

KdV-Burgers 方程的一类新本性并行差分格式*

潘悦悦¹, 杨晓忠²

(1. 华北电力大学 控制与计算机工程学院, 北京 102206;
2. 华北电力大学 数理学院 信息与计算研究所, 北京 102206)

摘要: KdV-Burgers 方程作为湍流规范方程, 具有深刻的物理背景, 其快速数值解法具有重要的实际应用价值. 针对 KdV-Burgers 方程, 提出了一种新型的并行差分格式. 基于交替分段技术, 结合经典 Crank-Nicolson (C-N) 格式、显格式和隐格式, 构造了混合交替分段 Crank-Nicolson (MASC-N) 差分格式. 理论分析表明 MASC-N 格式是唯一可解、线性绝对稳定和二阶收敛的. 数值试验表明, MASC-N 格式比 C-N 格式具有更高的精度和效率. 与 ASE-I 和 ASC-N 差分格式相比, MASC-N 并行差分格式有最好的性能. 表明该文的 MASC-N 并行差分方法能有效地求解 KdV-Burgers 方程.

关键词: KdV-Burgers 方程; MASC-N 并行差分格式; 线性绝对稳定性; 收敛性; 数值试验
中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430128

A New Class of Difference Schemes With Intrinsic Parallelism for the KdV-Burgers Equation

PAN Yueyue¹, YANG Xiaozhong²

(1. *School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, P.R.China;*
2. *Institute of Information and Computing, School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P.R.China*)

Abstract: The KdV-Burgers equation as a standard equation for turbulent, has a profound physical background and its fast numerical methods are of great practical application value. A new class of parallel difference schemes were proposed for the KdV-Burgers equation. Based on the alternating segment technology, the mixed alternating segment Crank-Nicolson (MASC-N) difference scheme was constructed with the classic Crank-Nicolson (C-N) scheme, the explicit and implicit schemes. The theoretical analyses indicate that, the MASC-N scheme is uniquely solvable, linearly absolutely stable and 2nd-order convergent. Numerical experiments show that, the MASC-N scheme has higher precision and efficiency than the C-N scheme. Compared with the ASE-I and ASC-N difference schemes, the MASC-N parallel difference scheme has the best performance, and can effectively solve the KdV-Burgers equation.

Key words: KdV-Burgers equation; MASC-N parallel difference scheme; linear absolute stability; convergence; numerical experiment

* 收稿日期: 2022-04-11; 修订日期: 2022-06-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(11371135)

作者简介: 潘悦悦(1995—), 女, 博士生 (E-mail: panyueyue@ncepu.edu.cn);

杨晓忠(1965—), 男, 教授, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: yxiaoZh@ncepu.edu.cn).

引用格式: 潘悦悦, 杨晓忠. KdV-Burgers 方程的一类新本性并行差分格式[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 583-594.

0 引言

KdV-Burgers 方程是一种带阻尼的 KdV 方程模型,也是一个典型的非线性波动方程.其一方面,可以描述同时含有色散、非线性水平对流、黏性流体的浅水长波的传播过程^[1-2];另一方面,可以用来描述同时含有色散和耗散的等离子物理中的一些重要物理现象^[3-5].KdV-Burgers 方程求解的快速算法一直是计算数学研究的热点问题,其高效数值解法具有重要的科学意义和应用价值.

随着越来越多大规模科学计算问题的出现,人们开始对串行计算程序的合理化和并行化进行深入研究.近年来的大多数并行差分方法是条件稳定的,或者是无条件稳定但精度只有一阶.为了得到稳定性条件更宽松、计算精度更高的并行方法,实现串行差分方法的合理并行化,一种新的高效并行方法是必不可少的.针对抛物型方程,Evans 和 Abdullah^[6]提出了分组显式(group explicit, GE)的思想,设计出交替分组显式(AGE)差分格式.通过计算网格区域中的两个相邻点,将得到的隐式方程转化为显式方程.交替使用这种方法,截断误差项可以部分抵消,从而提高了算法的精度.

隐格式具有良好的稳定性,但不适合并行计算.受到构造 AGE 方法的启示,张宝琳等^[7]提出了用 Saul'yev 非对称格式构造分段隐式的思想,并且恰当地使用交替技术建立了多种交替分段显-隐式(ASE-I)和交替分段 Crank-Nicolson(ASC-N)并行方法,得到了稳定性和并行性兼顾的研究成果.周毓麟院士^[8]将最一般的抛物型方程的显隐混合格式称之为具有并行本性的差分格式,对其差分解的存在性、唯一性、收敛性和稳定性等理论问题进行了研究,建立了抛物方程并行本性差分方法的基本理论.现在,并行本性差分方法已经推广到很多发展方程的数值求解中^[9-10].

王文治^[11]使用一组非对称格式构造了具有本性并行的 ASC-N 差分格式,求解了 KdV 方程,给出了线性绝对稳定性的理论分析.Yuan 等^[12]针对非线性抛物型方程组提出了一类无条件稳定,空间二阶精度的并行差分格式.Borhanifar 和 Abazari^[13]应用无条件稳定的差分格式求解了电报方程.数值算例表明了新方法的稳定性和准确性.针对四阶抛物型方程,Guo 和 Liu^[14]给出了经典的显式、隐式和 C-N 格式,主要分析了格式的无条件稳定性.Namjoo 等^[15]提出了广义 Burgers-Fisher 方程的 3 种格式:两种精确有限差分格式和一种非标准有限差分格式.通过误差分析,验证了该格式的精确性和有效性.Xue 和 Feng^[16]建立了求解抛物型方程的有效算法.在第 n 层使用两种区域分解法,两种方法的解取平均值,得到第 $n + 1$ 层的解.该方法保持了并行性和稳定性.并行本性方法既适用于并行计算,又是无条件稳定或线性稳定的.然而,这些方法误差稍大,精度较低^[17-18].

受到上述差分方法的启发,本文结合经典的显式、隐式和 C-N 格式,提出了一种求解 KdV-Burgers 方程的新并行差分方法.MASC-N 方法具有更精确的结果和更宽松的稳定性条件.理论分析和数值算例表明,MASC-N 格式线性绝对稳定,收敛阶为二阶.本文格式的计算效率远高于 C-N 格式的计算效率,新方法对于求解 KdV-Burgers 方程是高效合理的.

1 KdV-Burgers 方程的混合交替分段 C-N 差分格式

1.1 KdV-Burgers 方程

KdV-Burgers 方程的一般形式为^[1-2]

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xx} + \varepsilon u_{xxx} = 0, \quad L_1 < x < L_2, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

其中 $\alpha > 0, \beta < 0, \varepsilon > 0$.初始条件和边界条件为

$$u(x, 0) = f(x), \quad L_1 \leq x \leq L_2, \quad (2)$$

$$u(L_1, t) = g_1(t), \quad u(L_2, t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

其中 L_1, L_2 都是适当大的数.

1.2 MASC-N 并行差分格式的构造

计算区域是 $[L_1, L_2] \times [0, T]$, h 和 τ 分别表示空间和时间步长.令 $x_0 = L_1, h = (L_2 - L_1)/M$, 其中 M 是正整数.记 $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, M), t_n = n\tau (n = 0, 1, 2, \dots, N)$.令 u_i^n 为格式解, $u(x_i, t_n)$ 为精确解.为了构

造 MASC-N 差分格式,令

$$u_{xx} = \frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2}, u_{xxx} = \frac{u_{i-2}^n - 2u_{i-1}^n + 2u_{i+1}^n - u_{i+2}^n}{2h^3}.$$

以下是方程(1)的显格式、隐格式和 C-N 格式:

$$u_i^{n+1} = ru_{i-2}^n + Au_{i-1}^n + (1 + 2c)u_i^n + Bu_{i+1}^n - ru_{i+2}^n, \tag{4}$$

$$-ru_{i-2}^{n+1} - Au_{i-1}^{n+1} + (1 - 2c)u_i^{n+1} - Bu_{i+1}^{n+1} + ru_{i+2}^{n+1} = u_i^n, \tag{5}$$

$$-\frac{r}{2}u_{i-2}^{n+1} - \frac{A}{2}u_{i-1}^{n+1} + (1 - c)u_i^{n+1} - \frac{B}{2}u_{i+1}^{n+1} + \frac{r}{2}u_{i+2}^{n+1} = \frac{r}{2}u_{i-2}^n + \frac{A}{2}u_{i-1}^n + (1 + c)u_i^n + \frac{B}{2}u_{i+1}^n - \frac{r}{2}u_{i+2}^n, \tag{6}$$

其中

$$r = \frac{\varepsilon\tau}{2h^3}, A = \bar{r}_i - c - 2r, B = -\bar{r}_i - c + 2r, \bar{r}_i = \alpha a_i^n \frac{\tau}{2h}, a_i^n = \frac{1}{4}(u_{i-1}^n + 2u_i^n + u_{i+1}^n), c = \beta \frac{\tau}{h^2}.$$

现在讨论 KdV-Burgers 方程的交替分段并行差分格式,本文的 MASC-N 格式(图 1)将结合以上几种差分格式使用.

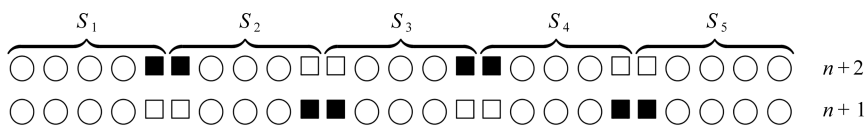


图 1 MASC-N 格式构造示意图

Fig. 1 Structural schematic diagram of the MASC-N scheme

设 $M = Jl$ ($J \geq 3$ 和 $l \geq 3$ 是正整数,且 J 是奇数),每一时间层上的值分为 J 段,按顺序记为 S_1, S_2, \dots, S_J .为叙述方便,取 $M = 25, J = 5, l = 5$. S_1 和 S_5 分别有一个内边界点和四个内点; S_2, S_3, S_4 分别有两个内边界点和三个内点. n 是偶数,数值解 u_i^n 为已知,现计算 u_i^{n+1} . $n + 1$ 时间层上,在点 x_i ($i = 5, 6, 15, 16$) 处使用古典显格式(4),在点 x_i ($i = 10, 11, 20, 21$) 处使用古典隐格式(5),其余各点处使用经典 C-N 格式(6).在 $n + 2$ 时间层上,将 $n + 1$ 时间层显格式(4)的位置变为隐格式(5),隐格式(5)的位置变为显格式(4),其余各点仍使用经典 C-N 格式(6).因为靠近边界点的值与边界点大致相同,令 $u_1^{k'} = u_0^{k'}, u_{M-1}^{k'} = u_M^{k'} (k' = 0, 1, 2, \dots)$.交替使用这些格式,可以得到 MASC-N 格式,具体见图 1,图中的 \square 代表式(4), \blacksquare 代表式(5), \circ 代表式(6),其矩阵形式为

$$\begin{cases} (I + A_1 G)U^{n+1} = (I - A_2 G)U^n + F_1, \\ (I + A_2 G)U^{n+2} = (I - A_1 G)U^{n+1} + F_2, \end{cases} \tag{7}$$

式中

$$U^n = (u_2^n, u_3^n, \dots, u_{M-3}^n, u_{M-2}^n)^T,$$

$$F_1 = \left(\frac{r}{2}(u_0^n + u_0^{n+1}) + \frac{A}{2}(u_1^n + u_1^{n+1}), \frac{r}{2}(u_1^n + u_1^{n+1}), 0, \dots, 0, -\frac{r}{2}(u_{M-1}^n + u_{M-1}^{n+1}), \frac{B}{2}(u_{M-1}^n + u_{M-1}^{n+1}) - \frac{r}{2}(u_M^n + u_M^{n+1}) \right)^T,$$

$$F_2 = \left(\frac{r}{2}(u_0^{n+1} + u_0^{n+2}) + \frac{A}{2}(u_1^{n+1} + u_1^{n+2}), \frac{r}{2}(u_1^{n+1} + u_1^{n+2}), 0, \dots, 0, -\frac{r}{2}(u_{M-1}^{n+1} + u_{M-1}^{n+2}), \frac{B}{2}(u_{M-1}^{n+1} + u_{M-1}^{n+2}) - \frac{r}{2}(u_M^{n+1} + u_M^{n+2}) \right)^T,$$

U^n, F_1, F_2 是 $M - 3$ 维向量, I 是 $M - 3$ 阶单位矩阵, A_1 和 A_2 均是 $M - 3$ 阶对角矩阵,且满足 $A_1 + A_2 = I, A_1 = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{M-4}, \theta_{M-3})$,

$\|I - A_2G\|_2$, 因为不等式 $\|I - A_2G\|_\infty \leq 1 + 2\bar{r}_i - 4c + 6r$, $\|I - A_2G\|_1 \leq 1 + 2\bar{r}_i - 4c + 6r, c < 0$. 因此 $\|I - A_2G\|_2 \leq \sqrt{\|I - A_2G\|_\infty \|I - A_2G\|_1} \leq C, C = 1 + 2\bar{r}_i - 4c + 6r$. 可以得到 $\|\hat{G}^n\|_2 \leq C$. 定理得证.

定理 2 KdV-Burgers 方程的 MASC-N 格式(7)是线性绝对稳定的.

2.3 MASC-N 格式的收敛性

古典显格式为

$$u_i^{n+1} = ru_{i-2}^n + Au_{i-1}^n + (1 + 2c)u_i^n + Bu_{i+1}^n - ru_{i+2}^n.$$

古典隐格式为

$$-ru_{i-2}^{n+2} - Au_{i-1}^{n+2} + (1 - 2c)u_i^{n+2} - Bu_{i+1}^{n+2} + ru_{i+2}^{n+2} = u_i^{n+1}.$$

将以上两格式中的各点分别在点 u_i^{n+1} 处做 Taylor 级数展开, 记截断误差分别为 $T_1(\tau, h), T_2(\tau, h)$, 则

$$\begin{aligned} T_1(\tau, h) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) + \\ &\alpha a_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{h^2 \tau}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right) + \\ &\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \\ &\varepsilon \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right) + O(h^a \tau^b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(\tau, h) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) + \\ &\alpha a_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{h^2 \tau}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right) + \\ &\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \\ &\varepsilon \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right) + O(h^a \tau^b), \end{aligned}$$

其中 $O(h^a \tau^b) = O(\tau + h^2 \tau + h^2)$. 由于方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha a_i^n \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} T_1(\tau, h) &= \left(-\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) + \\ &\alpha a_i^n \left(-\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{h^2 \tau}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right) + \\ &\beta \left(-\tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \varepsilon \left(-\tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right) + O(h^a \tau^b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(\tau, h) &= \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) + \\ &\alpha a_i^n \left(\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{h^2 \tau}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right) + \\ &\beta \left(\tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \varepsilon \left(\tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right) + O(h^a \tau^b). \end{aligned}$$

由图 1 可知, 在每段的“内点”使用 C-N 格式, 其计算精度为二阶. 在每段的“内边界点”使用古典显式和古典隐式, 计算精度为 $O(\tau + h^2 \tau + h^2)$. 在 $T_1(\tau, h)$ 和 $T_2(\tau, h)$ 的表达式中, 分别包含了绝对值相同但符号相反的项. 古典显式和古典隐式在每一时间层交替使用, 部分项将相互抵消. 因此, MASC-N 格式的计算精度

近似为二阶.

定理 3 KdV-Burgers 方程的 MASC-N 格式(7)的计算精度为 $O(h^2 + \tau^2)$, 内边界点的计算精度为 $O(\tau + h^2\tau + h^2)$.

定义 MASC-N 格式在 (x_i, t_n) 的截断误差是 R_i^n . 存在正数 C' , 有 $|R_i^n| \leq C'(\tau^2 + h^2)$. 假设在点 (x_i, t_n) , $u(x_i, t_n)$ 是式(1)的解析解. 定义 $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$, $\mathbf{e}^n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{M-3}^n)^T$. 将 e_i^n 代入 MASC-N 格式, $\mathbf{A}_1 \mathbf{G} = \mathbf{G}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{G} = \mathbf{G}_2$, 得到

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1) \mathbf{e}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_2) \mathbf{e}^n + \mathbf{R}^{n+1}, \\ (\mathbf{I} + \mathbf{G}_2) \mathbf{e}^{n+2} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1) \mathbf{e}^{n+1} + \mathbf{R}^{n+2}. \end{cases}$$

显然 $\mathbf{e}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{R}^n = O(\tau^2 + h^2)$. 当 $n=1, (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1) \mathbf{e}^1 = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_2) \mathbf{e}^0 + \mathbf{R}^1$. 两边取范数, 得到 $\|\mathbf{e}^1\| \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{R}^1\| \leq \|\mathbf{R}^1\| \leq C'_1(\tau^2 + h^2)$. 当 $n=2, \mathbf{e}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1) \mathbf{e}^1 + (\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{R}^2$, $\|\mathbf{e}^2\| \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1}\| (\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_1\| + 1) \|\mathbf{R}^2\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\lambda}\right) \|\mathbf{R}^2\| \leq C'_2(\tau^2 + h^2)$. 由数学归纳法: 当 $n \leq k+1$ 时, $\|\mathbf{e}^n\| \leq C'_n(\tau^2 + h^2)$; 当 $n = k+2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{n+2}\| &\leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1)(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_2) \mathbf{e}^n\| + \\ &\quad \|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1)(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{R}^{n+1}\| + \|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{R}^{n+2}\| \leq \\ &\quad \left(\frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{1+\lambda}\right) \|\mathbf{R}^{n+2}\| \leq \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\lambda}\right) + \frac{1}{1+\lambda}\right) \|\mathbf{R}^{n+2}\| \leq \\ &\quad C'_{n+2}(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

因此存在正数 C' , $\|u(x_i, t_n) - u_i^n\| \leq C'(\tau^2 + h^2)$.

定理 4 KdV-Burgers 方程的 MASC-N 格式(7)是收敛的.

3 数值试验

为了验证理论分析, 给出数值算例证明 MASC-N 格式的计算精度、稳定性、收敛性和并行性. 同时给出 MASC-N 格式与 ASE-I 格式和 ASC-N 格式的比较试验、MASC-N 格式扩展到 mKdV-Burgers 方程的数值试验.

例 1 令 $\varepsilon = 1, \gamma = 1, \mu = 1$, 考虑以下 KdV-Burgers 方程^[20-21]:

$$u_t + \varepsilon uu_x - \gamma u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0, \quad -50 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 1. \quad (10)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = \frac{-6\gamma^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\gamma x}{10\mu}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma x}{10\mu}\right) \right];$$

边界条件为

$$\begin{aligned} u(-50, t) &= \frac{-6\gamma^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(-50 + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(-50 + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) \right], \\ u(50, t) &= \frac{-6\gamma^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(50 + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(50 + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) \right]; \end{aligned}$$

解析解为

$$u(x, t) = \frac{-6\gamma^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(x + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma}{10\mu} \left(x + \frac{6\gamma^2}{25\mu} t\right)\right) \right].$$

取时间层 $N = 500$, 空间层 $M = 500$, 图 2 和 3 分别给出了式(10)的孤立波解从时间 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的精确解和 MASC-N 格式解的波形图. 从图中可以看到, 数值结果稳定可靠, 保持了与精确解几乎完全一致的波形.

$u(x_i, t_n)$ 是解析解, u_i^n 是数值解. 定义绝对误差 $\Delta_{AE} = |u(x_i, t_n) - u_i^n|$. 表 1 给出了 C-N 和 MASC-N 格式解相对于解析解的绝对误差结果. 可以看到, 当 $M = 100, N = 100$ 时, 两种格式的绝对误差相似, 且两种差分格式绝对误差最大值的级数为 10^{-3} .

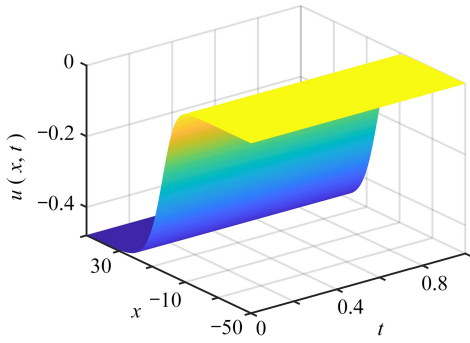


图 2 精确解的波形

Fig. 2 The waveform of the exact solution

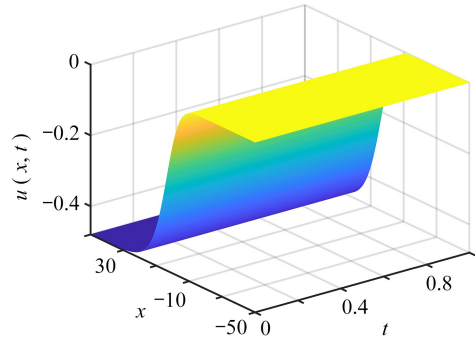


图 3 MASC-N 格式解的波形

Fig. 3 The waveform of the MASC-N scheme solution

表 1 两种格式解相对于解析解的绝对误差

Table 1 The absolute errors of the 2 scheme solutions relative to the analytic solution

(x, t)	analytic solution	C-N	Δ_{AE}	MASC-N	Δ_{AE}
$(-40, 0.1)$	-5.45×10^{-8}	-5.51×10^{-8}	5.60×10^{-10}	-5.50×10^{-8}	5.37×10^{-10}
$(-30, 0.2)$	-2.99×10^{-6}	-3.05×10^{-6}	6.16×10^{-8}	-3.05×10^{-6}	5.92×10^{-8}
$(-20, 0.3)$	-1.60×10^{-4}	-1.65×10^{-4}	4.88×10^{-6}	-1.64×10^{-4}	4.69×10^{-6}
$(-10, 0.4)$	-0.007 055	-0.007 304	0.000 250	-0.007 295	0.000 240
$(0, 0.5)$	-0.122 897	-0.124 388	0.001 491	-0.124 268	0.001 370
$(10, 0.6)$	-0.374 919	-0.373 647	0.001 272	-0.373 542	0.001 377
$(20, 0.7)$	-0.463 439	-0.462 955	0.000 484	-0.462 932	0.000 507
$(30, 0.8)$	-0.477 718	-0.477 634	8.40×10^{-5}	-0.477 630	8.78×10^{-5}
$(40, 0.9)$	-0.479 692	-0.479 679	1.30×10^{-5}	-0.479 678	1.36×10^{-5}

以下给出 C-N 格式和 MASC-N 格式收敛阶的数值试验.在点 (x_i, t_n) 处,定义误差 $E_\infty(h, \tau)$ 、空间收敛阶 S 和时间收敛阶 T ^[22-23]:

$$E_\infty(h, \tau) = \max | u(x_i, t_n) - u_i^n |,$$

$$S = \frac{\log_2(E_\infty(h_1, \tau)/E_\infty(h_2, \tau))}{\log_2(h_1/h_2)},$$

$$T = \frac{\log_2(E_\infty(h, \tau_1)/E_\infty(h, \tau_2))}{\log_2(\tau_1/\tau_2)}.$$

令 $M = 25, 50, 100, 200, 400, N = 500$ 和 $N = 100, 200, 400, 800, 1\ 600, M = 100$, 表 2 和 3 分别给出了 C-N 格式和 MASC-N 格式的空间和时间精度.由表中数据可知,两种格式的空间和时间精度为二阶.因此本文 MASC-N 格式和已有的 C-N 格式有相同的阶数,数值试验结果与理论分析相符.

表 2 两种格式的空间收敛阶

Table 2 The space-convergent orders of the 2 schemes

M	C-N		MASC-N	
	E_∞	S	E_∞	S
25	$6.572\ 000 \times 10^{-3}$	-	$7.528\ 900 \times 10^{-3}$	-
50	$1.751\ 500 \times 10^{-3}$	1.907 741	$1.783\ 904 \times 10^{-3}$	2.077 401
100	$4.411\ 802 \times 10^{-4}$	1.989 151	$4.416\ 614 \times 10^{-4}$	2.014 025
200	$1.085\ 822 \times 10^{-4}$	2.022 580	$1.066\ 623 \times 10^{-4}$	2.049 890
400	$2.678\ 405 \times 10^{-5}$	2.019 342	$2.538\ 697 \times 10^{-5}$	2.070 890

定义加速比 $S_p = T_1/T_p$ 和效率 $E_p = S_p/p$ ^[24], T_1 和 T_p 分别是 C-N 和 MASC-N 格式的运行时间, p 是处理器的数量.使用八核处理器,令 $N = 1\ 000, M = 600, 1\ 100, 1\ 600, 2\ 100, 2\ 600$, 计算结果见表 4.表 4 表明当 M 增加时,两种格式的运行时间都增加.但与 C-N 格式相比, MASC-N 格式的运行时间增加缓慢. S_p 和 E_p 都逐渐

增加.随着 M 的增大, MASC-N 格式的效率大幅度提高.当 $M > 600$ 后, MASC-N 格式的运行时间比 C-N 格式节约 56%.

表 3 两种格式的时间收敛阶

Table 3 The time-convergent orders of the 2 schemes

N	C-N		MASC-N	
	E_∞	T	E_∞	T
100	$2.741\ 022 \times 10^{-3}$	-	$2.741\ 022 \times 10^{-3}$	-
200	$6.699\ 166 \times 10^{-4}$	2.032 660	$6.697\ 803 \times 10^{-4}$	2.032 954
400	$1.644\ 313 \times 10^{-4}$	2.026 496	$1.644\ 313 \times 10^{-4}$	2.026 203
800	$4.214\ 523 \times 10^{-5}$	1.964 044	$4.214\ 494 \times 10^{-5}$	1.964 053
1 600	$1.028\ 303 \times 10^{-5}$	2.035 104	$1.028\ 305 \times 10^{-5}$	2.035 092

表 4 两种格式运行时间的比较

Table 4 Comparison of running time between the 2 schemes

M	600	1 100	1 600	2 100	2 600
C-N	0.662 88	2.026 66	4.271 80	7.667 68	12.347 7
MASC-N	0.334 65	0.993 64	1.929 38	3.283 17	5.250 76
S_p	1.980 82	2.039 63	2.214 08	2.335 45	2.351 60
E_p	0.247 60	0.254 95	0.276 76	0.291 93	0.293 95

图 4 给出了 C-N 和 MASC-N 格式的计算时间,可以看到 C-N 格式的计算时间迅速增加,变化率大.本文构造的 MASC-N 格式的计算时间更少,且变化率小.C-N 格式是串行格式,通过 LU 分解计算 5 对角方程.但使用 MASC-N 格式计算时,全局问题被分解成多个不相关的问题同步进行计算.程序循环有效地提高了计算效率,缩短了计算时间.从时间的角度来看, MASC-N 格式具有明显的优势.

图 5 给出了 MASC-N 格式在四核和八核 CPU 下的计算时间.可以看到随着空间网格数的增加,八核 CPU 的计算时间比四核 CPU 更少, MASC-N 格式并行性明显.

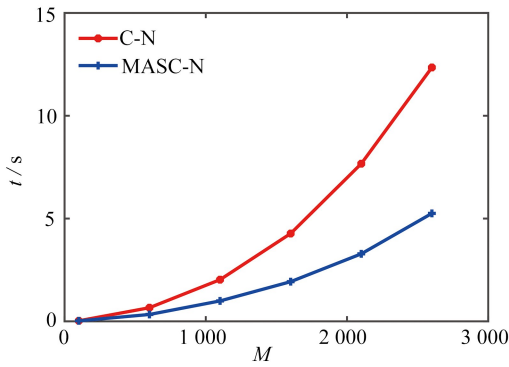


图 4 C-N 和 MASC-N 格式的计算时间

Fig. 4 The computing time of the C-N and MASC-N schemes

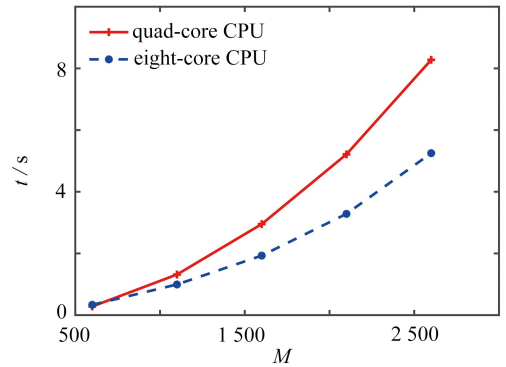


图 5 不同 CPU 核数的 MASC-N 格式计算时间

Fig. 5 The computing time of the MASC-N scheme with different numbers of CPU cores

为了验证 MASC-N 格式的稳定性 and 精度,给出随时间和空间变化的相对误差.定义时间层相对误差和 (the sum of relative error for every time level, SRET, Δ_{SRET}) 与误差能量 (difference total energy, DTE, Δ_{DTE}):

$$\Delta_{\text{SRET}}(n) = \sum_{i=1}^M \frac{|u_i^n - u(x_i, t_n)|}{u(x_i, t_n)}, \Delta_{\text{DTE}}(i) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (u_i^n - u(x_i, t_n))^2.$$

取 $N = 200, M = 200$,图 6 表明当 N 增加时,两种格式解的 Δ_{SRET} 迅速减小,且趋向于 0.因此, MASC-N 方法求解 KdV-Burgers 方程是计算稳定的.

取 $N = 500, M = 500$,从图 7 可以看出两种格式 Δ_{DTE} 的最大值是 5×10^{-3} .表明两种格式数值解与解析解非常接近,误差很小, MASC-N 方法有良好的计算精度.

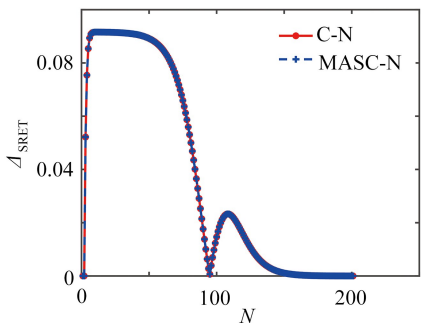


图 6 C-N 和 MASC-N 格式解的 SRET

Fig. 6 SRET of the C-N and MASC-N scheme solutions

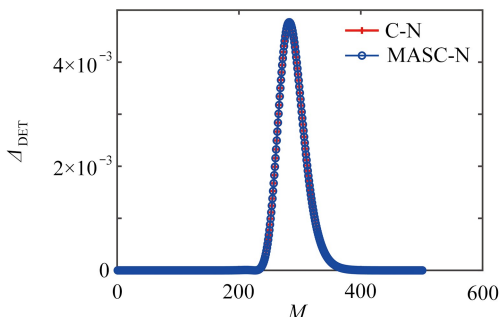


图 7 C-N 和 MASC-N 格式解的 DTE

Fig. 7 DTE of the C-N and MASC-N scheme solutions

例 2 令 $L = 100, T = 1$, 考虑以下 KdV-Burgers 方程^[25]:

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = 0. \tag{11}$$

初边界值由解析解给出, 解析解为

$$u(x, t) = \frac{-6}{25} \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{10}\left(x + \frac{6}{25}t\right)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{10}\left(x + \frac{6}{25}t\right)\right) \right].$$

比较 3 种并行格式的计算时间, 固定时间层 $N = 10\,000$, 计算结果见图 8 和表 5. ASE-N 格式有最长的运行时间. ASE-I 和 MASC-N 格式运行时间相似且 MASC-N 格式计算时间略短.

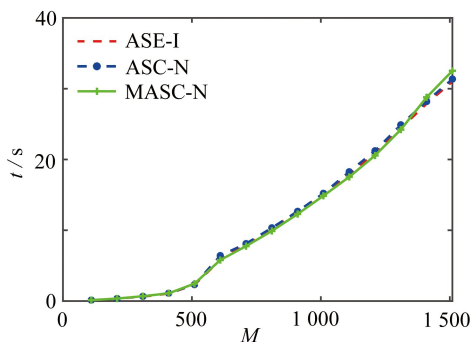


图 8 3 种并行格式计算时间比较

Fig. 8 Comparison on the computing time of the 3 parallel schemes

表 5 3 种并行格式的计算时间

Table 5 The computing time of the 3 parallel schemes

M	210	410	610	810	1 010	1 210	1 410
ASE-I ^[9]	0.342 03	1.052 26	5.801 74	10.160 8	15.065 7	20.828 3	27.885 5
ASC-N ^[11]	0.352 32	1.107 77	6.415 85	10.343 9	15.213 7	21.224 9	28.193 6
MASC-N	0.350 60	1.090 35	5.790 21	9.900 61	14.871 4	20.559 4	28.780 9

比较解析解和 ASE-I^[9]、ASC-N^[11]、MASC-N 格式解. 令 $N = 210, M = 210, t = 0.5$, 表 6 给出了计算结果. 表中数据表明 3 种格式的数值解相似, 且 MASC-N 格式解最接近解析解.

最后, 取计算精度的权重为 0.6, 计算时间的权重为 0.4. 根据计算精度和时间比较 3 种并行格式, 见表 7. 可以看到, MASC-N 格式的加权排序总和数最小, 可知其具有最好的性能和实用性.

例 3 令 $\beta = -1, \varepsilon = -1$, 考虑以下 mKdV-Burgers 方程^[26-27]:

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xx} + \varepsilon u_{xxx} = 0, \quad -50 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 1. \tag{12}$$

初边界值由解析解给出, 解析解为

$$u(x, t) = \frac{-\beta\sqrt{-6\varepsilon}}{6\varepsilon} \left[1 + \tanh\left(\frac{-\beta}{6\varepsilon}\left(x + \frac{2\beta^2}{9\varepsilon}t\right)\right) \right].$$

令 $N = 210, M = 210, t = 0.5$, 表 8 为 mKdV-Burgers 方程解析解和两种格式数值解的比较. 可以看出 C-N

格式解和 MASC-N 格式解几乎相同.图 9 和 10 分别是 C-N 和 MASC-N 格式的绝对误差,对比发现两种差分格式绝对误差最大值的级数为 10^{-2} .

表 6 数值解和解析解

Table 6 Numerical solutions and the analytic solution

x	analytic solution	ASE-I ^[9]	ASC-N ^[11]	MASC-N
-40	$-5.663 4 \times 10^{-8}$	$-5.584 7 \times 10^{-8}$	$-5.584 7 \times 10^{-8}$	$-5.585 8 \times 10^{-8}$
-30	$-3.078 6 \times 10^{-6}$	$-3.037 0 \times 10^{-6}$	$-3.035 4 \times 10^{-6}$	$-3.035 7 \times 10^{-6}$
-20	$-1.627 7 \times 10^{-4}$	$-1.603 2 \times 10^{-4}$	$-1.602 3 \times 10^{-4}$	$-1.602 4 \times 10^{-4}$
-10	-0.007 114 59	-0.006 941 26	-0.006 939 24	-0.006 939 28
0	-0.122 897 14	-0.118 473 11	-0.118 499 99	-0.118 499 94
10	-0.374 499 97	-0.369 167 25	-0.369 224 65	-0.369 224 71
20	-0.463 283 64	-0.462 168 85	-0.462 181 73	-0.462 181 91
30	-0.477 685 23	-0.477 524 56	-0.477 526 32	-0.477 526 41
40	-0.479 685 75	-0.479 663 82	-0.479 664 03	-0.479 664 07

表 7 3种并行格式的比较

Table 7 Comparison of the 3 parallel schemes

parallel schemes	precision sort	time sort	weighted sort sum (0.6 : 0.4)
ASE-I ^[9]	3	2	2.6
ASC-N ^[11]	2	3	2.4
MASC-N	1	1	1

表 8 数值解和解析解

Table 8 Numerical solutions and the analytic solution

x	analytic solution	C-N	Δ_{AE}	MASC-N	Δ_{AE}
-40	-0.816 495	-0.816 495	1.15×10^{-7}	-0.816 495	1.46×10^{-7}
-30	-0.816 461	-0.816 458	3.22×10^{-6}	-0.816 457	4.10×10^{-6}
-20	-0.815 496	-0.815 407	8.99×10^{-5}	-0.815 382	1.15×10^{-4}
-10	-0.789 361	-0.787 123	0.002 237	-0.786 488	0.002 873
0	-0.415 808	-0.409 564	0.006 244	-0.405 151	0.010 656
10	-0.029 148	-0.029 735	0.000 588	-0.029 105	4.25×10^{-5}
20	-0.001 077	-0.001 104	2.70×10^{-5}	-0.001 080	2.68×10^{-6}
30	-3.80×10^{-5}	-3.90×10^{-5}	9.73×10^{-7}	-3.90×10^{-5}	1.01×10^{-7}
40	-1.37×10^{-6}	-1.41×10^{-6}	3.47×10^{-8}	-1.38×10^{-6}	3.63×10^{-9}

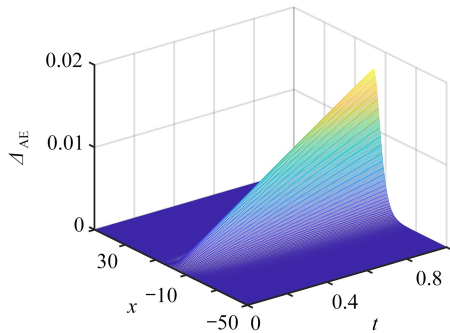


图 9 C-N 格式解的绝对误差

Fig. 9 The absolute error of the C-N scheme solution

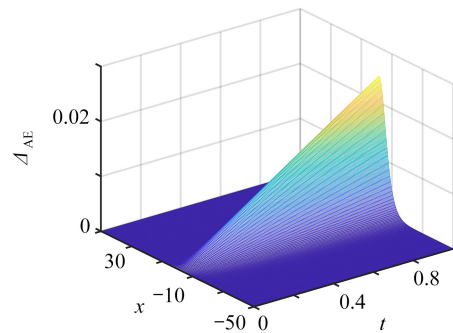


图 10 MASC-N 格式解的绝对误差

Fig. 10 The absolute error of the MASC-N scheme solution

令时间层 $N = 1\,000$, 图 11 是 C-N 和 MASC-N 格式的运行时间.可以看到 C-N 格式的运行时间远大于 MASC-N 格式的运行时间.与 C-N 格式相比, MASC-N 格式求解 mKdV-Burgers 方程更为高效.

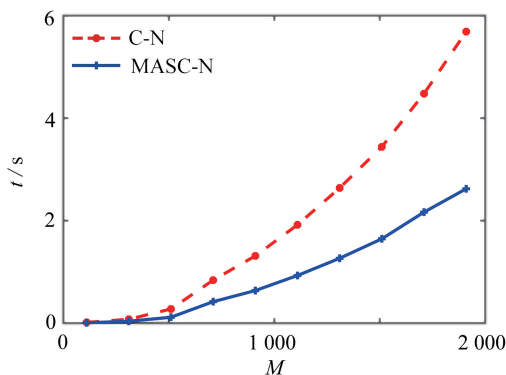


图 11 C-N 和 MASC-N 格式的运行时间

Fig. 11 The running time of the C-N and MASC-N schemes

4 结 论

KdV-Burgers 方程的 MASC-N 并行差分格式是线性绝对稳定的,格式解存在唯一,与 C-N 格式的收敛阶同为二阶.在保证计算精度的前提下,MASC-N 格式比 C-N 格式有更高的效率.与 ASE-I 和 ASC-N 格式相比,MASC-N 并行差分格式对求解 KdV-Burgers 方程有更好的性能.同时,将 MASC-N 并行差分格式扩展到求解 mKdV-Burgers 方程,本文的数值试验结果表明,MASC-N 格式的计算效率明显高于 C-N 格式的计算效率,MASC-N 格式求解各种类型的并行计算系统是有效的.

致谢 本文作者衷心感谢德国阿尔弗雷德韦格纳研究所 Sergey Danilov 教授和王强博士在写作过程中提出的宝贵建议和意见;同时衷心感谢华北电力大学国内外联合培养博士生项目(2020)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (LI Zhibin. *Traveling Wave Solutions of Nonlinear Mathematical Physical Equations*[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 程建春. 数学物理方程及其近似方法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2017. (CHENG Jianchun. *Mathematical Physics Equations and Theirs Approximate Methods*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2017. (in Chinese))
- [3] WAZWAZ A M. Travelling wave solutions of generalized forms of Burgers, Burgers-KdV and Burgers-Huxley equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **169**(1): 639-656.
- [4] CHUGAINOVA A P, SHARGATOV V A. Stability of nonstationary solutions of the generalized KdV-Burgers equation[J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, **55**(2): 251-263.
- [5] RASHIDINIA J, RASOULIZADEH M N. Numerical methods based on radial basis function generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation[J]. *Wave Motion*, 2019, **90**: 152-167.
- [6] EVANS D J, ABDULLAH A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 1983, **14**(1): 73-105.
- [7] 张宝琳, 谷同祥, 莫则尧. 数值并行计算原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999. (ZHANG Baolin, GU Tongxiang, MO Zeyao. *Principles and Methods of Numerical Parallel Computation*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999. (in Chinese))
- [8] 周毓麟. 拟线性抛物组具并行本性的差分格式[J]. 中国科学(A 辑), 1997, **27**(1): 43-48. (ZHOU Yulin. Difference schemes with intrinsic parallelism for quasi-linear parabolic systems[J]. *Science in China (Series A)*, 1997, **27**(1): 43-48. (in Chinese))
- [9] 曲富丽, 王文洽. 三阶非线性 KdV 方程的交替分段显-隐差分格式[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(7): 869-876. (QU Fuli, WANG Wenqia. Alternating segment explicit-implicit scheme for nonlinear third-order KdV equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(7): 869-876. (in Chinese))
- [10] SHENG Z Q, YUAN G W, HANG X D. Unconditional stability of parallel difference schemes with second order

- accuracy for parabolic equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **184**(2): 1015-1031.
- [11] 王文洽. KdV 方程的一类本性并行差分格式[J]. 应用数学学报, 2006, **29**(6): 995-1003. (WANG Wenqia. Difference schemes with intrinsic parallelism for the KdV equation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2006, **29**(6): 995-1003. (in Chinese))
- [12] YUAN G W, SHENG Z Q, HANG X D. The unconditional stability of parallel difference schemes with second order convergence for nonlinear parabolic system[J]. *Journal of Partial Differential Equations*, 2007, **20**(1): 45-64.
- [13] BORHANIFAR A, ABAZARI R. An unconditionally stable parallel difference scheme for telegraph equation[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, **2009**: 969610.
- [14] GUO G Y, LIU B. Unconditional stability of alternating difference schemes with intrinsic parallelism for the fourth-order parabolic equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **219**(14): 7319-7328.
- [15] NAMJOO M, ZEINADINI M, ZIBAEI S. Nonstandard finite-difference scheme to approximate the generalized Burgers-Fisher equation[J]. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 2018, **41**(17): 8212-8228.
- [16] XUE G Y, FENG H. An alternating segment explicit-implicit scheme with intrinsic parallelism for Burgers' equation[J]. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 2020, **49**(1): 15-30.
- [17] 袁光伟, 盛志强, 杭旭登, 等. 扩散方程计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (YUAN Guangwei, SHENG Zhiqiang, HANG Xudeng, et al. *Calculation Methods of Diffusion Equations*[M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese))
- [18] FERZIGER J H, PERIĆ M, STREET R L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*[M]. Berlin: Springer, 2020.
- [19] XUE G Y, FENG H. New parallel algorithm for convection-dominated diffusion equation[J]. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 2018, **8**(2): 261-279.
- [20] ZHANG W G, ZHAO Y, TENG X Y. Approximate damped oscillatory solutions for compound KdV-Burgers equation and their error estimates[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 2012, **28**(2): 305-324.
- [21] ISMAIL H N A, RAGEH T M, SALEM G S E. Modified approximation for the KdV-Burgers equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **234**: 58-62.
- [22] 汪精英, 翟术英. 分数阶 Cahn-Hilliard 方程的高效数值算法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(8): 832-840. (WANG Jingying, ZHAI Shuying. An efficient numerical algorithm for fractional Cahn-Hilliard equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 832-840. (in Chinese))
- [23] 魏剑英, 葛永斌. 一种求解三维非稳态对流扩散反应方程的高精度有限差分格式[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 187-197. (WEI Jianying, GE Yongbin. A high-order finite difference scheme for 3D unsteady convection diffusion reaction equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 187-197. (in Chinese))
- [24] PAN Y Y, WU L F, YANG X Z. A difference method with intrinsic parallelism for the variable-coefficient compound KdV-Burgers equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2021, **169**: 201-220.
- [25] LU D C, CHEN C X. Computable analysis of a boundary-value problem for the generalized KdV-Burgers equation[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, **38**(11): 2243-2249.
- [26] ZHANG W G, SUN Y J, LI Z M. Bounded traveling wave solutions for MKdV-Burgers equation with the negative dispersive coefficient[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 2016, **21**(8): 2883-2903.
- [27] 包立平, 李瑞翔, 吴立群. 一类 KdV-Burgers 方程的奇摄动解与孤子解[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(9): 948-957. (BAO Liping, LI Ruixiang, WU Liqun. Singularly perturbed and soliton solutions to a class of KdV-Burgers equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(9): 948-957. (in Chinese))