

底部加热肥皂泡上准二维湍流的数值模拟

贺啸秋, 熊永亮, 徐顺, 彭泽瑞, 陈波

Numerical Simulation of the Quasi-2D Turbulence on a Half Soap Bubble Heated at the Bottom

HE Xiaohui, XIONG Yongliang, XU Shun, PENG Zerui, and CHEN Bo

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430143>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自由来流湍流与三维壁面局部粗糙诱导平板边界层不稳定T-S波的数值研究

Numerical Study of Unstable T-S Waves Excited by Interaction Between Free-Stream Turbulence and 3D Localized Wall Roughness in Flat-Plate Boundary Layer

应用数学和力学. 2017, 38(11): 1208-1221 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370376>

二元海水液滴对心碰撞过程数值模拟

Numerical Simulation of Head-on Binary Collision Between Seawater Droplets

应用数学和力学. 2020, 41(3): 268-279 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400196>

气体介质中海水液滴碰撞过程数值模拟

Numerical Simulation of Seawater Droplets Collision in Gaseous Environment

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1236-1245 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390053>

基于三维CFD-DEM的多孔介质流场数值模拟

Numerical Simulation of Flow Fields in Porous Media Based on the 3D CFD-DEM

应用数学和力学. 2017, 38(10): 1093-1102 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370326>

基于浸入边界-有限元法的流固耦合碰撞数值模拟方法

Numerical Simulation of Fluid-Solid Coupling Collision Based on the Finite Element Immersed Boundary Method

应用数学和力学. 2019, 40(8): 880-892 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400053>

带裂纹十次对称二维准晶平面弹性的无摩擦接触问题

A Frictionless Contact Problem of 2D Decagonal Quasicrystal Plane Elasticity With Cracks

应用数学和力学. 2019, 40(2): 223-236 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390127>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

底部加热肥皂泡上准二维湍流的数值模拟*

贺啸秋, 熊永亮, 徐 顺, 彭泽瑞, 陈 波

(华中科技大学 航空航天学院 力学系, 武汉 430074)

(本刊编委熊永亮来稿)

摘要: 底部加热的肥皂泡是一种全新的二维热对流模型, 在实验中已发现肥皂泡上的岛涡运动规律与飓风轨迹规律一致. 然而, 肥皂泡的曲面特征对其准二维流场的数值模拟以及数据分析造成了较多困难. 针对肥皂泡球面几何特征, 该文介绍了其直接数值模拟 (DNS) 方法, 及其流场空间波数谱、湍流通量和结构函数的计算分析方法, 开展了 $Ra = 3 \times 10^7, 3 \times 10^9, 3 \times 10^{11}$ 的数值计算, 并获得了相应的波数谱、通量和湍流结构函数. 计算结果表明, 肥皂泡上速度的小尺度脉动特征满足 $Bo59$ 的理论标度律, 通过湍动能与拟涡能通量特征, 发现在该准二维湍流场中存在湍流能量双级串现象. 且随着 Rayleigh 数的增加, 大尺度结构湍能量减小, 更小尺度湍流结构能量增加.

关键词: 肥皂泡; 湍流; 结构函数; 直接数值模拟

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430143

Numerical Simulation of the Quasi-2D Turbulence on a Half Soap Bubble Heated at the Bottom

HE Xiaoliu, XIONG Yongliang, XU Shun, PENG Zerui, CHEN Bo

(Department of Mechanics School of Aerospace Engineering, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P.R.China)

(Contributed by XIONG Yongliang, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The soap bubble heated at the bottom was introduced as a novel quasi-2D turbulence system. The curved geometry of the bubble brings challenges for the direct numerical simulations (DNS) of the turbulence on the bubble. In order to overcome the difficulties due to the curved geometry, a numerical method based on the stereographic projection was implemented for the DNS of the soap bubble. The numerical methods to compute the spectrum, the flux and the structure functions of the flows on the bubble were described in detail. Three different Rayleigh numbers $Ra = 3 \times 10^7, 3 \times 10^9, 3 \times 10^{11}$ were used in the simulation based on the present numerical methods. Then, the related spectrum, flux and structure functions were calculated. The results indicate that, both the inversed energy cascade and forward enstrophy cascade can be observed in all the calculation cases. The $Bo59$ scaling law fits the small-scale fluctuations on the soap bubble. With the increase of the Rayleigh number, the turbulent energy decreases for the large-scale plumes, and the kinetic energy increases for the higher wave number structures.

Key words: soap bubble; turbulence; structure function; direct numerical simulation

* 收稿日期: 2022-04-22; 修订日期: 2022-06-21

基金项目: 国家自然科学基金(11872187; 12072125)

作者简介: 贺啸秋(1988—), 男, 博士生(E-mail: hexiaoqiu@hust.edu.cn);

熊永亮(1981—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: xylcf@hust.edu.cn).

引用格式: 贺啸秋, 熊永亮, 徐顺, 彭泽瑞, 陈波. 底部加热肥皂泡上准二维湍流的数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(10): 1086-1104.

引 言

湍流运动广泛存在于自然界中,从星系中的星际介质运动,到杯子中被搅拌的咖啡流动,虽然时空尺度差距悬殊但都属于湍流流动^[1].流体的湍流运动对传热传质具有重要的影响^[2].当湍流流场中流体的运动仅具有两个独立的空间自由度时,称之为二维湍流^[3-6].相比三维湍流,二维湍流的结构更易于观察与分析,且在直接数值模拟(DNS)所需要的计算资源显著减小的同时又保留着湍流的许多关键特征^[3].另一方面,二维湍流并不是三维湍流进行简单维度压缩的结果,它也具有与三维湍流完全不同的显著差别^[3].其中最核心的差别是最早由 Kraichnan^[7]、Leith^[8] 和 Batchelor^[9] 发现的反向能量串级,即在充分发展的二维湍流中,在特定尺度范围内存在着能量从尺寸较小的涡向尺寸较大的涡反向传递的现象.在研究海洋或者大气中的大尺度运动时,海洋或大气的侧向尺寸远大于高度方向的尺寸,在研究较大尺度的流动问题时可以忽略掉流体在高度方向的运动而作二维流动处理^[10-11].因而,在地球物理与行星物理学中,二维湍流具有重要的研究价值^[12].

严格意义下的二维湍流在实验室或自然界中并不存在^[3],研究二维湍流主要依赖于 DNS^[3] 或者在实验条件下借助肥皂膜及电磁力抑制形成准二维流动^[13].众所周知,肥皂薄膜的厚度只有数微米,但其侧向尺寸可以达到数十厘米以上,肥皂薄膜被广泛用于准二维湍流实验^[12].Kellay^[13] 在实验中研究了加热肥皂泡中的准二维湍流.实验中一个半球形的肥皂泡被固定在基座上,基座以水浴的方法对肥皂泡底部进行加热,肥皂泡上的流体在浮力的驱动下形成复杂的湍流运动^[14-15].肥皂泡上的流体运动与大气流动都具有准二维流动特征,且具有相似的几何特征,这使得学者以肥皂泡为简化模型开展了大气流动中尺度结构特征的研究^[13-19].热带气旋是大气中的一种特殊中尺度结构,对人类社会具有重要的影响,是多种极端天气与自然灾害的直接原因^[10].Seychelles 等^[14] 在实验中观察到肥皂泡上出现了能长时间独立存在的岛涡,岛涡的运动规律与大气中的热带气旋类似,都具有超扩散的特征^[14,16].此外,岛涡的强度随时间变化的规律与大气中的热带气旋类似^[15].基于这些特点,Meuel 等^[17] 基于肥皂泡上岛涡与飓风的运动特征提出了预测大气气旋运动轨迹的模型.在湍流方面,研究者们发现肥皂泡上的流动具有其特有的曲面准二维热对流特征,通过实验与 DNS,可利用这一标准模型开展湍流流动机理的研究与湍流理论的考察^[16,19-21].例如通过对肥皂泡的旋转,发现了旋转效应产生了新的温度小尺度脉动标度关系^[18].因而研究肥皂泡上的湍流热对流不仅具有重要的应用价值,同时也可以拓展与丰富学界对湍流物理机制的认识.

借助赤平极射投影法,Xiong 等^[20] 首先实现了具有半球面几何的二维流场 DNS.他们计算了 Rayleigh 数为 1×10^8 的肥皂泡流场,由于缺乏能量耗散,所得到的计算结果并不稳定^[20].Meuel 等^[15] 通过实验研究了肥皂泡上的漩涡结构特征,并与 DNS 计算结果进行了对比,发现两者符合得较好.此后,Bruneau 等^[19] 在 DNS 代码中引入了能量耗散项,使得计算得到的流场能够达到统计稳态,计算获得的流场与实验观察到的肥皂泡上的流动具有相同的特征,同时还发现 DNS 计算结果对一定的外部耗散并不敏感,他们还通过 DNS 结果发现了肥皂泡对流具有 Bo59 标度律,这与实验中肥皂泡上观察到的结果一致.最近,Meuel 等^[18] 同时使用实验与 DNS 方法研究了旋转肥皂泡上的温度脉动,他们的研究中实验与 DNS 获得了非常相近的结果.经过近十年的发展,肥皂泡上热对流的 DNS 已日趋成熟,相比实验方法,使用 DNS 研究肥皂泡上的湍流热对流也展露出较大的优势.首先,目前的实验手段在获得肥皂泡上的空间特征结构关联上还具有一定难度,难以同时测量整个流场^[13-14,17].对肥皂泡上的准二维湍流的深入研究有必要获得包含全部尺度特征的完整流场信息,而采用 DNS 方法可以满足这一需求^[22].其次,实验方法也难以精确地在曲面几何中测量如能量级串、结构函数等湍流的小尺度特征^[23-24].而 DNS 获得的流场包含全部尺度的特征,可以使用编程后处理的方法高效快捷地计算湍流的小尺度特征.另外,使用 DNS 方法可以方便地在更大、更明确的参数空间内研究肥皂泡曲面空间上的热对流,并规避了如非 Boussinesq 效应、不均匀加热边界、材质与外界扰动等实验中常见的误差来源.本文将详细介绍这一套简便求解肥皂泡上流场的并行计算 DNS 方法,以及针对球面二维湍流的分析方法.

文中通过该方法对多个高 Rayleigh 数下的热对流开展了 DNS,并探索了肥皂泡上的湍流双级串现象与小尺度脉动的标度关系.

1 模型介绍与控制方程

本文研究的是在底部加热的半球形肥皂泡上的准二维湍流. 肥皂薄膜的厚度远小于肥皂泡的半径 R , 可以忽略流体在肥皂薄膜厚度方向的运动, 使用二维半球面来近似肥皂泡的几何外形. 赤道是肥皂泡与基座接触的边界, 几何外形为一个半径为 R 的圆周. 首先, 需要建立坐标系描述肥皂泡上流体微元的空间位置. 三维直角坐标系 $Oxyz$ 以二维半球面的球心 O 为原点, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 和 \mathbf{e}_z 分别为 x, y 和 z 方向上的单位基矢, 其中 \mathbf{e}_z 方向与重力方向相反. 在直角坐标系下, 肥皂泡用曲面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ 描述, 赤道的曲线方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 采用球坐标系 $Or\phi\theta$, 其中 $r=R$ 可方便地将该问题简化为二维, 球坐标系的单位基矢用 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ 和 \mathbf{e}_θ 表示. 与球坐标类似, 地理坐标系 $\phi^*O\theta^*$ 能更加直观地描述肥皂泡上任意一点的空间位置, 经度定义为 $\phi^* = \phi$, 纬度定义为 $\theta^* = 90^\circ - \theta$. 肥皂泡顶部纬度为 $90^\circ (\theta^* = 90^\circ)$, 而在赤道纬度为 $0^\circ (\theta^* = 0^\circ)$, 地理坐标系的基矢为 $\mathbf{e}_{\phi^*} = \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_{\theta^*} = -\mathbf{e}_\theta$. 对于肥皂泡上的速度场 \mathbf{u} 有如下定义:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z = u_\phi\mathbf{e}_\phi + v_\theta\mathbf{e}_\theta = u_{\phi^*}\mathbf{e}_{\phi^*} + v_{\theta^*}\mathbf{e}_{\theta^*}. \quad (1)$$

肥皂泡上流场的唯一边界是赤道, 边界条件为恒温无滑移 ($T = T_0, \mathbf{u} = \mathbf{0}$) 边界条件. 若肥皂泡的初始温度远小于肥皂泡的赤道温度, 随着时间的推移, 在赤道附近的流体, 通过赤道从外界吸收热量, 使其温度升高密度降低. 此时, 流体在浮力的驱动下向肥皂泡顶部运动, 肥皂泡中产生热对流. 数值模拟中, Boussinesq 近似常被用来描述流体温度与密度的关系. 当流体运动至远离赤道的位置时, 热量向周围的低温空气扩散, 导致温度下降密度逐渐上升, 受到的浮力逐渐减弱. 观察实验中的肥皂泡流场可以发现, 由于肥皂泡既向冷空气散热又与冷空气产生摩擦, 肥皂泡上的湍流热对流不断持续并达到了统计平衡态^[13-18]. 为了使 DNS 中肥皂泡进入统计平衡态, 外冷却项 ST 和外摩擦项 $F\mathbf{u}$ 被分别加入到能量方程与动量方程中, 用于描述流体与环境冷空气的散热与摩擦, S 为外冷却系数, 而 F 是外摩擦因数. 以往的研究表明, 外冷却项和外摩擦项可以较好地描述肥皂泡与实验环境之间的能量交换^[19-21]. 因此, 流体在肥皂泡上运动的控制方程可写为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + g\rho_0\beta T \mathbf{e}_g - F\mathbf{u}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \Delta T - ST, \end{cases} \quad (2)$$

其中, \mathbf{e}_g 为重力加速度方向的单位矢量.

为了使研究更具有普适性, 用肥皂泡半径 R , 赤道温度 T_0 , 以及自由下落速度 $u_c = \sqrt{g\beta T_0 R}$ 对方程 (2) 进行无量纲化:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{R}, \hat{T} = \frac{T}{T_0}, \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_c}, \hat{p} = \frac{p}{\rho_0 u_c^2}, \hat{t} = \frac{t}{R/u_c}, \quad (3)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 为无量纲化的空间位置矢量, \hat{T} 为无量纲化的温度, $\hat{\mathbf{u}}$ 为无量纲化的速度矢量, \hat{p} 为无量纲化的压强, \hat{t} 为无量纲化的时间. 无量纲化的控制方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \hat{T} \hat{\mathbf{e}}_g - \hat{F} \hat{\mathbf{u}}, \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \Delta \hat{T} - \hat{S} \hat{T}. \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\hat{S} = \frac{SR}{u_c}$ 和 $\hat{F} = \frac{FR}{u_c}$ 分别为无量纲化的外冷却与外摩擦因数. 方程 (4) 的控制参数为两个无量纲数, Rayleigh 数 Ra 和 Prandtl 数 Pr , 它们的定义分别如下:

$$Ra = \frac{g\beta T_0 R^3}{\nu \alpha}, \quad (5)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (6)$$

Ra 建立了流体受到的浮力与黏性力之间的一个关系, Pr 则反映了动量传输及热量传输速率之比, 对于特定的物质, Pr 是流体本身的属性, 此处为一定值.

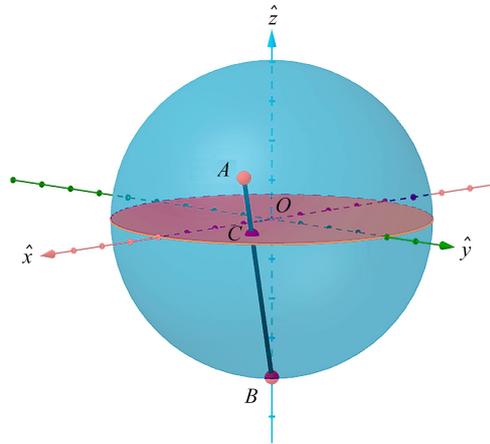


图 1 赤平极射投影法示意图

Fig. 1 An illustration of the stereographic projection

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

考虑到需要在球坐标系下求解控制方程(4), 则在肥皂泡的顶点处引入了奇异性. 而在直角坐标系下无法对这一曲面进行二维描述, 采用三维描述并进行离散则降低了曲面的光滑性. 通过赤平极射投影法引入的投影空间坐标系 $\hat{x}\hat{y}$ 可以规避以上全部缺点. 首先, 定义肥皂泡的顶点关于赤道平面的镜像点为 B 点, B 点在无量纲直角坐标系 $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 中的坐标为 $(0, 0, -1)$. 令 A 点为肥皂泡上任意一点, 存在唯一直线经过 A 点与 B 点, 直线 AB 与赤道平面的交点为 C , C 点就是 A 点的赤平极射投影点. 图 1 展示了赤平极射投影几何关系, 其中橙色平面为赤道平面, A 是肥皂泡上任意一点, B 为肥皂泡顶点关于赤道平面的镜像点, C 为投影点. 投影坐标系 $O\hat{x}\hat{y}$ 的原点为肥皂泡的球心, \hat{x} 轴与 \hat{x} 轴重合, \hat{y} 轴与 \hat{y} 轴重合. 由简单的几何关系可以推导出, 无量纲的直角坐标系向投影空间的正变换 i_s 为

$$\hat{x} = \frac{\hat{x}}{1+\hat{z}}, \hat{y} = \frac{\hat{y}}{1+\hat{z}}, \tag{7}$$

而对应的逆变换 i_s^{-1} 为

$$\hat{x} = \frac{2\bar{x}}{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}, \hat{y} = \frac{2\bar{y}}{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}, \hat{z} = \frac{1-(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}. \tag{8}$$

投影后, 肥皂泡转换为一个半径为 1 的平面圆, 表达式为 $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq 1$. 投影空间的 Lamé 系数为

$$L_1 = \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \bar{x}} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{x}} \right)^2} = \frac{2}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \tag{9}$$

$$L_2 = \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \bar{y}} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{y}} \right)^2} = \frac{2}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \tag{10}$$

其中, L_1 为 \bar{x} 方向的 Lamé 系数, L_2 为 \bar{y} 方向的 Lamé 系数. 可以发现, L_1 与 L_2 相等, 所以令

$$L = L_1 = L_2 = \frac{2}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}. \tag{11}$$

Lamé 系数随着空间不同位置产生变化, 这是因为赤平极射投影是非线性的非保距变换. \mathbf{h}_1 与 \mathbf{h}_2 分别为投影空间内 \bar{x} 与 \bar{y} 方向上的单位基矢. 直角空间与投影空间基矢的变换为

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{x}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \bar{x}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{x}} \mathbf{e}_3 = \frac{-\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_1 + \frac{-2\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_2 + \frac{-2\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_3, \tag{12a}$$

$$\mathbf{h}_2 = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{y}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \bar{y}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{y}} \mathbf{e}_3 = \frac{-2\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_1 + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_2 + \frac{-2\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \mathbf{e}_3, \tag{12b}$$

而对应的逆变换为

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{h}_1 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{h}_2 = \frac{-\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_1 + \frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_2, \quad (13a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{h}_1 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{h}_2 = \frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_1 + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_2, \quad (13b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{h}_1 + \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{h}_2 = \frac{-2\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_1 + \frac{-2\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \mathbf{h}_2. \quad (13c)$$

在计算空间内,基矢不再是常向量,而随着空间坐标变化而变化.通过基矢的变换(12)与逆变换(13)可以方便地求得在投影空间与物理空间的矢量之间的转换公式.例如,速度在投影空间与物理空间的分量具有以下关系:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \hat{u}\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{v}\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{w}\hat{\mathbf{e}}_3 = \tilde{u}\mathbf{h}_1 + \tilde{v}\mathbf{h}_2. \quad (14)$$

使用基矢的逆变换(13)代入到速度定义(14)中,即可获得速度的逆变换公式:

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{L} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{y}} \frac{\tilde{v}}{L} = \frac{-\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{u} + \frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{v}, \quad (15a)$$

$$\hat{v} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{L} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{y}} \frac{\tilde{v}}{L} = \frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{u} + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{v}, \quad (15b)$$

$$\hat{w} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{L} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{y}} \frac{\tilde{v}}{L} = \frac{-2\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{u} + \frac{-2\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \tilde{v}. \quad (15c)$$

在投影空间中求解控制方程(4)还需要计算矢量算符在投影空间中的形式.变换 i_s 的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_{i_s^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

度量张量 $\mathbf{G} = (G_{ij}) = \mathbf{J}_{i_s^{-1}}^T \mathbf{J}_{i_s^{-1}}$,而度量张量的逆为 $\mathbf{G}^{-1} = (G^{ij})$.定义 ψ 为任意标量场, $\mathbf{U} = [U_1, U_2]$ 和 $\mathbf{V} = [V_1, V_2]$ 为任意向量场,相应的梯度与散度为

$$(\nabla\psi)^i = \partial^i \psi = G^{ij} \partial_j \psi, (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})^i = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}\mathbf{V})_i, \operatorname{div} \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} \partial_i (\sqrt{|\mathbf{G}|} U^i), \quad (17)$$

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\nabla\psi) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} \partial_i (\sqrt{|\mathbf{G}|} (G^{ij} \partial_j \psi)), \Delta\mathbf{U} = g^{ij} (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \mathbf{U} - \nabla_{\nabla_{\partial_i} \mathbf{U}} \mathbf{U}), \quad (18)$$

其中张量场的协变导数为 $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, $i, j, k = 1, 2$. $\Gamma_{ij}^k \partial_k$ 是 Christoffel 符号,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-2\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{11}^2 = \frac{2\tilde{y}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{12}^1 = \frac{-2\tilde{y}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{12}^2 = \frac{-2\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \quad (19)$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{-2\tilde{y}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{-2\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{2\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{-2\tilde{y}}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}. \quad (20)$$

将坐标变换代入 Jacobi 矩阵定义,可以得到

$$\mathbf{J}_{i_s^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{2(1 - \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} & \frac{-4\tilde{x}\tilde{y}}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} \\ \frac{-4\tilde{x}\tilde{y}}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} & \frac{2(1 + \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} \\ \frac{-4\tilde{x}}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} & \frac{-4\tilde{y}}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

可以计算共形度量张量 \mathbf{G} 为

$$\mathbf{G} = \frac{4}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

及其逆 G^{-1} 为

$$G^{-1} = \frac{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

此时, 计算空间内部分矢量算符有如下形式:

$$(\nabla\psi)^i = \frac{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}{4} (\nabla\psi)_i, \tag{24}$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)^i \psi = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}G^{-1}\nabla)_i \psi = (\mathbf{U} \cdot \nabla)_i \psi, \tag{25}$$

$$(\text{div } \mathbf{U})^i = (\text{div } \mathbf{U})_i - \frac{4\tilde{x}U_1 + 4\tilde{y}U_2}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tag{26}$$

$$(\Delta\psi)^i = \frac{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}{4} (\Delta\psi)_i. \tag{27}$$

控制方程(2)中还包括速度矢量的对流导数算符与 Laplace 算符, 其中对流导数可写为

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla)^i \mathbf{U} &= \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = U_1 \nabla_{\partial_{\tilde{x}}} + U_2 \nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \mathbf{U} = \\ &U_1^2 \nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \partial_{\tilde{x}} + U_1 (\partial_{\tilde{x}} U_1) \partial_{\tilde{x}} + U_1 U_2 \nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \partial_{\tilde{y}} U_1 (\partial_{\tilde{x}} U_2) \partial_{\tilde{y}} + U_1 U_2 \nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \partial_{\tilde{x}} + \\ &U_2 (\partial_{\tilde{y}} U_1) \partial_{\tilde{x}} + U_2^2 \nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \partial_{\tilde{y}} + U_2 (\partial_{\tilde{y}} U_2) \partial_{\tilde{y}} = \\ &(\mathbf{U} \cdot \nabla)_i \mathbf{U} + \frac{2}{1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \begin{bmatrix} -\tilde{x}U_1^2 - 2\tilde{y}U_1 U_2 + \tilde{x}U_2^2 \\ \tilde{y}U_1^2 - 2\tilde{x}U_1 U_2 - \tilde{y}U_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

将 \mathbf{U} 替换为速度矢量场 \mathbf{u} 就可以得到控制方程中对流项, 而对于 Laplace 算符,

$$(\nabla\mathbf{U})^i = G^{11} (\nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \mathbf{U} - \nabla_{\nabla_{\partial_{\tilde{x}}\partial_{\tilde{x}}}} \mathbf{U}) + G^{22} (\nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \mathbf{U} - \nabla_{\nabla_{\partial_{\tilde{y}}\partial_{\tilde{y}}}} \mathbf{U}), \tag{29}$$

其中

$$\nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}} U_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1 \\ \partial_{\tilde{x}} V_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{y}} U_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1 \\ \partial_{\tilde{y}} V_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \nabla_{\partial_{\tilde{x}}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}}^2 U_1 + \partial_{\tilde{x}} (U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1) + (\partial_{\tilde{x}} U_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1) \Gamma_{11}^1 + (\partial_{\tilde{x}} V_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1) \Gamma_{12}^1 \\ \partial_{\tilde{x}}^2 U_2 + \partial_{\tilde{x}} (U_1 \Gamma_{11}^2 + U_2 \Gamma_{12}^2) + (\partial_{\tilde{x}} U_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1) \Gamma_{11}^2 + (\partial_{\tilde{x}} V_1 + U_1 \Gamma_{11}^1 + U_2 \Gamma_{12}^1) \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \nabla_{\partial_{\tilde{y}}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{y}}^2 U_1 + \partial_{\tilde{y}} (U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1) + (\partial_{\tilde{y}} U_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1) \Gamma_{21}^1 + (\partial_{\tilde{y}} V_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1) \Gamma_{22}^1 \\ \partial_{\tilde{y}}^2 U_2 + \partial_{\tilde{y}} (U_1 \Gamma_{21}^2 + U_2 \Gamma_{22}^2) + (\partial_{\tilde{y}} U_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1) \Gamma_{21}^2 + (\partial_{\tilde{y}} V_1 + U_1 \Gamma_{21}^1 + U_2 \Gamma_{22}^1) \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

将以上公式代入 Laplace 算符表达式, 最终可以得到

$$(\Delta\mathbf{U})^i = \frac{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}{4} (\Delta\mathbf{U})_i - \mathbf{U} - (1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \begin{bmatrix} \tilde{x}\partial_{\tilde{x}} U_1 + \tilde{y}\partial_{\tilde{y}} u + \tilde{y}\partial_{\tilde{x}} U_2 - \tilde{x}\partial_{\tilde{y}} U_2 \\ \tilde{x}\partial_{\tilde{y}} U_1 - \tilde{y}\partial_{\tilde{x}} u + \tilde{x}\partial_{\tilde{x}} U_2 + \tilde{y}\partial_{\tilde{y}} U_2 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

将 \mathbf{U} 用 \mathbf{u} 替换并乘以黏度, 则可以得到控制方程中的黏性力项, 将计算空间中算符的表达式代入控制方程(4)并整理后可得到计算空间中的连续性方程为

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{2(\tilde{x}\tilde{u} + \tilde{y}\tilde{v})}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}; \tag{35}$$

动量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) + \tilde{v}(\tilde{x}\tilde{v} - \tilde{y}\tilde{u}) = \\ - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} - \frac{2\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} T - \hat{F}\tilde{u} + \\ \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{\sqrt{Ra/Pr}} \left(\tilde{x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{\sqrt{Ra/Pr}} \tilde{u}; \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) + \tilde{u}(\tilde{y}\tilde{u} - \tilde{x}\tilde{v}) = \\ - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{y}} - \frac{2\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} T - \hat{F}\tilde{v} + \\ \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{\sqrt{Ra/Pr}} \left(\tilde{y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{Ra/Pr} \tilde{v}; \end{aligned} \tag{37}$$

能量方程为

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \frac{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \hat{S}\hat{T}. \tag{38}$$

2 数值方法

在投影空间内,控制方程(4)的计算域可置于边长略大于2的正方形之中.采用正方形计算域可方便采用正交结构化交错网格离散,其中温度与压强存放于网格的中心,速度变量存放于网格的边界中点,如图2所示,网格中心为温度与压强节点,而网格边界中点为速度节点.DNS使用 L^2 惩罚法在计算域中实现浸入边界条件.令 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{eqtr}} = \mathbf{0}$ 和 $\hat{T}_{\text{eqtr}} = 1$ 分别为边界(赤道)上的速度与温度,并且在动量方程与能量方程中分别添加惩罚项 $\frac{\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_{\text{eqtr}}}{D}$ 和 $\frac{\hat{T} - \hat{T}_{\text{eqtr}}}{D}$,变量 D 随着空间位置不同而取值不同.在肥皂泡内时($\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 < 1$), $D = 10^{16}$;而在肥皂泡外时($\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \geq 1$), $D = 10^{-16}$.这相当于令渗透率极低的多孔介质填充在所关心的肥皂泡计算区域之外,并且多孔介质保持恒温,使赤道成为恒温无滑移边界.而在肥皂泡内部,惩罚项的作用可以忽略不计.有限差分作为一种经典实用的数值方法,在对流扩散问题中具有广泛的应用^[25].本文中采用有限差分离散控制方程(4),时间离散步长为 δ_t ,空间离散步长分别为 $\delta_{\tilde{x}}$ 和 $\delta_{\tilde{y}}$,时间离散格式为二阶 Gear 格式,控制方程中的线性部分作隐式处理,非线性部分作显式处理.以速度场为例,下一个待求时间步的 Lagrange 导数用二阶 Gear 格式近似为

$$\left(\frac{D}{Dt} \hat{\mathbf{u}} \right)^m = \frac{3\hat{\mathbf{u}}^m}{2\delta_t} - \frac{4\hat{\mathbf{u}}^{m-1} - \hat{\mathbf{u}}^{m-2}}{2\delta_t} + 2(\hat{\mathbf{u}}^{m-1} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}}^{m-1} - (\hat{\mathbf{u}}^{m-1} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}}^{m-2}, \tag{39}$$

其中 $\hat{\mathbf{u}}^m$ 和 \hat{T}^m 为当前待求时间步的速度场与温度场.

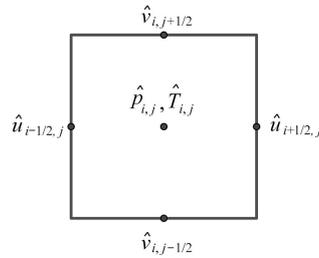


图2 交错网格示意图

Fig. 2 The scheme of the staggered mesh

动量方程的对流项使用三阶 Murman-like 格式离散.例如速度 \tilde{u} 的对流导数 $-\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{u} - \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{u}$ 在 Murman-like 格式下的近似为

$$\begin{aligned} - \frac{\tilde{u}_{i,j} \Delta_{i,j} \tilde{u}}{3 \delta_{\tilde{x}}} - \frac{5\tilde{u}_{i-1,j} \Delta_{i-1,j} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{x}}} + \frac{\tilde{u}_{i-2,j} \Delta_{i-2,j} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{x}}}, \quad \tilde{u}_{i-1,j} > 0, \\ - \frac{\tilde{u}_{i-1,j} \Delta_{i-1,j} \tilde{u}}{3 \delta_{\tilde{x}}} - \frac{5\tilde{u}_{i,j} \Delta_{i,j} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{x}}} + \frac{\tilde{u}_{i+1,j} \Delta_{i+1,j} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{x}}}, \quad \tilde{u}_{i,j} < 0, \\ - \frac{\tilde{v}_{i-1/2,j+1/2} \Delta_{i-1/2,j+1/2} \tilde{u}}{3 \delta_{\tilde{y}}} - \frac{5\tilde{v}_{i-1/2,j-1/2} \Delta_{i-1/2,j-1/2} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{y}}} + \frac{\tilde{v}_{i-1/2,j-3/2} \Delta_{i-3/2,j-3/2} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{y}}}, \quad \tilde{v}_{i-1/2,j-1/2} > 0, \\ - \frac{\tilde{v}_{i-1/2,j-1/2} \Delta_{i-1/2,j-1/2} \tilde{u}}{3 \delta_{\tilde{y}}} - \frac{5\tilde{v}_{i-1/2,j+1/2} \Delta_{i-1/2,j+1/2} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{y}}} + \frac{\tilde{v}_{i-1/2,j+3/2} \Delta_{i-3/2,j+3/2} \tilde{u}}{6 \delta_{\tilde{y}}}, \quad \tilde{v}_{i-1/2,j+1/2} < 0, \end{aligned}$$

其中, $\tilde{u}_{i,j} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i+1/2,j} + \tilde{u}_{i-1/2,j})$ 和 $\tilde{v}_{i-1/2,j+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_{i,j+1/2} + \tilde{v}_{i-1,j+1/2})$ 是速度在网格中心点的线性插值;而 $\Delta_{i,j} \tilde{u} =$

$(\tilde{u}_{i+1/2,j} - \tilde{u}_{i-1/2,j})$ 和 $\Delta_{i-1/2,j+1/2}\tilde{u} = (\tilde{u}_{i-1/2,j+1} - \tilde{u}_{i-1/2,j})$ 是相邻网格节点速度之差。

离散之后的控制方程(4)变为线性方程组, 这里应用时间分裂法求解离散后获得的方程组, 先求解温度线性方程组 $\bar{\bar{A}}\mathbf{T} = \mathbf{C}$ 再求解速度压力耦合线性方程组 $\bar{\bar{L}}\mathbf{U} = \mathbf{B}$ 。在温度线性方程组中, $\bar{\bar{A}}$ 为离散算子, 是一个对角五分块矩阵; \mathbf{T} 是待求的无量纲温度场, 写为列向量的形式; 而 \mathbf{C} 是能量方程的显式项, 也写为列向量形式。在投影空间内, $\bar{\bar{A}}$ 并不是 Hermite 矩阵, 可以使用共轭梯度法来求解线性方程组 $\bar{\bar{A}}\mathbf{T} = \mathbf{C}$ 。这里用 ξ 代表求解线性方程组的误差限。求解 $\bar{\bar{A}}\mathbf{T} = \mathbf{C}$ 的算法如下所示。

算法1 共轭梯度算法

- 1 $\mathbf{r} = \bar{\bar{A}}\mathbf{T} - \mathbf{C};$
- 2 $\mathbf{d} = \mathbf{r};$
- 3 while $\|\bar{\bar{A}}\mathbf{T} - \mathbf{C}\| \geq \xi$ do
- 4 $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}{\mathbf{d}^T \bar{\bar{A}} \mathbf{d}};$
- 5 $\mathbf{T} = \mathbf{T} + \mathbf{a} \mathbf{d};$
- 6 $\beta = \frac{|\bar{\bar{A}}\mathbf{T} - \mathbf{C}|^2}{|\mathbf{r}|^2};$
- 7 $\mathbf{r} = \bar{\bar{A}}\mathbf{T} - \mathbf{C};$
- 8 $\mathbf{d} = \mathbf{r} + \beta \mathbf{d}.$

在离散化之后的速度压强耦合方程 $\bar{\bar{L}}\mathbf{U} = \mathbf{B}$ 中, $\bar{\bar{L}}$ 为离散算子, 为一个矩阵; \mathbf{U} 是待求的无量纲速度场, 为一个列向量; \mathbf{B} 是方程的显式项, 同样是一个列向量。这里使用 V 循环的多重网格法来求解。首先, 在计算域上生成一系列网格 $G_n (n = 1, 2, 3, \dots, q)$ 。 G_1 是最粗网格只包含 4×4 个网格, 而 G_q 是最细网格, 也是 DNS 需要求解速度与压强场的网格。第 n 个网格对应离散算符 $\bar{\bar{L}}_n$ 和显式量的向量 \mathbf{B}_n 。 \bar{S}_n 代表在第 n 个网格上的光滑算符, 用于求解出第 n 个网格上的线性方程组的近似数值解。 R_n^{n+1} 代表将近似解从 $n+1$ 个网格向下线性插值到 n 个网格的操作。 P_{n+1}^n 则代表相反的操作, 将变量从第 n 个网格线性插值到 $n+1$ 个网格上。令 \mathbf{U}_p^0 代表迭代的初始值, V 循环算法如下所示。

算法2 V循环算法

- 1 while $\|\mathbf{U}_p - \bar{\bar{L}}_p \mathbf{B}_p\| \geq \xi$ do
- 2 $\mathbf{U}_p = \bar{S}_n(\bar{\bar{L}}_p, \mathbf{U}_p^0, \mathbf{B}_p);$
/* Correction on coarse grids */
- 3 for $n = q-1, q-2, q-3, \dots, 2$ do
- 4 $\dot{\mathbf{U}}_n = R_n^{n+1} \mathbf{U}_{n+1};$
- 5 $\mathbf{B}_i = R_n^{n+1}(\mathbf{B}_{n+1} - \bar{\bar{L}}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}) + \bar{\bar{L}}_n \dot{\mathbf{U}}_n;$
- 6 $\mathbf{U}_n = \bar{S}_n(\bar{\bar{L}}_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \mathbf{B}_n);$
/* Updating the fine grids */
- 7 for $n = 2, 3, 4, \dots, q$ do
- 8 $\ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{U}_n + P_{n+1}^n(\mathbf{U}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_{n+1});$
- 9 $\mathbf{U}_n = \bar{S}_n(\bar{\bar{L}}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n, \mathbf{B}_n);$
- 10 $\mathbf{U}_p^0 = \mathbf{U}_p.$ // Update initial solution

在第 n 个网格中, 光滑算符 \bar{S}_n 的同时采用 Gauss-Seidel 迭代法逐个网格迭代求解线性方程组。对于在 \bar{x} 方向

索引为*i*, 在*y*方向索引为*j*的网格, 迭代过程就是求解一个如下的5×5线性方程组:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 & 1/\delta_{\bar{x}} \\ 0 & \mathcal{A} & 0 & 0 & -1/\delta_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & 0 & 1/\delta_{\bar{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -1/\delta_{\bar{y}} \\ -1/\delta_{\bar{x}} & 1/\delta_{\bar{x}} & -1/\delta_{\bar{y}} & 1/\delta_{\bar{y}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{i-1/2,j} \\ \tilde{u}_{i+1/2,j} \\ \tilde{v}_{i,j-1/2} \\ \tilde{v}_{i,j+1/2} \\ \tilde{p}_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{B}_{i-1/2,j} \\ \dot{B}_{i+1/2,j} \\ \dot{B}_{i,j-1/2} \\ \dot{B}_{i,j+1/2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

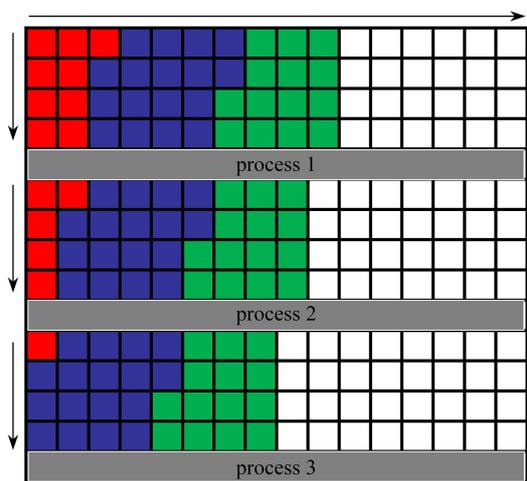


图3 并行算法示意图

Fig. 3 The scheme of the parallel algorithm

其中, $\mathcal{A} = \frac{1}{\delta_i} + \frac{2}{Ra} \left(\frac{1}{\delta_{\bar{x}}} + \frac{1}{\delta_{\bar{y}}} \right)$, 而 \dot{B} 则代表了每个网格节点上线性方程组的常数项. 每个网格的5×5线性方程组都使用Cramer法直接耦合求解. 由于DNS的网格量大, 本文采取了Message Passing Interface (MPI) 软件库通过分区并行计算实现计算加速. 如图3所示(图中红、蓝、绿色块代表不同时刻不同处理器完成的网络计算), 以三核对计算网格进行等量划分为例, 当网格采用自上而下, 从左到右的扫描顺序时, 处理上部网格的process 1完成第一列网格计算后, 通过MPI传递给下方网格计算的process 2. 此时process 1开始第二列的计算, 而process 2开始其分区的第一列的网格计算, 依次类推可保障计算各线程计算各列网格后及时将数据传递出去, 不产生额外的数据等待延迟, 且所得的并行计算结果与串行计算结果完全一致.

而早期的并行计算未能保障每个线程获得最新的数据结果, 从而既增加了迭代次数也无法保障结果与串行计算完全一致.

3 结果讨论

3.1 算例信息与瞬时流场

本文一共设置了三个算例用以分析Rayleigh数对流场的影响, 三个算例的*Ra*分别为 3×10^7 , 3×10^9 和 3×10^{11} , 详细信息见表1. 所有算例的*Pr*固定为7, 因为肥皂水的物理性质与水近似. 以往的研究表明 $\hat{S} = \hat{F} = 0.06$ 是一个合理的选择^[19,21], 本文计算中也采用该值. 为了消除网格分辨率对结果的影响, 对每个算例都尝试了多个网格分辨率: 256×256 , 512×512 , 1024×1024 , 1536×1536 , 2048×2048 和 2560×2560 . 图4显示了算例2在不同网格分辨率下, 系统总拟涡能随时间的变化曲线. 从图中可以观察到, 不同的网格分辨率下肥皂泡上的总拟涡能都在50个无量纲时间单位内达到了统计稳态. 在本文所有的数值模拟中, 每个算例都保证足够的计算时长, 使流场达到统计稳态, 并对结果进行长时间的统计计算. 随着网格分辨率的提升, 总拟涡能的统计平均值在缓慢增加, 但当网格分辨率超过 2048×2048 时, DNS已可以获得网格独立结果. 得益于并行计算效率的提升, 本文首次使用 2048×2048 的网格分辨率开展了肥皂泡上热对流的DNS, 同时也将DNS的Rayleigh数提升到 $Ra = 3 \times 10^{11}$.

表1 算例参数信息

Table 1 Information for the simulated cases

case number	<i>Ra</i>	<i>Pr</i>	\hat{S}	\hat{F}	resolution
1	3×10^7	7	0.06	0.06	1024×1024
2	3×10^9	7	0.06	0.06	2048×2048
3	3×10^{11}	7	0.06	0.06	2048×2048

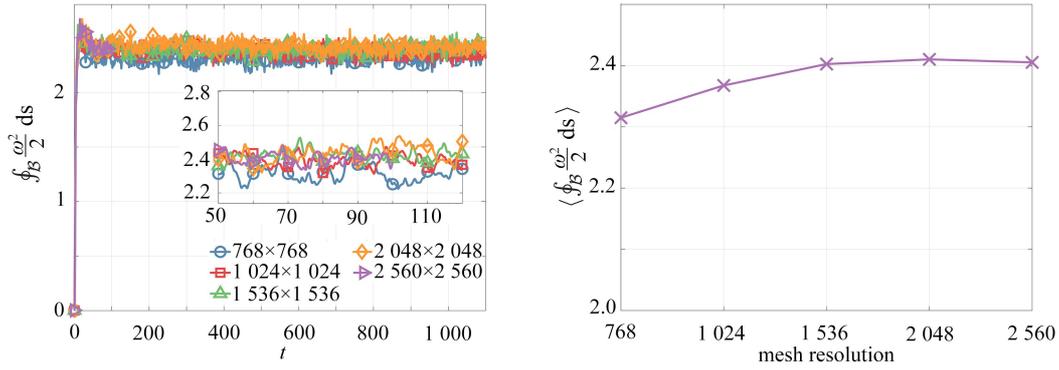


图 4 不同网格分辨率下, 算例 2 的总拟涡能随时间的变化曲线(左)和拟涡能总量的统计值随网格分辨率变化曲线(右)

Fig. 4 The temporal evolution of the total enstrophy on the bubble with different mesh resolutions (left) & the variation of the mean total enstrophy with the mesh resolutions (right)

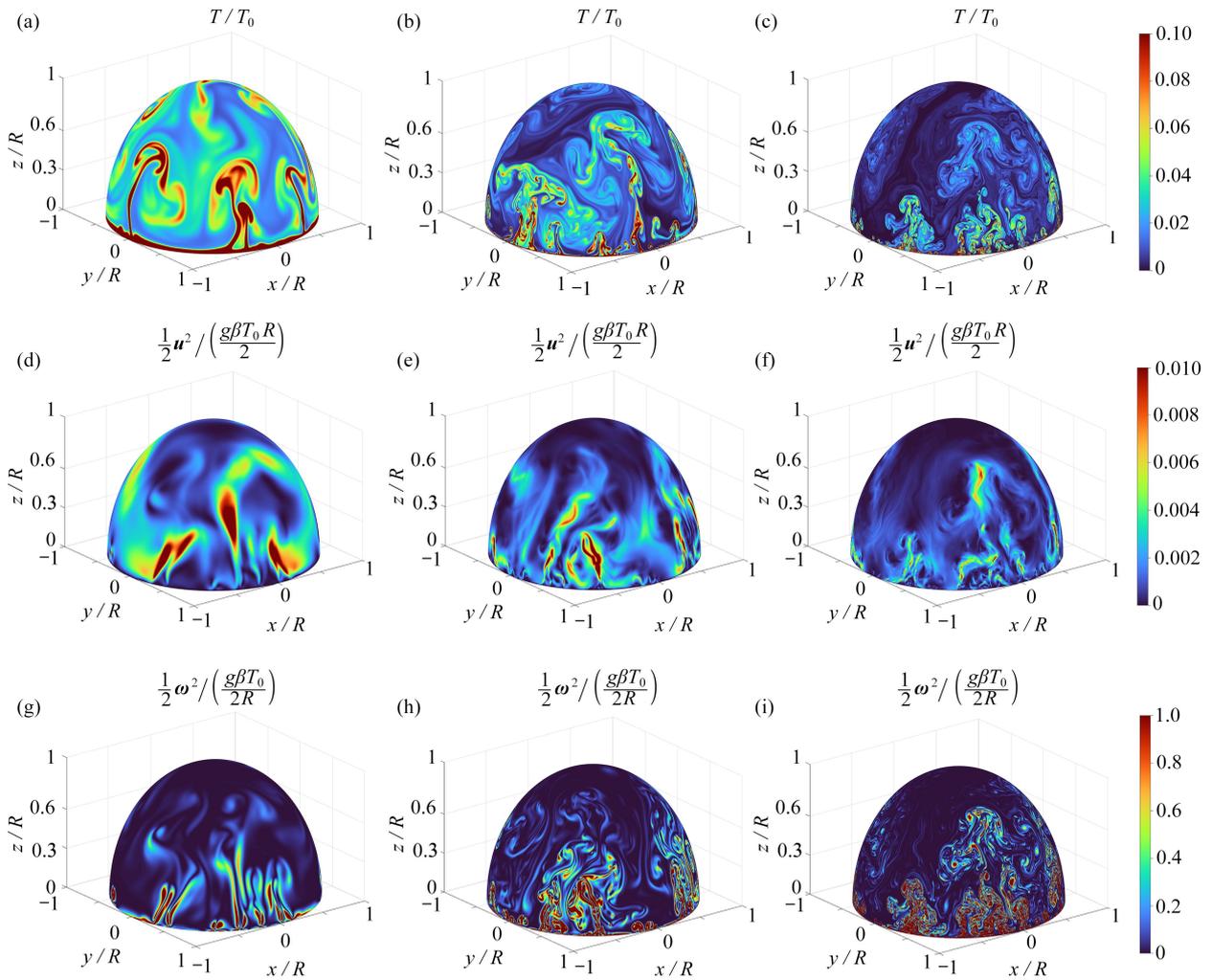


图 5 瞬时流场图: (a) 无量纲瞬时温度场, $Ra=3 \times 10^7$; (b) 无量纲瞬时温度场, $Ra=3 \times 10^9$; (c) 无量纲瞬时温度场, $Ra=3 \times 10^{11}$; (d) 无量纲瞬时动能场, $Ra=3 \times 10^7$; (e) 无量纲瞬时动能场, $Ra=3 \times 10^9$; (f) 无量纲瞬时动能场, $Ra=3 \times 10^{11}$; (g) 无量纲瞬时拟涡能场, $Ra=3 \times 10^7$; (h) 无量纲瞬时拟涡能场, $Ra=3 \times 10^9$; (i) 无量纲瞬时拟涡能场, $Ra=3 \times 10^{11}$

Fig. 5 The instantaneous flow field: (a) dimensionless instantaneous temperature field, $Ra=3 \times 10^7$; (b) dimensionless instantaneous temperature field, $Ra=3 \times 10^9$; (c) dimensionless instantaneous temperature field, $Ra=3 \times 10^{11}$; (d) dimensionless instantaneous kinetic energy field, $Ra=3 \times 10^7$; (e) dimensionless instantaneous kinetic energy field, $Ra=3 \times 10^9$; (f) dimensionless instantaneous kinetic energy field, $Ra=3 \times 10^{11}$; (g) dimensionless instantaneous enstrophy field, $Ra=3 \times 10^7$; (h) dimensionless instantaneous enstrophy field, $Ra=3 \times 10^9$; (i) dimensionless instantaneous enstrophy field, $Ra=3 \times 10^{11}$

通过观察瞬态流场云图可以直观地分析肥皂泡上流场的宏观特点.图5展示了三个算例的瞬时温度场 T ,瞬时动能场 $u^2/2$ 和瞬时拟涡能场 $\omega^2/2$.从图5中可以清晰地观察肥皂泡上非常卷曲的羽流以及尺度较大的岛涡.在经典的 Rayleigh-Bénard 对流中,流场由冷热羽流所自组织的大尺度环流(large scale circulation)所主导.当对流槽具有特定的纵横比时,在合适的 Rayleigh 数控制下,流场中还会出现角涡.肥皂泡没有冷边界,流场中不存在冷羽流;而肥皂泡同时也没有侧向边界及其形成的角涡,肥皂泡上的相干结构主要由热羽流及其演化形成.从温度云图上可以观察到,边界层上产生了大量的羽流,羽流在浮力的作用下向更高纬度运动.而同一时刻的拟涡能云图则显示羽流的形成与运动过程中产生了不同尺寸的涡,一些涡相互融合后形成了尺度较大的岛涡,岛涡主要居于较高纬度,与实验中观察到的情况相同^[15,17].从动能云图中可以发现流场的动能集中在一些尺寸较大的岛涡中.

而随着 Ra 的增加,瞬时流场出现了明显变化.当 $Ra = 3 \times 10^7$ 时,羽流和涡的尺寸较大,动能分布在较大的流动结构中,而且可以从温度云图中清晰的观察到边界层.当 Ra 增加到 3×10^9 时,羽流更加细小与卷曲,而涡的尺寸也明显变小,同时羽流和涡的数量有明显增加,动能集中在更加细长的流动结构中.另外,温度边界层的厚度大幅减小,从温度云图中已经无法清晰观察到边界层.而当 $Ra = 3 \times 10^{11}$ 时,羽流和涡变得更加小,而其数量更进一步增加时,动能云图显示流动结构的尺寸将继续减小.

3.2 动能与拟热能的波数谱与通量

流场量的波数谱和通量表征了湍流场不同尺度的涡之间的相互作用,对于三维流场或二维平面流场,计算波数谱和通量需要进行空间 Fourier 变换.肥皂泡上的流场具有曲面几何,需要专门的数学工具来计算波数谱和通量.任意球对称空间函数 ψ 均可以展开为球谐函数的级数:

$$\Psi(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \Psi_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \tag{40}$$

其中, Y_k^m 为 k 级 m 阶的球谐函数,其定义为

$$Y_k^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2k+1}{\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \tag{41}$$

其中, P_k^m 为对应的伴随 Legendre 多项式, Ψ_k^m 是分解系数.利用球谐函数的正交性, Ψ_k^m 可以由如下公式计算:

$$\Psi_k^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \Psi(\theta, \phi) (Y_k^m(\theta, \phi))^* \sin(\theta) d\theta d\phi, \tag{42}$$

*代表取复共轭.实际上,函数 $\Psi(\theta, \phi)$ 的球谐函数展开就是二重广义 Fourier 级数的展开, Ψ_k^m 等价于 Fourier 级数中的频域系数.函数 Ψ 的模满足以下公式:

$$|\Psi|^2 = \sum_{l=0}^{+\infty} (\tilde{\Psi}(k))^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} |\Psi_k^m|^2, \tag{43}$$

其中, $\tilde{\Psi}(k)$ 的定义为

$$\tilde{\Psi}(k) = \left(\sum_{m=-k}^{+k} |\Psi_k^m|^2 \right)^{1/2}, \tag{44}$$

即是 Ψ 的波数谱,而 k 等价于 Fourier 功率谱中的波数.

肥皂泡上的流场量,如速度 $\mathbf{u}(\theta, \phi)$ 与温度 $T(\theta, \phi)$ 都是球对称函数.因此,使用球谐分解来计算速度与温度的波数谱.肥皂泡上的温度场 $T(\theta, \phi)$ 的球谐分解为

$$T(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} T_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \tag{45}$$

而系数 T_k^m 的计算公式为

$$T_k^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} T(\theta, \phi) (Y_k^m(\theta, \phi))^* \sin(\theta) d\theta d\phi. \tag{46}$$

这里将温度的平方定义为拟热能, 拟热能的功率谱由下式计算:

$$\tilde{T}(k) = \left(\sum_{m=-k}^k |T_k^m|^2 \right)^{1/2}. \quad (47)$$

同样还可以定义肥皂泡上单位质量流体的动能函数 $E(\phi, \theta) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ 和拟涡能函数 $W(\phi, \theta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2$, 其中 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 为涡量, E 和 W 的球谐分解分别为

$$E(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} E_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (48)$$

$$W(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} W_k^m Y_k^m(\theta, \phi). \quad (49)$$

利用相同的方法可以计算肥皂泡上流场的动能谱与拟涡能谱:

$$\tilde{E}(k) = \left(\sum_{m=-k}^k |E_k^m|^2 \right)^{1/2}, \quad (50)$$

$$\tilde{W}(k) = \left(\sum_{m=-k}^k |W_k^m|^2 \right)^{1/2}. \quad (51)$$

另外, 使用球谐分解也可以计算动能、拟涡能以及拟热能的通量. 动能的通量 Π_E 由 Fourier 空间中 NS 方程的对流项计算而来, 定义为

$$\Pi_E(k) = \int_k^{+\infty} \Gamma_E(k') dk', \quad (52)$$

其中, $\Gamma_E(k)$ 定义为

$$\Gamma_E(k) = \int \mathcal{F}^*(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) d\omega', \quad (53)$$

\mathcal{F} 是 Fourier 变换, \mathcal{F}^* 是 Fourier 变换的共轭, 而 $\int(\cdot) d\omega'$ 是对 Fourier 变换的角频率积分. 在肥皂泡上使用球谐分解代替 Fourier 变换; 而用阶数 m 累加代替角频率积分. 对于三维直角坐标系下的速度场进行球谐分解得到

$$\mathbf{u}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} u_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (54)$$

$$v(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} v_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (55)$$

$$w(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} w_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (56)$$

而对流项三个分量也进行球谐分解得到

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) u(\theta, \phi) = \dot{u}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \dot{u}_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (57)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) v(\theta, \phi) = \dot{v}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \dot{v}_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (58)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) w(\theta, \phi) = \dot{w}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \dot{w}_k^m Y_k^m(\theta, \phi). \quad (59)$$

所以

$$\Gamma_E(k) = \int \mathcal{F}^*(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) d\omega' = \sum_{m=-k}^k [(u_k^m)^* \dot{u}_k^m + (v_k^m)^* \dot{v}_k^m + (w_k^m)^* \dot{w}_k^m]. \quad (60)$$

最后,使用累加代替积分

$$\Pi_E(k) = \sum_{k'=k}^{+\infty} \Gamma_E(k'). \quad (61)$$

再使用同样的方法计算拟涡能和拟热能的通量,拟涡能通量的定义为

$$\Pi_W(k) = \int_k^{+\infty} \Gamma_W(k') dk', \quad (62)$$

其中

$$\Gamma_W(k) = \int \mathcal{F}^*(W) \mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla)W) d\omega'; \quad (63)$$

拟热能通量的定义为

$$\Pi_T(k) = \int_k^{+\infty} \Gamma_T(k') dk', \quad (64)$$

其中

$$\Gamma_T(k) = \int \mathcal{F}^*(T) \mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla)T) d\omega'. \quad (65)$$

同样,这里用球谐分解代替 Fourier 变换:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)W(\theta, \phi) = \dot{W}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \dot{W}_k^m Y_k^m(\theta, \phi), \quad (66)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)T(\theta, \phi) = \dot{T}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \dot{T}_k^m Y_k^m(\theta, \phi). \quad (67)$$

用阶数 m 代替积分后, Γ_W 和 Γ_T 分别为

$$\Gamma_W(k) = \sum_{m=-k}^k (W_k^m)^* \dot{W}_k^m, \quad (68)$$

$$\Gamma_T(k) = \sum_{m=-k}^k (T_k^m)^* \dot{T}_k^m. \quad (69)$$

所以,拟涡能和拟热能的通量的计算公式分别为

$$\Pi_W(k) = \sum_{k'=k}^{+\infty} \Gamma_W(k'), \quad (70)$$

$$\Pi_T(k) = \sum_{k'=k}^{+\infty} \Gamma_T(k'). \quad (71)$$

当流动是由浮力所驱动时,假设流场中存在一个尺度范围,在其中浮力与惯性力起主导作用,而黏性力可以忽略.在这个尺度范围内,在惯性力与浮力相互平衡的前提下,推导出稳定分层湍流中能量级串的标度规律,即Bo59标度率.近几十年来,探索Bo59标度律是否存在于 Rayleigh-Bénard 对流中一直是学术热点问题^[3].利用 Fourier 变换,速度场在波数空间中被分解为基底 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 的积分,每一个基底函数 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 代表一个具有波矢 \mathbf{k} 的涡,这个涡的尺度为 $\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$.能量谱 $\tilde{E}(k)$ 是满足 $|\mathbf{k}|=k$ 的全部波矢所对应涡的总动能.同理,拟热能的波数谱 $\tilde{T}(k)$ 则是所有尺度为 $\frac{2\pi}{k}$ 的涡所具有的拟热能的总和.能量谱 $\tilde{E}(k)$ 与拟热能的波数谱 $\tilde{T}(k)$ 随波数 k 的变化标度则代表了不同尺度的涡之间的能量与拟热能传递规律.Boffetta 和 Mazzino^[26]在理论上预测了存在能量逆级串时,满足Bo59标度律的动能与拟热能的波数谱具有以下标度特征:

$$\tilde{E}(k) \sim k^{-11/5}, \quad (72)$$

$$\tilde{W}(k) \sim k^{-7/5}. \tag{73}$$

在肥皂泡上寻找Bo59标度律需要考虑曲面几何带来的影响. 由于肥皂泡上不同纬度上的重力投影随着纬度而变化, 这是Bo59假设中所不包含的特点. 这暗示只有在重力随纬度变化较小的区域内, 有可能发现Bo59标度律. 对于纬度为 θ^* , 重力加速度在球面切向的投影为 $g \cos \theta^*$, 对之求 θ^* 的导数为 $g \sin \theta^*$, 这说明越接近赤道重力投影随纬度的变化越小. 然而, 在导出Bo59标度律的理论中假定边界条件不产生影响, 因而只有在足够远离赤道才能发现Bo59标度律. 结合以上几点考虑, Bo59标度律只在一定纬度范围内有效.

本文三个算例的动能与拟热能的波数谱如图 6 所示, 图中虚线为Bo59标度参考线. 观察图 6 中的动能波数谱可以发现, 在 $5 \leq kR \leq 100$ 的范围内, Bo59标度律准确地描述了不同 Ra 下的动能谱随波数的标度规律. 相反的是, 图 6 中的拟热能的波数谱则表明, 在本文所考虑的三个 Ra 条件下, 肥皂泡的拟热能波数谱标度特征没有观察到Bo59标度律. 在肥皂泡上流场中, 边界层中流体的温度最高, 而当流体随着羽流上升离开边界层后, 温度快速下降. He 等^[21]发现, 边界层的平均温度与脉动温度均远大于肥皂泡其余部分, 这暗示边界层对肥皂泡上温度场具有很强的影响. 图 6 中的拟热能波数谱包含了整个肥皂泡上温度场的脉动信息, 温度边界条件对波数谱的影响无法忽略, 所以拟热能波数谱相比动能包含了更多边界的影响而没有Bo59标度律. 随着 Ra 的增加, 在小波数的范围内, 动能谱和拟热能谱有较明显的减小, 这与瞬时流场中羽流和涡的尺寸随着 Ra 增加而明显变小的规律相符合. 对于图 6 中所有 Ra 的波数谱, 随着波数 k 的增加, 动能谱与拟热能谱逐渐减小. 这表明肥皂泡上尺寸越大的流动结构具有更大的动能与拟热能, 与从瞬时流场观察到的现象相同.

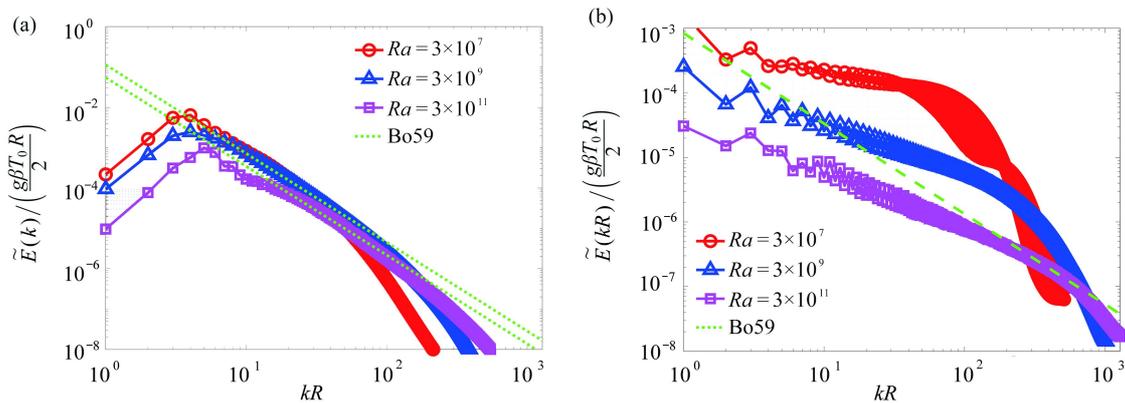


图 6 动能与拟热能的波数谱: (a) 动能; (b) 拟热能

Fig. 6 The wave number spectra for the kinetic energy and entropy: (a) the kinetic energy; (b) the entropy

通量(flux)代表了湍流场中不同尺度的涡之间的物理量传递, 大于0的通量表明物理量从大尺度的涡向小尺度的涡级串. 反之当通量小于0时, 物理量从小尺度的涡向大尺度涡逆级串. Kraichnan^[7]、Leith^[8]和Batchelor^[9]的二维湍流理论预言了双级串的现象: 一个尺度范围中, 动能能级逆级串而拟涡能保持正向级串. 图 7 显示了整个肥皂泡上动能、拟涡能、拟热能和浮力项的通量, 图中包含全部三个算例的结果. 在三个不同的 Ra 条件下, 图 7 中的 Π_E 曲线都具有相同的规律, 在较小波数的区间 $\Pi_E > 0$, 随着波数的增加, Π_E 快速减小到负值. 在 Π_E 达到最小值之后, Π_E 随着波数的增加逐渐增加, 重新达到 $\Pi_E > 0$, 此时 Π_E 随波数的变化较小. 三个算例中的流场均出现了动能能级逆级串的现象, 随着 Ra 的增加, 能级拟级串的尺度区间逐渐变大.

通过观察图 7 中的拟涡能通量曲线可以发现, 三个算例的 Π_W 始终大于0, 肥皂泡上拟涡能始终保持从大涡向小涡的传递方向. 在不同的 Ra 下, Π_W 在较小波数的范围内保持稳定, 但随着波数的增加, Π_W 先快速增加, 达到最大值之后又快速减少. 三个算例的拟热能的通量同样始终大于0, 这说明温度也始终是由较大的涡传递给较小的涡. 从瞬时温度场可以观察到, 羽流和涡在赤道处产生时尺寸较大, 在向高纬度运动的过程中破碎消散, 这一过程符合拟热能通量所描述的逆热能传递特征. 当 $Ra = 3 \times 10^{11}$ 与 $Ra = 3 \times 10^9$ 时, Π_T 随着波数的增加单调缓慢减小. 而在 $Ra = 3 \times 10^7$ 的条件下, 拟涡能通量曲线随着波数的增加先增加后减小, 出现一个极大值.

浮力通量是对整个肥皂泡上的浮力场 Te_θ 进行球谐分解后计算获得, 计算方法与动能的通量计算方法相同. 由于肥皂泡上的流体运动是由浮力所驱动, 浮力通量具有特别的重要性. 图 7 中的浮力通量曲线显示三个

算例的 Π_{Buoy} 始终大于0.不同 Ra 下的浮力通量曲线具有相同的变化规律.在区间 $kR \leq 5$ 中, Π_{Buoy} 随着波数增加保持稳定.在 $kR \geq 10$ 的条件下,浮力通量随着波数的增加而增加,达到最大值之后又快速减小. Π_{Buoy} 的上升暗示一个在较小尺度上存在局部的湍动能注入,而这个湍动能注入来源是动能能量逆级串:小尺度涡向大尺度涡注入了湍动能.随着 Ra 的增加, Π_{Buoy} 显著减小.由于 Ra 的增加会使得羽流的尺寸快速减小,而且小尺寸的热羽流受到的浮力更小,于是浮力通量在整个波数范围上都减小了.

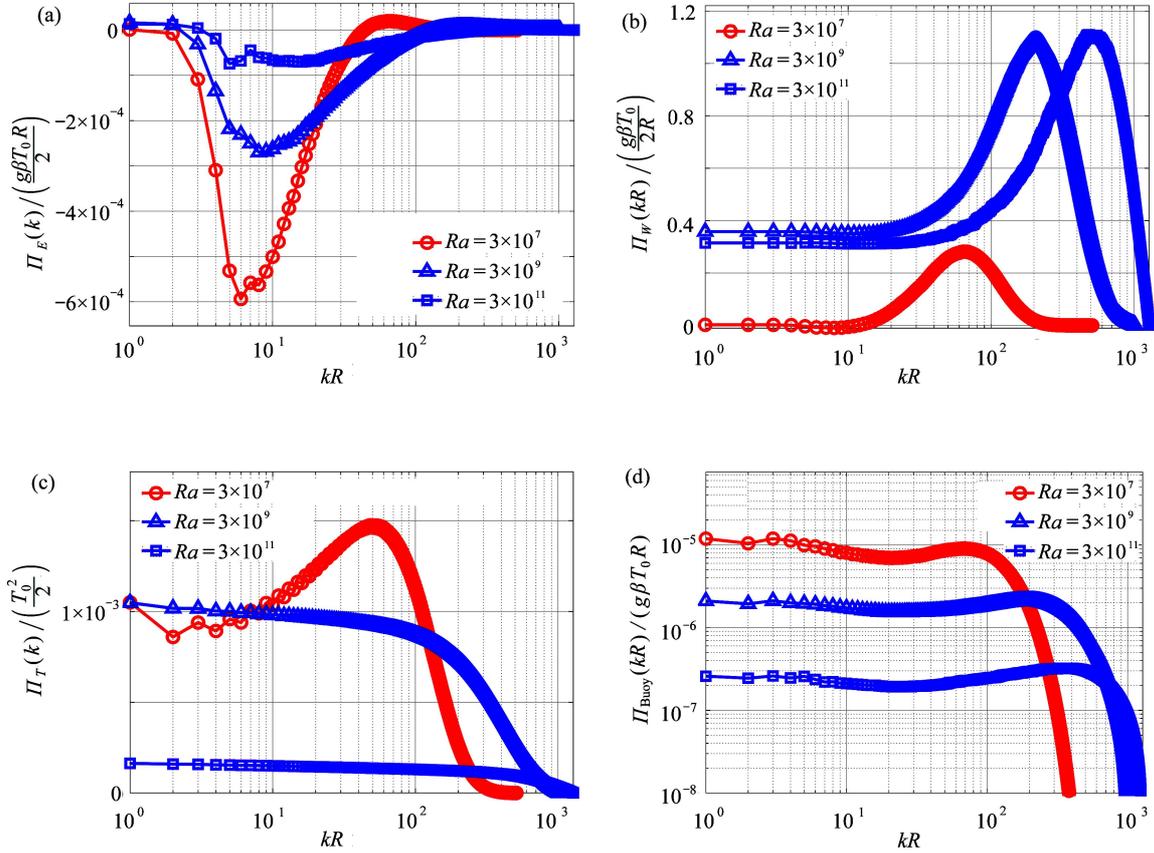


图7 肥皂泡上的动能通量、拟涡能通量、拟热能通量和浮力的通量: (a) 动能; (b) 拟涡能; (c) 拟热能; (d) 浮力

Fig. 7 The fluxes of kinetic energy, enstrophy, entropy and buoyancy on the soap bubble: (a) the kinetic energy; (b) the enstrophy; (c) the entropy; (d) the buoyancy

3.3 结构函数

Kolmogorov 在 1941 年提出各向同性均匀湍流假设,并使用结构函数来描述不同尺度涡之间的能量交换.结构函数被定义在物理空间中,更加直观地揭示出流场脉动的特点,并且能够给出更高阶的流场信息. n 阶速度结构函数的定义如下:

$$S_n^u \equiv \left\langle \left(\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \cdot \mathbf{d}}{d} \right)^n \right\rangle, \tag{74}$$

\mathbf{x} 是空间中一点的位置矢量,而 \mathbf{d} 为距离矢量, $d = |\mathbf{d}|$, n 为正整数, $\langle \cdot \rangle$ 算符代表系综平均.按照同样的方法,可以定义 n 阶温度结构函数:

$$S_n^T \equiv \langle |T(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t) - T(\mathbf{x}, t)|^n \rangle. \tag{75}$$

在各向同性湍流的假设条件下, S_n^u 和 S_n^T 仅依赖于 d .而本文研究对象是肥皂泡上充分发展的湍流,此时肥皂泡进入统计稳态.这里通过对空间位置 \mathbf{x} 与时间 t 进行平均来求得统计规律:

$$S_n^u(d) = \left\langle \left(\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \cdot \mathbf{d}}{d} \right)^n \right\rangle_{\mathbf{x}, t}, \tag{76}$$

$$S_n^T(d) = \langle |T(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t_j) - T(\mathbf{x}, t_j)|^n \rangle_{\mathbf{x}, t}, \tag{77}$$

其中, 对于任意时空函数 $f(\mathbf{x}, t)$ 定义为

$$\langle f \rangle_{\mathbf{x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i), \tag{78}$$

$$\langle f \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i). \tag{79}$$

在式(76)与(77)中, \mathbf{d} 可以为任意方向, 但必须保证 $d = |\mathbf{d}|$. 结构化网格 $(\hat{\theta}_c, \hat{\phi}_d)$ 是地理坐标系中对肥皂泡划分节点数, 其中 $c = 0, 1, 2, \dots, M_c, d = 0, 1, 2, \dots, M_d$. 坐标 $\hat{\theta}_c$ 和 $\hat{\phi}_d$ 的计算公式分别为

$$\hat{\theta}_c = \frac{\pi}{2} \frac{c}{M_c}, \tag{80}$$

$$\hat{\phi}_d = 2\pi \frac{d}{M_d}. \tag{81}$$

在计算结构函数时, 网格 $(\hat{\theta}_c, \hat{\phi}_d)$ 中的全部节点都被用于计算空间平均. 这里有两种方式选取 \mathbf{d} 的方向: \mathbf{d} 使 $\mathbf{x} + \mathbf{d}$ 与 \mathbf{x} 点处于同一纬度或者同一经度. 两种方式选取的 \mathbf{d} 如图 8 所示, P_1 的位矢为 $\mathbf{x} = (\hat{\theta}_c, \hat{\phi}_d)$, P_2 的位矢为 $\mathbf{x} + \mathbf{d} = (\hat{\theta}_{P_2}, \hat{\phi}_{P_2})$.

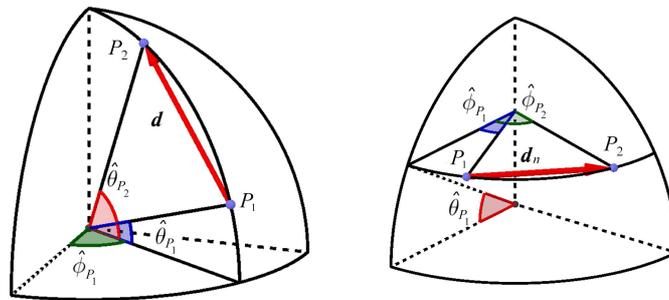


图 8 结构函数计算方法

Fig. 8 The scheme of the distance for calculating the structure function

当 P_2 与 P_1 处于相同经度时, P_2 的地理坐标可以如下计算:

$$\hat{\theta}_{P_2} = \hat{\theta}_c + \arccos\left(\frac{2(R \cos \hat{\theta}_c)^2 - d^2}{2(R \cos \hat{\theta}_c)^2}\right), \tag{82}$$

$$\hat{\phi}_{P_2} = \hat{\phi}_d. \tag{83}$$

此时, 结构函数反映的是纬度方向上流场量的变化, 定义为纬度结构函数.

而当 P_2 和 P_1 处于相同纬度时, P_2 的地理坐标则如下计算:

$$\hat{\theta}_{P_2} = \hat{\theta}_c, \tag{84}$$

$$\hat{\phi}_{P_2} = \hat{\phi}_d + \arccos\left(\frac{2R^2 - d^2}{2R^2}\right). \tag{85}$$

此时, 结构函数反映的是经度方向上流场量的变化, 是经度结构函数.

在考虑了浮力的作用之后得到的 Bo59 标度律中, 二维湍流的温度与速度结构函数具有以下标度规律^[26]:

$$S_n^u \sim d^{3n/5}, \tag{86}$$

$$S_n^T \sim d^{n/5}. \tag{87}$$

由于温度场与速度场的具有连续性, 当 d 足够小时, 温度与速度结构函数的标度系数退化为 n 以满足 Taylor 展开特性. 在计算结构函数时, 需要对物理量的差值进行时间, 经度和纬度上的平均. 所有达到统计平衡态之后的时间步都在时间平均的范围内, 而经度平均的范围在 $0^\circ \leq \phi^* \leq 360^\circ$. 为了能在消除边界层的影响同时保证计算的准确性, 纬度平均的范围被限制在 $10^\circ \leq \theta^* \leq 90^\circ$. 图 9 显示了纬度与经度方向上的从 2 到 9 阶结构函数, 其

中纬度方向上的结构函数在左边, 经度方向上的结构函数在右边. 将纬度方向上的温度或速度结构函数与经度方向上的结构函数相对比, 可以发现两者的标度规律非常接近, 但是数值有一些微小的差别. 这与Bo59标度律成立的前提条件相符合: 速度或温度的差值仅与两点之间的距离相关, 与方向无关.

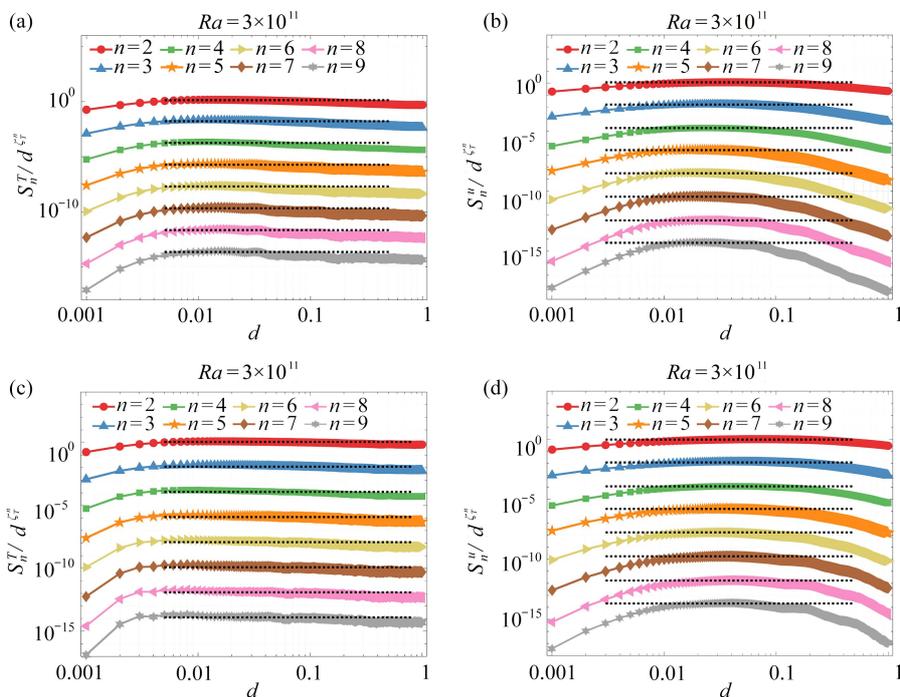


图9 纬度与经度方向上2到9阶的温度和速度结构函数: (a) 纬度方向上的温度结构函数; (b) 纬度方向上的速度结构函数; (c) 经度方向上的温度结构函数; (d) 经度方向上的速度结构函数

Fig. 9 The temperature and velocity structure functions in the latitude and longitude directions, $n=2\sim 9$: (a) the temperature structure functions in the latitude direction; (b) the velocity structure functions in the latitude direction; (c) the temperature structure functions in the longitude direction; (d) the velocity structure functions in the longitude direction

从图9可以观察到, 速度结构函数在 $d/R \leq O(0.01)$ 的范围内, 标度系数为 n . 而在 $0.01 \leq d/R \leq 0.1$ 的区间中, Bo59标度律较好地描述了速度结构函数的标度特征. 在阶数 n 逐渐增加的情况下, 速度结构函数始终能在同一区间内较好地满足Bo59标度律, 但受到湍流间歇的影响, 其指数在高阶时并非线性增加.

另一方面, 观察温度结构函数曲线上可以发现, 温度结构函数在 $d/R \leq O(0.01)$ 的区间内满足 $S_n^T \sim (d/R)^n$, 而在 $0.01 \leq d/R \leq 0.1$ 的区间内较好地符合Bo59标度律. 由于排除了边界层的影响, 结构函数得到的结果与波数谱不同.

4 结论与展望

本文介绍了底部加热的半个肥皂泡这一新的准二维湍流, 同时详细介绍了其DNS方法. 计算中针对肥皂泡二维球面的曲面几何特点, 借助球极投影, 将物理空间的控制方程转换到投影坐标系中, 降低了离散化控制方程的难度. 此后还介绍了球面上利用球谐分解计算波数谱与通量, 以及计算结构函数的分析方法. 最后, 针对 $Ra = 3 \times 10^7$, $Ra = 3 \times 10^9$, $Ra = 3 \times 10^{11}$ 三个算例, 本文计算了动能和拟热能的波数谱, 以及动能、拟热能、拟涡能和浮力的通量. 另外也计算了 $Ra = 3 \times 10^{11}$ 算例的温度与速度结构函数. 不同 Ra 的结果都表明了肥皂泡上存在二维湍流中双级串的现象. 湍流动能波数谱较好地满足了Bo59标度律的理论预示, 但拟热能由于主要受边界的影响较大, 其波数谱中没有观察到足Bo59标度律. 但通过湍流结构函数, 在去除了赤道边界的高温边界层影响后, 无论速度还是温度结构函数, 都在一定范围较好地符合Bo59的理论预示. 未来可进一步通过增加Rayleigh数范围, 研究Rayleigh数与能量注入尺度以及不同维度上浮力作用间的联系.

参考文献(References):

- [1] LOHSE D, XIA K Q. Small-scale properties of turbulent Rayleigh-Bénard convection[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2010, **42**: 335-364.
- [2] 彭世彬, 郭瑞, 冯上升, 等. 主动冷却点阵夹层隔热结构温度响应计算模型[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(5): 477-489. (PENG Shibin, GUO Rui, FENG Shangsheng, et al. A calculation model for temperature responses of active cooling lattice sandwich structures for thermal protection[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(5): 477-489.(in Chinese))
- [3] BOFFETTA G, ECKE R E. Two-dimensional turbulence[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2012, **44**: 427-451.
- [4] 宁利中, 张迪, 宁碧波, 等. 侧向局部加热对流的周期性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 125-133. (NING Lizhong, ZHANG Di, NING Bibo, et al. Periodicity of convection under lateral local heating[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 125-133.(in Chinese))
- [5] 宁利中, 张珂, 宁碧波, 等. 侧向加热腔体中的多圈型对流斑图[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(3): 250-259. (NING Lizhong, ZHANG Ke, NING Bibo, et al. Multi-roll type convection patterns in cavities heated laterally[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(3): 250-259.(in Chinese))
- [6] 宁利中, 宁碧波, 胡彪, 等. 具有水平流动的对流斑图成长和动力学特性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(10): 1146-1156. (NING Lizhong, NING Bibo, HU Biao, et al. Growth and dynamics of convection patterns with horizontal flow[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(10): 1146-1156.(in Chinese))
- [7] KRAICHNAN R H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 1967, **10**(7): 1417-1423.
- [8] LEITH C E. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence[J]. *The Physics of Fluids*, 1968, **11**(3). DOI: [10.1063/1.1691968](https://doi.org/10.1063/1.1691968).
- [9] BATCHELOR G K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 1969, **12**(11): 233.
- [10] 施惟慧, 沈春, 王曰朋. 大气运动基本方程组的解析解[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(3): 349-358. (SHI Weihui, SHEN Chun, WANG Yuepeng. Analytical solution of the basic equations set of atmospheric motion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(3): 349-358.(in Chinese))
- [11] 郭连红, 李云飞. 大尺度湿大气原始方程组对边界参数的连续依赖性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(9): 1036-1047. (GUO Lianhong, LI Yuanfei. Continuous dependence on boundary parameters of the original equations for large scale wet atmosphere[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(9): 1036-1047.(in Chinese))
- [12] KELLAY H, GOLDBURG W I. Two-dimensional turbulence: a review of some recent experiments[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2002, **65**(5): 845-894.
- [13] KELLAY H. Hydrodynamics experiments with soap films and soap bubbles: a short review of recent experiments[J]. *Physics of Fluids*, 2017, **29**(11): 111113.
- [14] SEYCHELLES F, AMAROUCHENE Y, BESSAFI M, et al. Thermal convection and emergence of isolated vortices in soap bubbles[J]. *Physics Review Letter*, 2008, **100**(14): 144501.
- [15] MEUEL T, XIONG Y L, FISCHER P, et al. Intensity of vortices: from soap bubbles to hurricanes[J]. *Scientific Report*, 2013, **3**: 3455.
- [16] SEYCHELLES F, INGREMEAU F, PRADERE C, et al. From intermittent to nonintermittent behavior in two dimensional thermal convection in a soap bubble[J]. *Physics Review Letter*, 2010, **105**(26): 264502.
- [17] MEUEL T, PRADO G, SEYCHELLES F, et al. Hurricane track forecast cones from fluctuations[J]. *Scientific Report*, 2012, **2**: 446.
- [18] MEUEL T, COUDERT M, FISCHER P, et al. Effects of rotation on temperature fluctuations in turbulent thermal convection on a hemisphere[J]. *Scientific Report*, 2018, **8**: 16513.
- [19] BRUNEAU C H, FISCHER P, XIONG Y L, et al. Numerical simulations of thermal convection on a hemisphere[J]. *Physical Review Fluids*, 2018, **3**: 043502.
- [20] XIONG Y L, FISCHER P, BRUNEAU C H. Numerical simulations of two-dimensional turbulent thermal convec-

- tion on the surface of a soap bubble[C]//*Proceedings of the 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics*. 2012: ICCFD7-3703.
- [21] HE X Q, BRAGG A D, XIONG Y L, et al. Turbulence and heat transfer on a rotating, heated half soap bubble[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, **924**: A19.
- [22] STEVENS J A M R, CLERCX J H H, LOHSE D. Heat transport and flow structure in rotating Rayleigh-Bénard convection[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **40**: 41-49.
- [23] 许丁, 陈刚, 王娴, 等. 基于多GPU的格子Boltzmann法对槽道湍流的直接数值模拟[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(9): 956-964. (XU Ding, CHEN Gang, WANG Xian, et al. Direct numerical simulation of the wall-bounded turbulent flow by lattice Boltzmann method based on multi-GPU[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(9): 956-964.(in Chinese))
- [24] 沈露予, 陆昌根, 朱晓清. 自由来流湍流与三维壁面局部粗糙诱导平板边界层不稳定T-S波的数值研究[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(11): 1208-1221. (SHEN Luyu, LU Changgen, ZHU Xiaoqing. Numerical study of unstable T-S waves excited by interaction between free-stream turbulence and 3D localized wall roughness in flat-plate boundary layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1208-1221.(in Chinese))
- [25] 魏剑英, 葛永斌. 一种求解三维非稳态对流扩散反应方程的高精度有限差分格式[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(2): 187-197. (WEI Jianying, GE Yongbin. A high-order finite difference scheme for 3D unsteady convection diffusion reaction equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 187-197.(in Chinese))
- [26] BOFFETTA G, MAZZINO A. Incompressible Rayleigh-Taylor turbulence[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2017, **49**: 119-143.