

### 移动荷载作用下具有不确定参数桥梁动力响应分析

刘凡, 李利祥, 赵岩

#### Dynamic Responses Analysis of Bridges With Uncertain Parameters Under Moving Loads

LIU Fan, LI Lixiang, and ZHAO Yan

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430148>

#### 您可能感兴趣的其他文章

##### Articles you may be interested in

#### 基于嵌入式多项式混沌展开法的随机边界下流动与传热问题不确定性量化

Uncertainty Quantification of Flow and Heat Transfer Problems With Stochastic Boundary Conditions Based on the Intrusive Polynomial Chaos Expansion Method

应用数学和力学. 2021, 42(5): 481-491 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410217>

#### 移动荷载作用下轴向运动载流梁的参强联合共振

Combined Parametric and Forced Resonance of Axially Moving and Current-Carrying Beams Under Moving Loads

应用数学和力学. 2018, 39(3): 266-277 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380128>

#### 移动荷载作用下黏弹性地基Timoshenko梁振动响应对比分析

Comparative Analysis of Dynamic Responses of Timoshenko Beams on Visco-Elastic Foundations Under Moving Loads

应用数学和力学. 2020, 41(7): 735-746 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400235>

#### 结构系统识别不确定性分析的Bayes方法及其进展

Uncertainty Quantification for System Identification Utilizing the Bayesian Theory and Its Recent Advances

应用数学和力学. 2017, 38(1): 44-59 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370571>

#### 考虑替代模型不确定性的结构动力特性全局敏感性分析

Global Sensitivity Analysis of Structural Dynamic Characteristics Considering Metamodel Uncertainty

应用数学和力学. 2018, 39(1): 1-10 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380018>

#### 基于Bayes FFT的螺栓连接结构模型更新方法

Model Updating for Bolted Structures Based on the Bayesian FFT Method

应用数学和力学. 2020, 41(8): 866-876 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400373>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 移动荷载作用下具有不确定参数桥梁动力响应分析\*

刘 凡<sup>1</sup>, 李利祥<sup>1</sup>, 赵 岩<sup>1,2</sup>

(1. 大连理工大学工程力学系, 辽宁 大连 116023;  
2. 大连理工大学宁波研究院, 浙江 宁波 315016)

(我刊编委赵岩来稿)

**摘要:** 针对具有不确定参数桥梁在移动荷载作用下的动力响应分析, 首次建立了移动荷载作用下桥梁响应分析的多项式维数分解法. 将结构的不确定参数视为独立的随机变量, 构造了结构动力响应关于不确定参数的随机函数; 进而采用一组变量数目逐次增加的成员函数实现结构动力响应的维数分解, 并利用 Fourier 多项式展开推导成员函数的近似显式表达. 通过降维积分方法降低概率空间内的积分维度, 高效地实现了展开系数的计算. 在数值算例中, 进行了具有不确定参数桥梁在移动荷载作用下的响应估计, 并与 Monte-Carlo 模拟进行对比, 验证了该文方法的精确性和效率.

**关键词:** 移动荷载; 不确定性量化; 多项式维数分解; 降维积分

**中图分类号:** O321 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430148

## Dynamic Responses Analysis of Bridges With Uncertain Parameters Under Moving Loads

LIU Fan<sup>1</sup>, LI Lixiang<sup>1</sup>, ZHAO Yan<sup>1,2</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China;*  
2. *Ningbo Research Institute of Dalian University of Technology, Ningbo, Zhejiang 315016, P.R.China*)

(Contributed by ZHAO Yan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The dynamic responses of bridges with uncertain parameters under moving loads were analyzed, and a polynomial dimensional decomposition method for the analysis of structural responses induced by moving loads was proposed for the first time. The uncertain parameters were regarded as independent random variables, and the random response function about these uncertain parameters was constructed. The dimensional decomposition of the function was further performed with a group of component functions with a gradually increasing number of variables, and the approximate expressions of the component functions were derived through the Fourier polynomial expansion. Then, the expansion coefficients were efficiently calculated through the introduction of the dimension-reduction integration method. The numerical examples give response estimation of bridges with uncertain parameters under moving loads, which in comparison with those from the Monte-Carlo simulation, verify the accuracy and efficiency of the proposed method.

\* 收稿日期: 2022-04-27; 修订日期: 2022-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(11772084; U1906233); 国家重点研发计划(2017YFC0307203); 山东省重点研发计划(2019JZZY010801)

作者简介: 刘凡(1992—), 男, 博士生(E-mail: [dlut\\_liufan@mail.dlut.edu.cn](mailto:dlut_liufan@mail.dlut.edu.cn));

赵岩(1974—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: [yzhao@dlut.edu.cn](mailto:yzhao@dlut.edu.cn)).

引用格式: 刘凡, 李利祥, 赵岩. 移动荷载作用下具有不确定参数桥梁动力响应分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(3): 241-247.

**Key words:** moving load; uncertainty quantification; polynomial dimensional decomposition; dimension-reduction integration

## 0 引言

随着桥梁的不断建造以及高速铁路运输的不断发展,桥梁在移动荷载作用下的响应估计引起了研究者的广泛关注.准确评估桥梁在移动车辆荷载作用下的响应对保障桥梁安全以及桥上运行车辆的安全性具有重要意义.在以往的桥梁受移动车辆荷载作用动力响应的研究中,桥梁的参数均视为确定值<sup>[1-4]</sup>.实际上,由于不确定性的广泛存在,考虑结构参数具有不确定性的车-桥相互作用也逐渐引起研究者的关注<sup>[5-8]</sup>.由于桥梁参数具有不确定性,导致桥梁在移动车辆荷载作用下的动力响应也具有不确定性,所以需要桥梁动力响应进行估计和不确定性量化分析. Monte-Carlo 模拟 (Monte-Carlo simulation, MCS) 是一种基于样本的不确定性量化方法,在单个样本处需要进行动力学分析,往往会导致高昂的计算成本<sup>[9]</sup>. Karhunen-Loève 展开 (K-L 展开) 是处理随机场或者随机过程的一种常用方法,其可将随机场或随机过程分解为随机部分和与空间或时间有关的确定部分.一些学者将桥梁材料的弹性模量和密度视为随机场,利用 K-L 展开建立随机有限元方法,实现了具有随机参数桥梁在移动荷载作用下的响应评估<sup>[5]</sup>.除 K-L 展开外,混沌多项式展开作为一种谱随机方法,在具有随机参数桥梁受移动车辆荷载作用响应的不确定性量化中也有应用<sup>[8]</sup>.然而,这种展开方法会对原随机问题进行扩阶,导致“维数灾难”.

概率空间内的高维积分是不确定性量化分析所面临的主要困难,积分维度往往随着随机变量数目的增多而增加.大型桥梁有限元分析模型的自由度数更多,导致动力响应分析更加耗时,进一步增大不确定性量化的难度.为实现具有不确定参数桥梁在移动荷载作用下的动力响应分析,需要建立更加高效的不确定性量化方法.近年来,一种新的基于维数分解的降维策略得以形成和发展. Rahman<sup>[10]</sup> 将维数分解和 Fourier 多项式展开相结合,提出了多项式维数分解 (polynomial dimensional decomposition, PDD) 法.这种方法有效降低了随机问题的维数,避免了“维数灾难”. PDD 方法逐渐在随机参数结构的特征值问题<sup>[11]</sup>、频域响应分析<sup>[12-13]</sup> 和灵敏度分析<sup>[14]</sup> 等研究领域得以应用,尚未建立移动荷载作用下具有不确定参数桥梁动力响应不确定性量化的 PDD 方法.本文结合上述 PDD 方法的优势,将其应用于移动荷载作用下具有不确定参数桥梁的响应分析,实现了桥梁动力响应的不确定性量化.利用维数分解和 Fourier 多项式展开,构建出桥梁动力响应的代理模型,得到了桥梁动力响应的统计矩和概率密度.

## 1 移动荷载作用下具有不确定参数桥梁的运动方程

假定桥梁中包含的  $N$  个不确定参数  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$  为服从特定概率分布的独立随机变量,  $\xi$  的联合概率密度函数  $f_{\xi}(\xi) = \prod_{i=1}^{i=N} f_{\xi}(\xi_i)$ ,  $f_{\xi}(\xi_i)$  为随机变量  $\xi_i$  的概率密度函数.由于桥梁参数存在不确定性,因此桥梁在移动荷载作用下的响应也具有不确定性,且可以将响应视为关于不确定参数  $\xi$  的函数.随机桥梁结构在移动荷载作用下的运动方程可以表示为

$$\mathbf{M}(\xi) \ddot{\mathbf{X}}(t, \xi) + \mathbf{C}(\xi) \dot{\mathbf{X}}(t, \xi) + \mathbf{K}(\xi) \mathbf{X}(t, \xi) = \mathbf{B}_F(t) \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{M}(\xi)$ ,  $\mathbf{C}(\xi)$  和  $\mathbf{K}(\xi)$  分别为桥梁的随机质量、阻尼和刚度矩阵;  $\ddot{\mathbf{X}}(t, \xi)$ ,  $\dot{\mathbf{X}}(t, \xi)$  和  $\mathbf{X}(t, \xi)$  分别为桥梁的随机加速度、速度和位移向量;  $\mathbf{F}(t)$  为作用在桥梁上的荷载向量;  $\mathbf{B}_F(t)$  表示载荷作用位置矩阵<sup>[7]</sup>.

不失一般性,采用  $\mathbf{L}(t, \xi)$  表示桥梁广义的随机响应向量,其可以为位移、速度、加速度和应力等响应.在假定桥梁不确定参数为服从特定概率分布的独立随机变量后,桥梁响应的均值和方差可由概率空间内的积分得到.在计算得到桥梁响应的方差后,也能快速得到响应的标准差 (standard deviation, SD).通常,结构随机响应  $\mathbf{L}(t, \xi)$  的表达式难以获取,无法通过解析积分得到桥梁响应的统计矩和概率密度.在下一节中建立的 PDD 法,有效降低了概率空间内的积分维度,避免了积分节点因不确定参数的增多而呈指数增加,极大地提高了计算效率,使得具有不确定参数复杂桥梁结构的动力响应分析成为可能.

## 2 不确定动力响应分析的 PDD 法

### 2.1 响应的维数分解和成员函数正交多项式展开

桥梁在移动荷载作用下的随机响应  $L(t, \xi)$ , 在任意时间  $t$  处均是关于结构不确定参数的函数, 将其表达为关于不确定参数的广义函数  $L(t, \xi) = G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ . 在对桥梁进行动力响应分析时, 通常只关心桥梁在部分关键位置处的动力响应. 令  $L_0(t, \xi) = \{L_1(t, \xi), L_2(t, \xi), \dots, L_{n_0}(t, \xi)\}^T$  为  $n_0$  个所关心的桥梁动力响应, 将其中的第  $k(k = 1, 2, \dots, n_0)$  个随机响应表示为广义的函数  $L_k(t, \xi) = g_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ . 对  $L_k(t, \xi)$  进行维数分解, 并取  $P$  元近似, 可表示为

$$\tilde{L}_{k,P}(t, \xi) = g_{k,0}(t) + \sum_{d=1}^P \sum_{i_1=1}^{N-d+1} \dots \sum_{i_d=i_{d-1}+1}^N g_{k,i_1 \dots i_d}(t, \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_d}), \quad (2)$$

$\tilde{L}_{k,P}(t, \xi)$  可视为对随机多元函数  $L_k(t, \xi)$  在每个时间  $t$  处, 采用一组变量维数逐次增加的成员函数进行分层近似. 其中,  $g_{k,0}(t)$  为  $L_k(t, \xi)$  的均值;  $g_{k,i_1 \dots i_d}(t, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_d})$  称为成员函数, 表示  $d(d = 1, 2, \dots, P)$  个随机变量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$  输入时对  $L_k(t, \xi)$  的影响. 式 (2) 所示的维数分解将原  $N$  维函数用最高  $P$  维函数来近似, 这种近似可以捕获原随机函数  $L_k(t, \xi)$  中不超过  $P$  个变量之间的概率关系.

利用正交多项式基底, 对式 (2) 中的成员函数进行 Fourier 展开, 并取前  $m$  阶截断, 可以得到

$$g_{k,i_1 \dots i_d}(t, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_d}) \cong \sum_{j_d=1}^m \dots \sum_{j_1=1}^m C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t) \prod_{q=1}^d \psi_{j_q}(\xi_{i_q}), \quad (3)$$

式中,  $\psi_j(\xi_i)$  为第  $i$  个随机变量  $\xi_i$  的第  $j$  阶正交多项式基底. 根据随机变量的类型可以选择不同的正交多项式基底, 其更详细的定义可参见文献 [10]. 展开系数  $C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t)$  可按式 (4) 计算:

$$C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t) = \int L_k(t, \xi) \prod_{q=1}^d \psi_{j_q}(\xi_{i_q}) f_{\xi}(\xi) d\xi. \quad (4)$$

对所有的展开系数进行平方并求和便可得到时刻  $t$  处的响应方差.

利用式 (3), 可将式 (2) 中的  $\tilde{L}_{k,P}(t, \xi)$  进一步表示为

$$\tilde{L}_{k,P}(t, \xi) = g_{k,0}(t) + \sum_{d=1}^P \sum_{i_1=1}^{N-d+1} \dots \sum_{i_d=i_{d-1}+1}^N \sum_{j_d=1}^m \dots \sum_{j_1=1}^m C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t) \prod_{q=1}^d \psi_{j_q}(\xi_{i_q}). \quad (5)$$

尽管可以对表征结构响应的随机函数  $L_k(t, \xi)$  直接进行展开, 但 PDD 方法在展开之前先对其进行如式 (2) 所示的维数分解, 显著降低了待展开函数的维度, 并能够得到原随机函数具有良好近似精度的分层近似. 代理模型有多种构造方法, 本文对成员函数采用正交多项式基底进行展开, 其一个主要优势在于, 可以根据随机变量类型选择对应的基底, 能够获得非常好的收敛效率.

多项式基底可由随机变量的类型确定, 在计算得到展开系数后,  $\tilde{L}_{k,P}(t, \xi)$  将成为显式表达, 且是对原随机函数  $L_k(t, \xi)$  的近似, 可视为结构具有概率特征的动力响应代理模型. 根据随机变量的概率分布, 生成样本后可由式 (5) 得到桥梁响应的近似样本值, 从而得到响应的近似概率分布. 在前述的推导中, 仅构造了形如  $L_k(t, \xi)$  的广义函数, 对其具体的函数表达式没有要求, 由于时间变量  $t$  包含于展开系数, 而非多项式基底, 所以对于其他具有时变特征的随机动力问题分析, PDD 方法也能够展现出良好的适用性.

### 2.2 成员函数展开系数的计算

在计算  $g_{k,0}(t)$  和  $C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t)$  时, 仍需要在概率空间内进行  $N$  维积分, 计算成本仍然高昂. 为了减少概率空间内的积分维数和实现无显式表达式函数的积分, 将采用降维积分方法<sup>[15]</sup> 和 Gauss 数值积分方法.

令  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$  为随机变量  $\xi$  的均值向量, 将  $L_k(t, \xi)$  中的  $N - (R - q)(q = 0, 1, \dots, R, P \leq R \leq N)$  个随机变量用  $\mathbf{c}$  中相对应的均值代替, 得到  $L_k(t, \xi)$  的  $R - q$  维成员函数  $l_k(t, \xi_{R-q})$ . 采用组合数的形式定义函数  $L_k(t, \xi)$  的  $R$  元近似:

$$\hat{L}_{k,R}(t, \xi) = \sum_{q=0}^R (-1)^q \binom{N-R+q-1}{q} \sum_{q_1, \dots, q_{R-q}=1; q_1 < \dots < q_{R-q}}^N l_k(t, \xi_{R-q}). \quad (6)$$

将 $L_k(t, \xi)$ 用 $\hat{L}_{k,R}(t, \xi)$ 代替, 可得到 $g_{k,0}(t)$ 和 $C_{k,i_1 \dots i_p j_1 \dots j_d}(t)$ 的近似计算公式.

降维积分方法将原来具有 $N$ 个积分变量的被积函数, 近似表达为最多包含 $R$ 个积分变量的被积函数, 将 $N$ 维积分运算, 转换为最高 $R$ 维积分运算. 在降维积分方法的基础上, 采用 Gauss 积分方法进行数值积分. 为了得到函数在积分节点处的值, 用 $R-q$ 个待积分变量在积分节点 $\theta_{n_i}(i=1, 2, \dots, R-q)$ 处的值替换 $\mathbf{c}$ 中对应的元素, 得到向量 $\mathbf{c}_{R-q} = \{c_1, c_2, \dots, c_{q_1-1}, \theta_{n_1}, c_{q_1+1}, \dots, c_{q_{R-q}-1}, \theta_{n_{R-q}}, c_{q_{R-q}+1}, \dots, c_N\}$ . 特别地, 当 $R-q=0$ 时,  $\mathbf{c}_{R-q} = \mathbf{c}$ .  $\mathbf{c}_{R-q}$ 的每一个元素均是确定值, 根据 $\mathbf{c}_{R-q}$ 建立确定参数结构模型, 可以得到结构的刚度矩阵 $\mathbf{K}(\mathbf{c}_{R-q})$ 、质量矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{c}_{R-q})$ 和阻尼矩阵 $\mathbf{C}(\mathbf{c}_{R-q})$ , 用这3个矩阵替换式(1)中的 $\mathbf{K}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}(\xi)$ 和 $\mathbf{C}(\xi)$ , 可以得到

$$\mathbf{M}(\mathbf{c}_{R-q})\ddot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{c}_{R-q}) + \mathbf{C}(\mathbf{c}_{R-q})\dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{c}_{R-q}) + \mathbf{K}(\mathbf{c}_{R-q})\mathbf{X}(t, \mathbf{c}_{R-q}) = \mathbf{B}_F(t)\mathbf{F}(t). \quad (7)$$

此时, 方程(7)可以采用时域内的逐步积分方法进行求解. 当结构自由度数目较多时, 可以利用模态叠加法进一步提高分析效率. 在求解式(7)后, 提取所关心的桥梁动力响应, 便得到函数在积分节点处的值 $l_k(t, \mathbf{c}_{R-q})$ . 根据 Gauss 积分方法,  $g_{k,0}(t)$ 和 $C_{k,i_1 \dots i_p j_1 \dots j_d}(t)$ 可以按以下两式计算得到

$$g_{k,0}(t) \approx \sum_{q=0}^R (-1)^q \binom{N-R+q-1}{q} \times \sum_{q_1, \dots, q_{R-q}=1; q_1 < \dots < q_{R-q}}^N \sum_{n_{R-q}=1}^p \dots \sum_{n_1=1}^p w_{n_{R-q}} \dots w_{n_1} l_k(t, \mathbf{c}_{R-q}), \quad (8)$$

$$C_{k,i_1 \dots i_d j_1 \dots j_d}(t) \approx \sum_{q=0}^R (-1)^q \binom{N-R+q-1}{q} \times \sum_{q_1, \dots, q_{R-q}=1; q_1 < \dots < q_{R-q}}^N \sum_{n_{R-q}=1}^p \dots \sum_{n_1=1}^p w_{n_{R-q}} \dots w_{n_1} l_k(t, \mathbf{c}_{R-q}) \prod_{m=1}^{R-q} \psi_{j_m}(\theta_{n_m}), \quad (9)$$

式中,  $w_{n_i}(i=1, 2, \dots, R-q)$ 为积分权重系数,  $p$ 为单个变量的积分节点数目.

采用 Gauss 数值积分后, 只需要得到积分节点处的函数值, 便能够实现对没有显式表达式的函数的积分. 对于大型复杂结构, 可以采用有限元软件进行动力响应分析得到 $l_k(t, \mathbf{c}_{R-q})$ , 从而实现复杂桥梁结构在移动荷载作用下的响应分析.

### 3 数值算例

#### 3.1 简支梁桥

图1为受移动集中力作用的简支梁桥, 集中力 $F_1 = F_2 = 20$  kN, 载荷间距 $l = 4$  m, 移动速度 $v = 27.78$  m/s. 桥梁长度 $L = 40$  m, 截面面积 $A = 4.8$  m<sup>2</sup>, 截面惯性矩 $I = 2.5498$  m<sup>4</sup>. 结构均匀划分为10个单元, 各单元材料的弹性模量和密度均视为服从对数正态分布的独立随机变量. 在不确定性量化分析中, 可以将结构不确定参数视为随机场以考虑变量的相关性, 而后采用 K-L 展开将随机场分解为独立随机变量与确定性函数. 本文假定结构参数为独立随机变量, 没有考虑随机变量的相关性<sup>[10-11]</sup>. 对于随机变量具有相关性的不确定性量化分析中的应用, PDD 法还需要进一步开展工作. 弹性模量均值 $E_0 = 5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, 变异系数 $C_{\text{cov}, E} = 0.1$ ; 密度均值 $\rho_0 = 2.5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 变异系数 $C_{\text{cov}, \rho} = 0.1$ . 结构采用 Rayleigh 阻尼, 相应的系数分别取 $\alpha = 0.6434$ ,  $\beta = 3.9786 \times 10^{-4}$ .

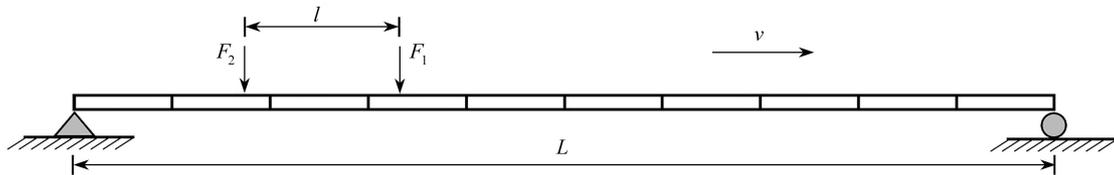


图1 受移动集中荷载作用的简支梁桥  
Fig. 1 A simply supported beam bridge subjected to moving loads

MCS 是不确定性量化的经典方法, 其可以得到可靠的结果. 为了验证本文方法, 分别采用 MCS 和 PDD 法对桥梁跨中位移响应进行分析. 分析时间自 $F_1$ 移动到桥梁左端节点时起至 $F_2$ 移动到桥梁右端节点时止, 时间步长取0.005 s. 在 MCS 中, 样本数量分别取 $10^3$ 和 $10^5$ ,  $10^5$ 个样本的模拟结果将作为参考解. 在 PDD 法中分别取 $R=P=1$ 和 $R=P=2$ 进行计算, 多项式基底数目 $m$ 取3, 积分节点数目 $p$ 取3.

图 2 和图 3 分别给出了 PDD 法和 MCS 计算得到的桥梁跨中位移均值和标准差曲线. 从图中曲线可知, 当  $R=P=1$  时 PDD 法便能够得到与参考解非常吻合的均值. 在图 3 的标准差曲线中, 当  $R=P=1$  时, PDD 法计算得到的标准差与参考解吻合较好; 在增大  $R$  和  $P$  的值之后, PDD 法计算得到的标准差与参考解的计算结果吻合得更好一些. 图 4 中给出了在  $t = 0.8$  s 时, 由 PDD 法和 MCS 计算得到的桥梁跨中位移的概率密度曲线. 从图中曲线可知, PDD 法计算得到的概率密度曲线与参考解的计算结果吻合良好. 而 1 000 个样本 MCS 得到的概率密度与参考解偏差较大.

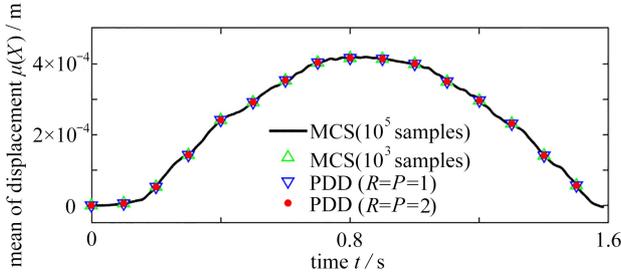


图 2 桥梁跨中位移均值

Fig. 2 The mean of displacement

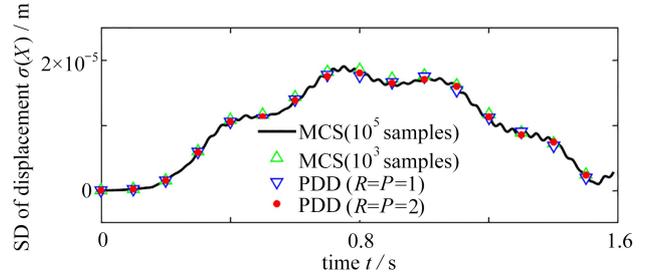


图 3 桥梁跨中位移标准差

Fig. 3 The SD of displacement

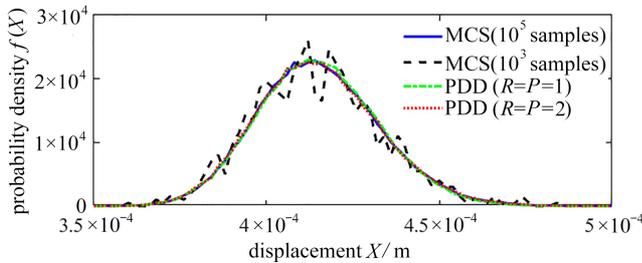


图 4 t = 0.8 s 时跨中位移的概率密度

Fig. 4 The probability density of displacement at t = 0.8 s

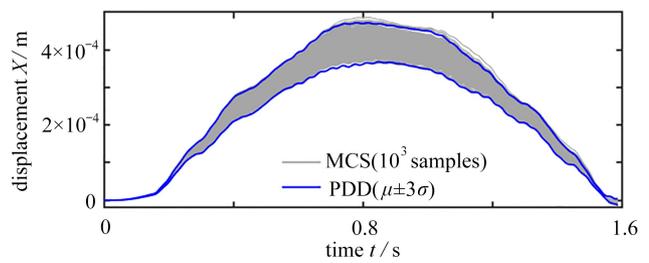


图 5 位移样本曲线

Fig. 5 Sample curves of displacement

在该算例中结构共包含 20 个随机变量, PDD 法所需的移动荷载作用下的动力响应分析次数为 41 次 ( $R=P=1$ ) 和 801 次 ( $R=P=2$ ). 根据前面计算结果的对比可知, PDD 法比相同动力响应分析次数的 MCS 计算精度更高, 表明本文方法具有足够的精确性. 与参考解相比, PDD 法计算结果与参考解吻合良好, 但所需的动力响应分析次数远少于 MCS. 由此可见, PDD 方法具有非常高的计算效率, 从而使得对复杂桥梁结构在移动荷载作用下的响应分析成为可能. 图 5 中给出了 1000 条跨中位移样本曲线和 PDD 法计算得到的  $\mu \pm 3\sigma$  曲线. 从图中可以看出, PDD 法得到的曲线能够很好地将位移样本曲线包络. 在移动集中荷载刚上桥和临近下桥阶段时, 桥梁跨中位移离散性较小. 而当移动集中荷载在桥梁跨中附近时, 跨中位移响应离散性更大.

### 3.2 大跨度斜拉桥

某大跨度斜拉桥, 其主要尺寸如图 6 所示. 桥梁受 4 个大小均为 135 kN 的移动集中力作用, 荷载间距分别为 2.5 m, 15 m 和 2.5 m, 移动速度为 55.56 m/s. 桥梁有限元模型包含 1171 个节点和 1350 个单元. 桥塔、桥面和桥墩的弹性模量及密度均假定为服从对数正态分布的独立随机变量.

利用 PDD 法 (取  $R=P=2$ , 基底数目  $m = 3$ , 变量积分节点数目  $p = 3$ ) 实现了随机参数变异系数为 0.10, 0.15 和 0.20 三种工况时桥梁跨中位移响应的分析. 采用模态叠加法进行时域内的动力响应分析, 取前 100 阶振型参与计算, 振型阻尼比均取 0.02. 分析时间自第 1 个集中力从左端上桥时起至第 4 个集中力从右端下桥时止, 时间步长取 0.005 s.

图 7 和图 8 给出了材料参数具有不同变异性的时的跨中位移均值和标准差. 由图中的曲线可知, 尽管材料参数取不同的变异系数, 计算得到的跨中位移均值曲线仍基本重合. 表明在该算例中, 位移均值受材料参数变异性的影响较小. 当荷载移动到桥梁的跨中附近时, 位移的均值达到最大. 与位移均值不同的是, 跨中位移标准差随着材料变异性的增大而明显增大. 当荷载移动到桥梁跨中时, 位移标准差达到最大值.

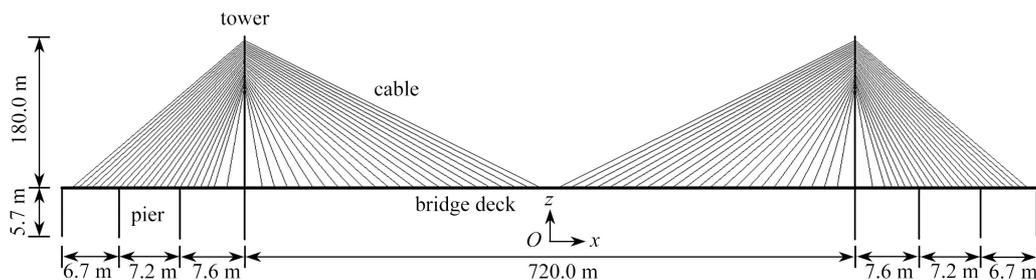


图6 大跨度斜拉桥

Fig. 6 The long-span cable-stayed bridge

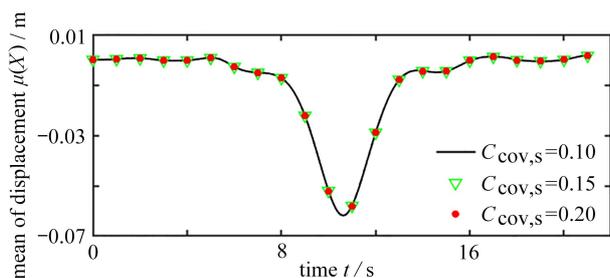


图7 位移均值

Fig. 7 The mena of displacement

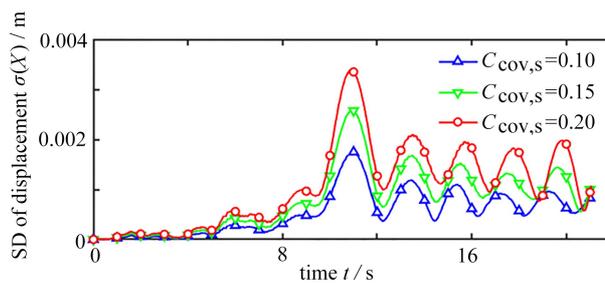


图8 位移标准差

Fig. 8 The SD of displacement

图9给出了 $t = 10.60$  s时桥梁跨中位移的概率密度曲线.随着材料参数变异性的增大,同一时刻的跨中位移概率密度的峰值逐渐减小,概率密度曲线变得扁平.图10给出了桥梁参数变异系数为0.20时跨中位移的概率密度演化曲线.结合图8中的标准差曲线可知,当荷载移动至桥梁主跨度内时,桥梁跨中位移标准差逐渐增大,相应的概率密度值逐渐减小.在 $t = 11$  s附近,跨中位移标准差达到峰值而概率密度值显著减小.

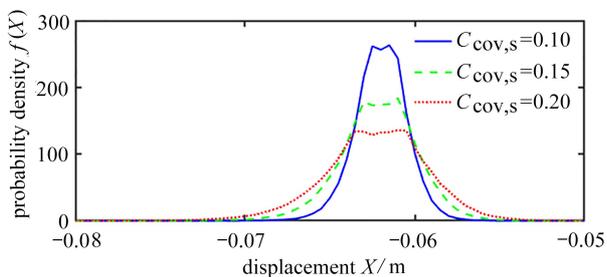
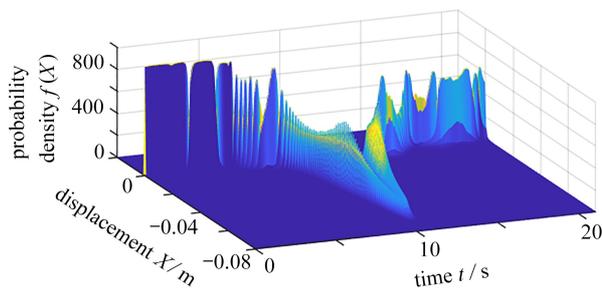
图9  $t = 10.60$  s时的概率密度Fig. 9 The probability density at  $t = 10.60$  s

图10 概率密度演化曲线

Fig. 10 Evolution curves of the probability density

## 4 结 论

本文针对具有不确定参数桥梁在移动车辆荷载作用下的响应分析展开了研究,采用移动集中力来模拟车辆对桥梁的作用力.将桥梁响应视为关于随机参数的函数,然后对其进行维数分解和 Fourier 多项式展开,得到了随机响应函数近似的显式表达式,建立了具有不确定参数桥梁结构响应估计的 PDD 法.数值结果表明本文方法能够得到与 MCS 非常吻合的结果.本文方法既能够给出响应的统计矩,也能给出响应的概率分布,为桥梁响应分析和可靠度估计提供了新的策略.

### 参考文献 (References):

- [1] 高庆飞, 张坤, 刘晨光, 等. 移动车辆荷载作用下桥梁冲击系数的若干讨论[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2020, 52(3): 44-50. (GAO Qingfei, ZHANG Kun, LIU Chengguang, et al. Discussions on the impact of bridges subjected to moving vehicular loads[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2020, 52(3): 44-50. (in Chinese))

- [2] LAI Z P, JING L Z, ZHOU W B. An analytical study on dynamic response of multiple simply supported beam system subjected to moving loads[J]. *Shock and Vibration*, 2018, **2018**: 2149251.
- [3] LIU S H, JIANG L Z, ZHOU W B, et al. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2021. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
- [4] 阳霞, 张静, 任伟新, 等. 车辆荷载作用下桥梁应变极值估计的阈值选取[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 503-512. (YANG Xia, ZHANG Jing, REN Weixin, et al. Threshold selection for the extreme value estimation of bridge strain under vehicle load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 503-512.(in Chinese))
- [5] CHANG T P. Stochastic dynamic finite element analysis of bridge-vehicle system subjected to random material properties and loadings[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2014, **242**: 20-35.
- [6] NI P, XIA Y, LI J, et al. Using polynomial chaos expansion for uncertainty and sensitivity analysis of bridge structures[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, **119**: 293-311.
- [7] WU S Q, LAW S S. Evaluating the response statistics of an uncertain bridge-vehicle system[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, **27**: 576-589.
- [8] WU S Q, LAW S S. A reduced polynomial chaos expansion model for stochastic analysis of a moving load on beam system with non-Gaussian parameters[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2015, **17**(3): 1560-1577.
- [9] 万华平, 邵永敢, 钟剑, 等. 基于多项式混沌展开的结构动力特性高阶统计矩计算[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(12): 1331-1342. (WAN Huaping, TAI Yonggan, ZHONG Jian, et al. Computation of high-order moments of structural dynamic characteristics based on polynomial chaos expansion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(12): 1331-1342.(in Chinese))
- [10] RAHMAN S. A polynomial dimensional decomposition for stochastic computing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **76**(13): 2091-2116.
- [11] RAHMAN S. Probability distributions of natural frequencies of uncertain dynamic systems[J]. *AIAA Journal*, 2009, **47**(6): 1579-1589.
- [12] LU K. Statistical moment analysis of multi-degree of freedom dynamic system based on polynomial dimensional decomposition method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **93**: 2003-2018.
- [13] LIU F, ZHAO Y. A hybrid method for analysing stationary random vibration of structures with uncertain parameters[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, **164**: 108259.
- [14] RAHMAN S. Global sensitivity analysis by polynomial dimensional decomposition[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2011, **96**(7): 825-837.
- [15] XU H, RAHMAN S. A generalized dimension-reduction method for multidimensional integration in stochastic mechanics[J]. *International Journal of Numerical Method in Engineering*, 2004, **61**(12): 1992-2019.