差分格式(BDF2)来求解 Allen-Cahn 方程;Li 和 Song 等^[10]采用非线性内罚间断 Galerkin 有限元(IPDGFE)方法求解 Allen-Cahn 方程,建立了时间二阶精度、能量稳定的高效数值格式;Li 和 Ju 等^[11]提出了守恒型 Allen-Cahn 方程的极大值原理分析;汪精英等^[12]基于 Laplace 变换,结合谱方法和有限差分法求解了分数阶 Cahn-Hilliard 相场方程.

目前,无网格方法^[13-14]逐渐引起学者们的关注,重心 Lagrange 插值配点法是一种新型的无网格方法,由 Lagrange 插值公式引入重心权推导而来,可以克服后者数值不稳定的缺陷.当节点数量增多时,采用 Lagrange 插值公式来逼近函数时易出现 Runge 现象,节点适应性差;而重心 Lagrange 插值公式在选取特殊的节点时,如 Chebyshev 点族,具有优良的数值稳定性,解决了 Lagrange 插值公式逼近函数时出现的震荡现象,提高了节点的适应性.此外,重心 Lagrange 插值配点法兼具精度高、编程简单、易于计算等优势.近年来,重心 Lagrange 插值配点法已被应用于求解各类问题,如平面弹性问题^[15]、Burgers 方程^[16]、最优控制问题^[17]、Allen-Cahn 方程^[18]、高维 Fredholm 积分方程^[19]等.尽管关于重心 Lagrange 插值配点法数值应用的研究很多,但目前该方法的收敛性分析、误差分析的理论工作还较少.最近,Yi 等^[20]提出了求解时间分数阶电报方程的重心 Lagrange 插值方法,并给出了离散系统的误差分析.

近年来提出的标量辅助变量(SAV)方法^[21-25]是一种新型高效的处理非线性问题的策略.该方法基于 IEQ 格式改进,保留了 IEQ 格式的优势并克服其缺陷,为梯度流模型构建时间离散化方案提供了一种高效而稳定的策略.SAV 方法具备两大优势:一方面,SAV 格式扩大了 IEQ 格式的使用范围,不再局限于非线性势函数有下界的情形下使用;另一方面,SAV 方法借助引入不依赖空间变量的辅助变量,在时间步只涉及到常系数,构建线性无条件能量稳定的离散系统.目前,SAV 方法已被应用于求解各种问题.Huang 等^[22]为梯度流模型提出了一种高效且准确的新型 SAV 方法.Cheng 等^[23]提出了广义 SAV(G-SAV)方法,该方法可保持原始能量而非修改能量的无条件能量稳定,同时也能保持原始 SAV 方法的基本优势.Li 和 Shen^[24]基于 SAV Fourier 谱格式求解相场晶体方程,并给出了无条件能量稳定格式的误差分析.

基于前人的工作,本文着重于空间离散,采用新型的重心插值配点格式来构建二维 Allen-Cahn 方程的 SAV 无条件能量稳定数值格式.在时间方向上采用的离散方法是 Crank-Nicolson(CN2)和 BDF2.此外,给出了重心 Lagrange 插值配点格式的逼近性质.为验证所提格式的高精度,将重心插值配点格式与有限差分格式进行对比,数值算例验证了基于 SAV 方法的重心 Lagrange 配点格式具有指数收敛的特性.

1 重心 Lagrange 插值配点法

本文采用一种新型的无网格方法——重心 Lagrange 插值配点法,对空间方向进行离散.对于 $M + 1$ 个互异节点 $x_k (k = 0, 1, \dots, M)$,令函数 $V(x)$ 在节点 x_k 处的函数值是 V_k ,插值多项式 $P(x)$ 在离散节点 x_k 处成立 $P(x_k) = V_k$.

将多项式 $P(x)$ 改写成 Lagrange 插值形式:

$$P(x) = \sum_{k=0}^M L_k(x) V_k, \quad k = 0, 1, \dots, M, \tag{4}$$

式中, Lagrange 插值基函数为

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k}^M (x - x_i) / \prod_{i \neq k}^M (x_k - x_i), \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

记 $L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_M)$,则基函数 $L_k(x)$ 的另一表达式为

$$L_k(x) = L(x) \frac{w_k}{x - x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \tag{5}$$

式中,重心权 $w_k = 1 / \prod_{k \neq i} (x_k - x_i)$.

将式(5)代入式(4),并令 $P(x) = 1$,可得

$$P(x) = L(x) \sum_{k=0}^M \frac{w_k}{x - x_k} V_k, \quad 1 = L(x) \sum_{k=0}^M \frac{w_k}{x - x_k}. \tag{6}$$

据上式,可推出重心 Lagrange 插值公式为

$$P(x) = \frac{\sum_{k=0}^M \frac{w_k}{x - x_k} V_k}{\sum_{k=0}^M \frac{w_k}{x - x_k}} := \sum_{k=0}^M \alpha_k(x) V_k. \tag{7}$$

令 $P(x)$ 关于 x 求导,并在离散节点 x_i 处成立,即

$$P^{(\mu)}(x_i) = \sum_{k=0}^M \alpha_k^{(\mu)}(x_i) V_k := \sum_{k=0}^M D_{ik}^{(\mu)} V_k, \quad \mu = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

式中, $D_{ik}^{(\mu)}$ 是微分矩阵的元素.由数学归纳法可知, μ 阶微分矩阵元素的递推公式^[26]如下:

$$\begin{cases} D_{ik}^{(\mu)} = \mu(D_{ii}^{(\mu-1)} D_{ik}^{(1)} - (D_{ik}^{(\mu-1)}) / (x_i - x_k)), & i \neq k, \\ D_{ii}^{(\mu)} = - \sum_{k=0, k \neq i}^M D_{ik}^{(\mu)}. \end{cases} \tag{9}$$

重心插值配点法在选取 Chebyshev 点族时具有优良的数值稳定性,本文选取的节点和对应的重心权表达式为

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{M} \pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, M. \tag{10}$$

$$w_k = (-1)^k \delta^k, \quad \delta^k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \text{ or } M, \\ 1, & \text{others.} \end{cases} \tag{11}$$

针对选取的第二类 Chebyshev 点族,令空间 x, y 方向的节点数分别为 M, N .类似上述推导过程,则二元

函数 $u(x, y)$ 在张量型节点 (x_k, y_j) 的重心 Lagrange 插值公式为

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_k(x) \gamma_j(y) u(x_k, y_j). \quad (12)$$

考虑 $u(x, y)$ 分别对变量 x, y 求二阶偏导数, 即

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) = \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_k''(x) \gamma_j(y) u(x_k, y_j), \\ u_{yy}(x, y) = \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_k(x) \gamma_j''(y) u(x_k, y_j). \end{cases} \quad (13)$$

2 Allen-Cahn 方程的 SAV 配点格式

2.1 Allen-Cahn 方程的离散格式推导

在本小节中, 构造二维 Allen-Cahn 方程的全离散格式. 应用 SAV 策略, 在时间方向采用 CN2 格式离散, 空间方向采用重心 Lagrange 插值配点格式离散, 建立时间二阶精度的 SAV 数值格式, 记为 CN2-BLI. 为便于分析, 定义 (\cdot, \cdot) 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 L^2 内积和 L^2 范数.

为构建 SAV 方案, 在 Allen-Cahn 方程中引入变量 ω , 将式(1)改写为

$$\omega = -\Delta u + F'(u). \quad (14)$$

引入 SAV 方案的辅助变量 $R = \sqrt{E_1(u)}$, 则方程(1)可转换成如下系统:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega, \quad (15a)$$

$$\omega = -\Delta u + \frac{R(t)}{\sqrt{E_1(u)}} F'(u), \quad (15b)$$

$$R_t = \frac{1}{2\sqrt{E_1(u)}} \int_{\Omega} F'(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx, \quad (15c)$$

其中 $E_1(u) = \int_{\Omega} F(u) dx + C_1$, C_1 是使得 $E_1(u) \geq 0$ 成立的任意正常数.

分别将式(15a)内积 ω 、式(15b)内积 $\partial u / \partial t$ 、式(15c)乘以 $2R$, 可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + R^2 \right) = -\|\omega\|^2 \leq 0. \quad (16)$$

式(16)表明修正能量 $E(u) = (u, -\Delta u) / 2 + R^2$ 是无条件能量稳定的.

在时间方向采用 CN2 格式进行离散, 则 Allen-Cahn 方程的半离散格式如下:

$$\frac{u^{s+1} - u^s}{\tau} = -\omega^{s+1/2}, \quad (17a)$$

$$\omega^{s+1/2} = -\Delta u^{s+1/2} + \frac{r^{s+1/2}}{\sqrt{E_1(\tilde{u}^{s+1/2})}} F'(\tilde{u}^{s+1/2}), \quad (17b)$$

$$\frac{r^{s+1} - r^s}{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{E_1(\tilde{u}^{s+1/2})}} \left(F'(\tilde{u}^{s+1/2}), \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau} \right), \quad (17c)$$

式中, $\omega^{s+1/2} = (\omega^{s+1} + \omega^s) / 2$, $u^{s+1/2} = (u^{s+1} + u^s) / 2$, $\tilde{u}_N^{s+1/2} = (3u_N^s - u_N^{s-1}) / 2$, 特别地, 当 $s = 0$ 时, 采用一阶格式求解 \tilde{u}_N^1 .

将式(17a)、式(17b)分别与 $\omega^{s+1/2}$, $u^{s+1} - u^s$ 作内积, 式(17c)乘以 $2r^{s+1/2}$, 可得

$$(u^{s+1} - u^s, \omega^{s+1/2}) + \tau(\omega^{s+1/2}, \omega^{s+1/2}) = 0, \quad (18)$$

$$(\omega^{s+1/2}, (u^{s+1} - u^s)) = (-\Delta u^{s+1/2}, (u^{s+1} - u^s)) + \left(\frac{r^{s+1/2}}{\sqrt{E_1(\tilde{u}^{s+1/2})}} F'(\tilde{u}^{s+1/2}), (u^{s+1} - u^s) \right), \quad (19)$$

$$2r^{s+1/2}(r^{s+1} - r^s) = \left(\frac{r^{s+1/2}}{\sqrt{E_1(\tilde{u}^{s+1/2})}} F'(\tilde{u}^{s+1/2}), (u^{s+1} - u^s) \right). \tag{20}$$

将式(18)–(20)结果化简,可得

$$\frac{1}{2}(\nabla(u^{s+1} + u^s), \nabla(u^{s+1} - u^s)) + (r^{s+1} + r^s, r^{s+1} - r^s) + \tau \|\omega^{s+1/2}\|^2 = 0. \tag{21}$$

整理如下:

$$\frac{1}{2} \|\nabla u^{s+1}\|^2 + (r^{s+1})^2 - \left(\frac{1}{2} \|\nabla u^s\|^2 + (r^s)^2 \right) = -\tau \|\omega^{s+1/2}\|^2 \leq 0. \tag{22}$$

综上, Allen-Cahn 方程的半离散格式(17a)–(17c)是关于时间无条件能量稳定的.

推导 Allen-Cahn 方程的全离散 CN2-BLI 格式: 给定 u_N^s, r^s , 则求解 u_N^{s+1}, r^{s+1} 的计算格式为

$$\begin{cases} \frac{u_N^{s+1} - u_N^s}{\tau} = -\omega_N^{s+1/2}, \\ \omega_N^{s+1/2} = -D^h u_N^{s+1/2} + \frac{r^{s+1/2}}{\sqrt{E_1(\tilde{u}_N^{s+1/2})}} F'(\tilde{u}_N^{s+1/2}), \\ \frac{r^{s+1} - r^s}{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{E_1(\tilde{u}_N^{s+1/2})}} \left(F'(\tilde{u}_N^{s+1/2}), \frac{u_N^{s+1} - u_N^s}{\tau} \right), \end{cases} \tag{23}$$

式中,空间离散算子 $D^h = C^{(2)} \otimes I_N + I_M \otimes D^{(2)}$, $C^{(2)}$ 和 $D^{(2)}$ 分别是空间 x 和 y 方向的二阶微分矩阵.

考虑 SAV 配点格式的具体求解过程: 为消去中间变量 $\omega_N^{s+1/2}, r^{s+1}$, 可设 $\sigma^s = \frac{F'(\tilde{u}_N^{s+1/2})}{\sqrt{E_1(\tilde{u}_N^{s+1/2})}}$, 代入式(23),

整理如下:

$$\left(I - \frac{\tau}{2} D^h \right) u_N^{s+1} + \frac{\tau}{4} (u_N^{s+1}, \sigma^s) \sigma^s = \left(I + \frac{\tau}{2} D^h \right) u_N^s - \tau r^s \sigma^s + \frac{\tau}{4} (u_N^s, \sigma^s) \sigma^s := Y^s. \tag{24}$$

记 $A = I - (\tau/2) D^h$, 上式方程两边同时乘以 A^{-1} , 即

$$u_N^{s+1} + \frac{\tau}{4} (u_N^{s+1}, \sigma^s) A^{-1} \sigma^s = A^{-1} Y^s. \tag{25}$$

将式(25)与 σ^s 作内积, 即

$$(u_N^{s+1}, \sigma^s) + \frac{\tau}{4} (u_N^{s+1}, \sigma^s) (A^{-1} \sigma^s, \sigma^s) = (A^{-1} Y^s, \sigma^s). \tag{26}$$

经整理, 可得

$$\left(1 + \frac{\tau}{4} (A^{-1} \sigma^s, \sigma^s) \right) (u_N^{s+1}, \sigma^s) = (A^{-1} Y^s, \sigma^s), \tag{27}$$

故

$$(u_N^{s+1}, \sigma^s) = \frac{(A^{-1} Y^s, \sigma^s)}{1 + (\tau/4) (A^{-1} \sigma^s, \sigma^s)}. \tag{28}$$

将式(28)代入式(24), 可先求解出 u_N^{s+1} , 再求解得到 r^{s+1} , 即

$$\begin{cases} u_N^{s+1} = \frac{Y^s - (\tau/4) (u_N^{s+1}, \sigma^s) \sigma^s}{I - (\tau/2) D^h}, \\ r^{s+1} = r^s + \frac{1}{2} (u_N^{s+1} - u_N^s, \sigma^s). \end{cases} \tag{29}$$

类似地, 若采用 BDF2 格式结合重心 Lagrange 配点法来离散 Allen-Cahn 方程, 构造基于 SAV 方案的另一种二阶离散格式, 记为 BDF2-BLI, 算法格式如下:

$$\begin{cases} \frac{3u_N^{s+1} - 4u_N^s + u_N^{s-1}}{2\tau} = -\omega_N^{s+1}, \\ \omega_N^{s+1} = -D^h u_N^{s+1} + \frac{r^{s+1}}{\sqrt{E_1(\tilde{u}_N^{s+1})}} F'(\tilde{u}_N^{s+1}), \\ \frac{3r^{s+1} - 4r^s + r^{s-1}}{2\tau} = \frac{1}{2\sqrt{E_1(\tilde{u}_N^{s+1})}} \left(F'(\tilde{u}_N^{s+1}), \frac{3u_N^{s+1} - 4u_N^s + u_N^{s-1}}{2\tau} \right), \end{cases} \quad (30)$$

其中, $\tilde{u}_N^{s+1} = 2u_N^s - u_N^{s-1}$. BDF2-BLI 格式的推导、求解过程类似于 CN2-BLI 格式. 此外, BDF2-BLI 格式与 CN2-BLI 格式时间半离散格式的无条件能量稳定证明过程类似^[21], 本文不再赘述.

2.2 重心插值公式误差估计

基于插值逼近误差结论, 分析重心 Lagrange 配点格式求解 Allen-Cahn 方程的相容性误差.

针对函数 $u(x, y)$, 对应的重心 Lagrange 插值函数为 $u^h(x, y)$, 误差是 $\eta(x, y) = u(x, y) - u^h(x, y)$. 引用文献[20]定理内容, 即有如下引理.

引理 1 如果 $u(x, y) \in C^{(n+1)}(\Omega)$, $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 是具有 Lipschitz 连续边界的非空区域, 则如下的误差估计结论成立:

$$\begin{cases} \max | \eta(x, y) | \leq \| u^{(n+1)} \|_{\infty} \left\{ c_x \left(\frac{eL_x}{2M} \right)^M + c_y \left(\frac{eL_y}{2N} \right)^N \right\}, \\ \max \left| \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} \right| \leq \| u^{(n+1)} \|_{\infty} \left\{ \hat{c}_x \left(\frac{eL_x}{2(M-2)} \right)^{M-2} + c_y \left(\frac{eL_y}{2N} \right)^N \right\}, \\ \max \left| \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} \right| \leq \| u^{(n+1)} \|_{\infty} \left\{ c_x \left(\frac{eL_x}{2M} \right)^M + \hat{c}_y \left(\frac{eL_y}{2(N-2)} \right)^{N-2} \right\}, \end{cases} \quad (31)$$

式中, e 是自然对数; $M+1, N+1$ 是空间 x, y 方向的节点数; $L_x = \frac{b-a}{2}, L_y = \frac{d-c}{2}$; $c_x, \hat{c}_x, \hat{c}_y$ 是任意正常数.

由引理 1 结论, 设函数 $u(x, y, t)$ 的重心 Lagrange 插值逼近函数为 $u^h(x, y, t)$, 则以下结论成立:

$$\max | u(x, y, t) - u^h(x, y, t) | \leq C \| u^{(n+1)} \|_{\infty} \left\{ \hat{c}_x \left(\frac{eL_x}{2(M-2)} \right)^{M-2} + \hat{c}_y \left(\frac{eL_y}{2(N-2)} \right)^{N-2} \right\}. \quad (32)$$

根据重心插值逼近的误差结果可知, 该配点格式是在空间上具有指数收敛的特性, 并且微分算子的阶数决定了算法求解方程的空间收敛阶.

3 数值实验

在本节中, 选取 Dirichlet 边界条件, 给出 4 个数值算例来验证配点格式的有效性与高精度. 针对二维 Allen-Cahn 方程, 分别验证两种 SAV 配点格式均具有高精度, 且满足无条件能量稳定特性; 此外, 分别采用重心插值配点法和五点差分法对空间方向离散, 将数值结果对比分析.

3.1 算例 1

为验证 CN2-BLI、BDF2-BLI 格式的时间收敛阶, 且满足能量递减规律, 选取真解如下:

$$u = \cos(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (33)$$

令 $\Omega = [-1, 1]^2 \times (0, T]$, $\varepsilon = 0.2, M = N = 20, T = 1$, 则两种数值格式求解 Allen-Cahn 方程的误差、收敛阶结果见表 1. 由表 1 可知: CN2-BLI、BDF2-BLI 两种数值格式的时间收敛阶均为二阶; 在选取相同的剖分节点时, CN2-BLI 格式求解得到的 L^2 误差小于 BDF2-BLI 格式的 L^2 误差, 表明前者的数值求解效果略优于后者.

基于 SAV 策略, 分别选择不同的空间离散技术求解 Allen-Cahn 方程, 即重心 Lagrange 插值配点法、五点差分法来离散, 得到的 L^2 误差结果见表 2. 由表 2 可知: CN2-BLI、BDF2-BLI 格式在空间上采用重心 Lagrange 插值配点法离散, 当选取节点 $M = N = 15$ 时, L^2 误差均可达到 10^{-8} 量级; CN2-FD 格式空间离散方式是五点差分法, 在 $M = N = 120$ 时, 误差仅达到 10^{-4} 量级. 通过对比误差结果可知, 前两种格式在选取少量节点时即可达

到高精度,即重心 Lagrange 插值配点法具有高精度的优势。

表 1 采用 CN2-BLI、BDF2-BLI 格式求解 u 的 L^2 误差

Table 1 The L^2 errors of u solved by CN2-BLI and BDF2-BLI schemes

τ	CN2-BLI	order	BDF2-BLI	order
1.6×10^{-3}	9.55×10^{-6}	-	1.59×10^{-5}	-
8×10^{-4}	2.38×10^{-6}	2.00	3.97×10^{-6}	2.00
4×10^{-4}	5.96×10^{-7}	2.00	9.91×10^{-7}	2.00
2×10^{-4}	1.49×10^{-7}	2.00	2.48×10^{-7}	2.00
1×10^{-4}	3.84×10^{-8}	1.96	6.34×10^{-8}	1.97

表 2 不同空间离散方案的精度对比结果

Table 2 The accuracy comparison of different discretization schemes in space

(M, N)	CN2-BLI	(M, N)	BDF2-BLI	(M, N)	CN2-FD
(8, 8)	3.25×10^{-4}	(8, 8)	3.25×10^{-4}	(40, 40)	2.54×10^{-3}
(9, 9)	4.43×10^{-5}	(9, 9)	4.43×10^{-5}	(60, 60)	1.13×10^{-3}
(10, 10)	6.57×10^{-6}	(10, 10)	6.57×10^{-6}	(80, 80)	6.34×10^{-4}
(12, 12)	1.18×10^{-7}	(12, 12)	1.09×10^{-7}	(100, 100)	4.06×10^{-4}
(15, 15)	2.98×10^{-8}	(15, 15)	4.68×10^{-8}	(120, 120)	2.82×10^{-4}

对于上述剖分,验证不同数值格式求解 Allen-Cahn 方程时满足能量递减规律。

根据图 1 所示,令 $\tau = 0.001, 0.000 1$, 两种 SAV 配点格式的能量耗散曲线均呈现下降趋势,表明应用 SAV 策略的重心 Lagrange 配点格式满足能量递减的性质。

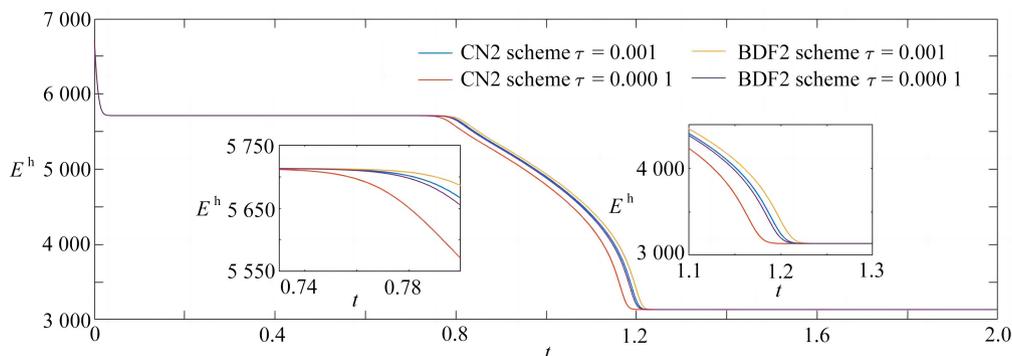


图 1 不同数值格式的能量演化图 ($\varepsilon = 0.1$)

Fig. 1 Time evolution curves of the free energy of different schemes ($\varepsilon = 0.1$)

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

令参数 $\varepsilon = 0.3, \tau = 0.001, T = 1$, 选取不同的空间剖分节点数 ($M = N$), 则 AC 方程的空间收敛阶结果如图 2 所示。图 2 表明当空间采用重心 Lagrange 插值配点法离散时, CN2-BLI、BDF2-BLI 格式在空间方向上均具有指数收敛的特性。

3.2 算例 2

对于问题(1), 令 $\Omega = [-1, 1]^2 \times (0, 1]$, 给定初值如下:

$$u_0(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{34}$$

选取空间节点数 $M = N = 40$, 设定参数 $\varepsilon = 0.06, \Delta t = 0.002$, 则数值解随时间的演化如图 3 所示。图 3 是在给定初值的条件下, 数值解在 $t = 0 \text{ s}, 0.2 \text{ s}, 0.7 \text{ s}, 1 \text{ s}$ 的演化情况。随着时间的累积, 数值解随之出现变化层, 然后达到亚稳态, 最后达到稳态。

3.3 算例 3

针对 Allen-Cahn 方程, 考虑选取随机初值如下:

$$u_0(x, y) = 0.95\text{rand}(x, y) + 0.05. \tag{35}$$

令区域为 $\Omega = [-1, 1]^2 \times (0, 1]$, 选取参数 $\varepsilon = 0.05, \tau = 0.0001, M = N = 40$, 则 u 在不同时刻的数值解如图4所示. 图4展示了在初值随机分布的情形下, SAV配点格式求解Allen-Cahn方程在 $t = 0\text{ s}, 0.03\text{ s}, 0.08\text{ s}, 0.5\text{ s}, 1\text{ s}$ 时的数值解快照, 随着时间变化, 相函数从分离状态逐渐达到聚合状态.

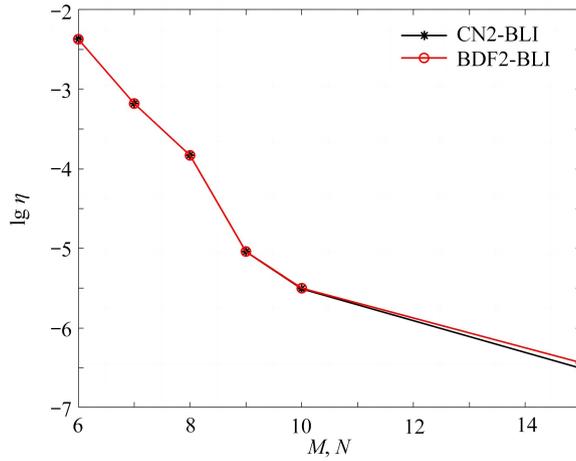


图2 不同数值格式的空间收敛阶

Fig. 2 The convergence rates in space of different numerical schemes

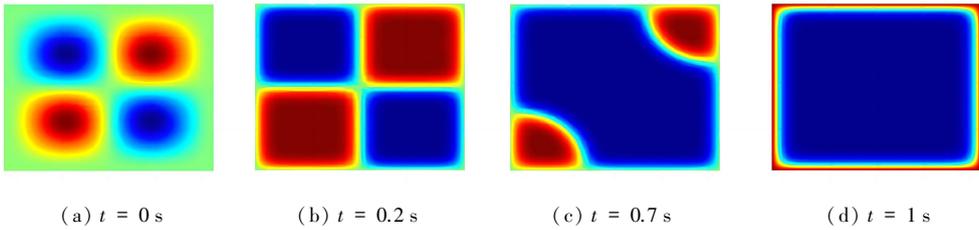


图3 在不同时刻的数值快照 ($\varepsilon = 0.06$)

Fig. 3 Snapshots of the numerical approximation at different moments ($\varepsilon = 0.06$)

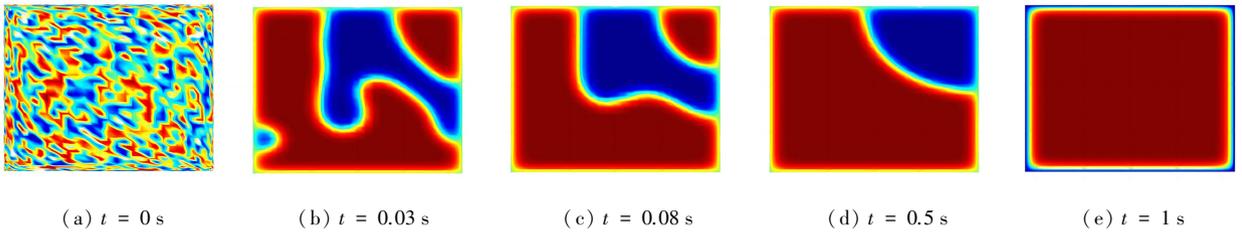


图4 相变 u 在不同时刻的快照图(算例3)

Fig. 4 Snapshots of the phase field u at different moments for example 3

3.4 算例4

在本算例中, 研究数值解的粗化现象. 给定参数 $\varepsilon = 0.05, \tau = 0.002, T = 0.2$, 初值如下:

$$u_0(x, y) = h_1(x, y)h_2(x, y), \tag{36}$$

式中

$$h_1(x, y) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}((x - 0.5)^2 + (y - 0.4)^2 - 0.25^2)\right), & x > 0.3, \\ \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}((y - 0.4)^2 - 0.15^2)\right), & -0.3 \leq x \leq 0.3, \\ \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}((x + 0.5)^2 + (y - 0.4)^2 - 0.25^2)\right), & x < -0.3, \end{cases} \tag{37}$$

$$h_2(x, y) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}(x^2 + (y - 0.6)^2 - 0.25^2)\right), & y > 0.4, \\ \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}(x^2 - 0.15^2)\right), & -0.4 \leq y \leq 0.4, \\ \tanh\left(\frac{3}{\varepsilon}(x^2 + (y + 0.6)^2 - 0.25^2)\right), & y < -0.4. \end{cases} \quad (38)$$

令 $\Omega = [-1, 1]^2 \times (0, T]$, 空间剖分为 $M = N = 60$, 则数值解在不同时刻的快照如图 5 所示. 图 5 展示了相场函数 u 的数值解随着时间变化而逐渐融合的过程: 初始时刻呈现“哑铃状”图像; 在 $t = 0.1$ s 演变成椭圆状; 其后在 $t = 0.15$ s 融合成小型圆点; 最后呈现完全融合状态.

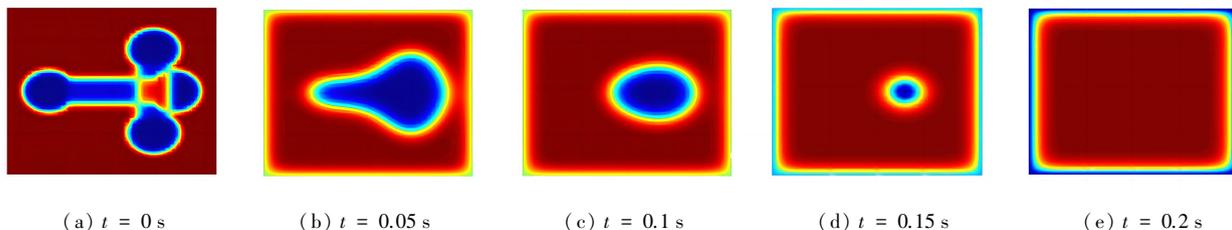


图 5 u 的数值解在不同时刻的快照(算例 4)

Fig. 5 Snapshots of the numerical approximation of u at different moments for example 4

4 结束语

本文主要构建了基于 SAV 方案的二维 Allen-Cahn 方程全离散格式. 在时间方向上采用的离散方法是 CN2 格式、BDF2 格式, 空间上采用重心 Lagrange 插值配点法离散, 应用 SAV 策略, 得到线性无条件能量稳定的数值格式. 数值实验结果显示: 两种 SAV 配点格式均具有高精度的特性, 在选取第二类 Chebyshev 点时具有指数收敛的特性. 与经典有限差分格式的误差结果比较可知, 重心 Lagrange 配点格式采用非常少的节点数即可达到更高精度.

参考文献(References):

- [1] ALLEN S, CAHN J. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening[J]. *Acta Metallurgica*, 1979, **27**(6): 1085-1095.
- [2] BENNES M, CHALUPECKY V, MIKULA K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2004, **51**(2-3): 187-205.
- [3] KOBAYASHI R. Physical modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth[J]. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 1993, **63**(3/4): 410-423.
- [4] FENG X B, PROHL A. Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows[J]. *Numerische Mathematik*, 2003, **94**(1): 33-65.
- [5] DU Q, YANG J. Asymptotically compatible Fourier spectral approximations of nonlocal Allen-Cahn equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2016, **54**(3): 1899-1919.
- [6] ZHAI S, FENG X, HE Y. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by the high-order compact ADI method[J]. *Computer Physics Communications*, 2014, **185**(10): 2449-2455.
- [7] WENG Z, TANG L. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *Numerical Heat Transfer (Part B): Fundamentals*, 2016, **70**(5): 472-483.
- [8] LI C, HUANG Y, YI N. An unconditionally energy stable second order finite element method for solving the Allen-Cahn equation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, **353**: 38-48.
- [9] LIAO H, TANG T, ZHOU T. On energy stable, maximum-principle preserving, second order BDF scheme with variable steps for the Allen-Cahn equation[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2020, **58**(4): 2294-2314.
- [10] LI H, SONG Z, HU J. Numerical analysis of a second-order IPDGFE method for the Allen-Cahn equation and

- the curvature-driven geometric flow[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2021, **86**: 49-62.
- [11] LI J, JU L, CAI Y, et al. Unconditionally maximum bound principle preserving linear schemes for the conservative Allen-Cahn equation with nonlocal constraint[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, **87**(3): 1-32.
- [12] 汪精英, 翟术英. 分数阶 Cahn-Hilliard 方程的高效数值算法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(8): 832-840. (WANG Jingying, ZHAI Shuying. Efficient numerical algorithm for the fractional Cahn-Hilliard equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 832-840. (in Chinese))
- [13] 曾维鸿, 傅卓佳, 汤卓超. 水槽动力特性数值模拟的新型局部无网格配点法[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(4): 392-400. (ZENG Weihong, FU Zhuojia, TANG Zhuochao. A novel localized meshless collocation method for numerical simulation of flume dynamic characteristics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 392-400. (in Chinese))
- [14] 吴迪, 李小林. 时间分数阶扩散波方程的无单元 Galerkin 法分析[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 215-223. (WU Di, LI Xiaolin. An element-free Galerkin method for time-fractional diffusion-wave equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 215-223. (in Chinese))
- [15] 王兆清, 徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. 计算物理, 2018, **35**(1): 77-86. (WANG Zhaoqing, XU Zikang. Displacement pressure mixed collocation method based on plane problem[J]. *Computational physics*, 2018, **35**(1): 77-86. (in Chinese))
- [16] HU Y, PENG A, CHEN L, et al. Analysis of the barycentric interpolation collocation scheme for the Burgers equation[J]. *Science Asia*, 2021, **47**(6): 758.
- [17] DAREHMIRAKI M, REZAZADEH A, AHMADIAN A, et al. An interpolation method for the optimal control problem governed by the elliptic convection-diffusion equation[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2022, **38**(2): 137-159.
- [18] DENG Y, WENG Z. Barycentric interpolation collocation method based on Crank-Nicolson scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *AIMS Mathematics*, 2021, **6**(4): 3857-3873.
- [19] LIU H, HUANG J, ZHANG W, et al. Meshfree approach for solving multi-dimensional systems of Fredholm integral equations via barycentric Lagrange interpolation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, **346**: 295-304.
- [20] YI S, YAO L. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher-order time fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2019, **35**(5): 1694-1716.
- [21] SHEN J, XU J, YANG J. The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **353**: 407-416.
- [22] HUANG F, SHEN J, YANG Z. A highly efficient and accurate new scalar auxiliary variable approach for gradient flows[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2020, **42**(4): A2514-A2536.
- [23] CHENG Q, LIU C, SHEN J. Generalized SAV approaches for gradient systems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, **394**: 113532.
- [24] LI X, SHEN J. Stability and error estimates of the SAV Fourier-spectral method for the phase field crystal equation[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2020, **46**(3): 48.
- [25] SHEN J, XU J. Convergence and error analysis for the scalar auxiliary variable (SAV) schemes to gradient flows[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2018, **56**(5): 2895-2912.
- [26] KLEIN G, BERRUT J. Linear rational finite differences from derivatives of barycentric rational interpolants [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **50**(2): 643-656.