

具有蚊子叮咬偏好性的扩散疟疾模型的动力学

杜彩虹

Dynamics of a Diffusion Malaria Model With Vector-Bias

DU Caihong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430095>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类具时滞的周期logistic传染病模型空间动力学研究

Spatial Dynamics of Periodic ReactionDiffusion Epidemic Models With Delay and Logistic Growth

应用数学和力学. 2018, 39(2): 226-238 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370301>

多刚体系统动力学方向矢量模型及多步块数值方法

A Multibody System Dynamics Vector Model and the Multistep Block Numerical Method

应用数学和力学. 2020, 41(12): 1323-1335 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400340>

一类潜伏期有传染性的传染病模型动力学分析

Dynamic Analysis of an Epidemic Model With Infectivity in the Incubation Period

应用数学和力学. 2021, 42(8): 866-873 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410251>

基于弹性壳的三维群体细胞动力学模型

Three-Dimensional Collective Cell Dynamics Model Based on Elastic Shells

应用数学和力学. 2021, 42(10): 1062-1073 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420264>

捕食者和食饵均带有扩散的随机捕食-食饵模型动力学分析

Dynamics of Dual-Dispersal Predator-Prey Systems Under Stochastic Perturbations

应用数学和力学. 2017, 38(3): 355-368 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370051>

同时具有logistic出生和Markov切换的随机SIRS传染病模型的动力学

Dynamics of a Class of Stochastic SIRS Infectious Disease Models With Both Logistic Birth and Markov Switching

应用数学和力学. 2021, 42(12): 1327-1337 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420140>



关注微信公众号，获得更多资讯信息

具有蚊子叮咬偏好性的扩散疟疾模型的动力学*

杜彩虹

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126)

摘要: 为了探讨季节性、蚊子叮咬的偏好性和人类的扩散对疟疾传播的影响, 该文提出了一个部分退化的周期反应扩散模型. 利用动力系统的持续性理论, 研究了模型关于基本再生数 \mathcal{R}_0 的阈值动力学. 即当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 疾病灭绝; 而当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 疾病一致持续, 且会发生季节性的流行. 数值上发现了忽略空间异质性和蚊子叮咬的偏好性会低估疾病传染的风险.

关键词: 疟疾模型; 阈值动力学; 季节性; 蚊子叮咬的偏好性; 空间异质性

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430095

Dynamics of a Diffusion Malaria Model With Vector-Bias

DU Caihong

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, P.R.China)

Abstract: In order to explore the combined effects of seasonality, vector-bias and human diffusion on malaria transmission, a partially degenerate periodic reaction-diffusion model was considered. With the persistence theory for dynamical systems, the threshold dynamics for the system was established in terms of basic reproduction number \mathcal{R}_0 . That is, the disease will go extinct if $\mathcal{R}_0 < 1$, while the disease will be uniformly persistent and break out seasonally for $\mathcal{R}_0 > 1$. Numerical results show that, the neglect of spatial heterogeneity and vector-bias will lead to underestimation of the risk of disease spread.

Key words: malaria model; threshold dynamics; seasonality; vector-bias; spatial heterogeneity

0 引言

疟疾是由疟原虫感染引起的蚊媒疾病, 主要通过成年雌性按蚊的叮咬传播. 目前, 疟疾仍在非洲、东南亚和南美洲等多个地区流行. 根据世界卫生组织 (WHO) 发布的《世界疟疾报告 2022》: 2021 年全球有约 2.47 亿例疟疾病例, 死亡人数约为 61.9 万. 其中死亡人数的 50% 以上来自恶性疟原虫盛行的非洲, 恶性疟原虫致病性极强, 如不及时治疗会发展成为凶险型疟疾, 甚至死亡^[1]. 因此, 全球抗疟形势依然严峻.

疟疾的发生与流行受气候因素的影响. 研究表明, 温度升高 (不超过 30 °C), 蚊子成熟的速率会加快, 疟原虫在雌蚊体内的孵化时间会缩短^[2]. 而降雨量增加会延长蚊子的寿命, 提高蚊子的繁殖数量和质量, 衍生出更多的蚊虫栖息场所^[3]. 因此, 疟疾多发于温热潮湿的夏秋季, 具有明显的季节性传播特征.

此外, Lacroix 等^[4]通过一项实验发现, 疟原虫在人体内发育的过程中会释放某种化学物质, 使染病者对蚊

* 收稿日期: 2022-03-21; 修订日期: 2023-03-01

基金项目: 国家自然科学基金 (11971369); 中央高校基本科研业务费专项资金 (JB210711)

作者简介: 杜彩虹 (1995—), 女, 硕士 (E-mail: ducaihong0321@163.com).

引用格式: 杜彩虹. 具有蚊子叮咬偏好性的扩散疟疾模型的动力学[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(3): 345-354.

子具有更强的吸引力,从而增强其传播力.同时,蚊子可以通过选择染病者,最大程度地提高其在进食期间的蛋白质摄入量^[5].这表明蚊子更喜欢叮咬染病者而不是易感者.为了在数学模型中反映这一现象,Chamchod 和 Britton^[6]利用参数 p 和 l 刻画了蚊子遇到并选择叮咬染病者和易感者的概率,进而提出了一个具有蚊子叮咬偏好性的常微分方程模型.基于此,Wang 和 Zhao^[7]通过考虑季节性和蚊子感染的潜伏期对疟疾传播的影响,建立了一个具有蚊子叮咬偏好性的时滞微分方程模型.

我们注意到,成蚊的分布取决于幼蚊和宿主的分布,由于幼蚊多栖息于河流和沼泽附近,因此新成熟的蚊子会在这些地方聚集,并逐渐飞往人群密集的场所.这就导致了疟疾的流行会受空间异质性的影响^[8].基于这一生物现象,Lou 和 Zhao^[9]通过考虑蚊子感染的潜伏期建立了一个非局部时滞反应扩散疟疾模型,并分析了系统的阈值动力学.Bai 等^[10]综合考虑了季节性、蚊子叮咬的偏好性和空间异质性等因素,建立了一个具有非局部时滞的周期反应扩散疟疾模型,并研究了疾病的消除和一致持续.更多这方面的工作可参见文献 [11-13] 及其引文.

值得注意的是,大多数的蚊子一生只能飞行几千米^[14-15],与人类的扩散距离相比可以忽略不计.因此,基于上述背景,本文将考虑一个具有蚊子叮咬偏好性的部分退化的周期反应扩散疟疾模型(见第1节).在第2节和第3节中,将根据下一代再生算子来定义模型的基本再生数,并研究系统关于 \mathcal{R}_0 的阈值动力学.在第4节中,将通过数值模拟验证理论结果,并分析模型中的一些重要参数对疟疾传播的影响.最后是关于本文所研究内容的一些总结和讨论.

1 模 型

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集.设时刻 t 、位置 x 处的总人口密度处于一个稳态 $H(x) = S_h(t, x) + I_h(t, x), \forall t \geq 0, x \in \bar{\Omega}$, 其中 S_h, I_h 分别表示易感者和染病者.将蚊群分为易感的蚊子 (S_m) 和染病的蚊子 (I_m).令 $\beta(t, x)$ 为蚊子的叮咬率, $c(b)$ 为每次叮咬疾病从染病的蚊子到易感者(或染病者到易感的蚊子)的转移率. p 和 l 分别表示蚊子遇到并选择叮咬染病者和易感者的概率,且 $p \geq l > 0$.则时刻 t 、位置 x 处新感染的人和蚊子分别为

$$\frac{c\beta(t, x)l[H(x) - I_h(t, x)]}{pI_h(t, x) + l[H(x) - I_h(t, x)]} I_m(t, x), \quad \frac{b\beta(t, x)pI_h(t, x)}{pI_h(t, x) + l[H(x) - I_h(t, x)]} S_m(t, x).$$

假设人类的扩散率为 D_h , 死亡率和康复率分别为 d_h 和 ρ .令 $\mu(t)$ 为幼蚊到成蚊的输入率, $d_m(t)$ 为蚊子的死亡率.按照文献 [9-10] 中的建模思路,我们考虑如下模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h(t, x)}{\partial t} = D_h \Delta I_h(t, x) + \frac{c\beta(t, x)l[H(x) - I_h(t, x)]}{pI_h(t, x) + l[H(x) - I_h(t, x)]} I_m(t, x) - (d_h + \rho)I_h(t, x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S_m(t, x)}{\partial t} = \mu(t) - d_m(t)S_m(t, x) - \frac{b\beta(t, x)pI_h(t, x)}{pI_h(t, x) + l[H(x) - I_h(t, x)]} S_m(t, x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_m(t, x)}{\partial t} = \frac{b\beta(t, x)pI_h(t, x)}{pI_h(t, x) + l[H(x) - I_h(t, x)]} S_m(t, x) - d_m(t)I_m(t, x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_h(t, x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量的值.假定 D_h, d_h, ρ 均为正常数.设 $\mu(t), d_m(t)$ 为正的 C^1 函数, $\beta(t, x)$ 在 $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ 上为非平凡的正的 Hölder 连续函数,且它们关于时间 t 是 ω -周期的.

定义 $X := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ 为具有最大模范数的 Banach 空间, $X^+ := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^3)$.以 $T_1(t, s) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 来表示系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = D_h \Delta u(t, x) - (d_h + \rho)u(t, x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的演化算子.显然,当 $t > s$ 时, $T_1(t, s)$ 是紧的强正算子.对于任意的 $\phi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, 定义 $T_2(t, s)\phi = e^{-\int_s^t d_m(\xi) d\xi} \phi$. 易见

$T_i(t+\omega, s+\omega) = T_i(t, s), i = 1, 2$. 令

$$X_H := \{\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+ : \phi_1(\cdot) \leq H(\cdot)\}.$$

对于任意的初始值 $\phi \in X_H$, 系统 (1) 可写为如下积分形式:

$$\begin{aligned} I_h(t, \cdot) &= T_1(t, 0)\phi_1 + \int_0^t T_1(t, s) \frac{c\beta(s, \cdot)l[H(\cdot) - I_h(s, \cdot)]}{pI_h(s, \cdot) + l[H(\cdot) - I_h(s, \cdot)]} I_m(s, \cdot) ds, \\ S_m(t, \cdot) &= T_2(t, 0)\phi_2 + \int_0^t T_2(t, s) \left(\mu(s) - \frac{b\beta(s, \cdot)pI_h(s, \cdot)}{pI_h(s, \cdot) + l[H(\cdot) - I_h(s, \cdot)]} S_m(s, \cdot) \right) ds, \\ I_m(t, \cdot) &= T_2(t, 0)\phi_3 + \int_0^t T_2(t, s) \frac{b\beta(s, \cdot)pI_h(s, \cdot)}{pI_h(s, \cdot) + l[H(\cdot) - I_h(s, \cdot)]} S_m(s, \cdot) ds. \end{aligned}$$

定理 1 对于任意的 $\phi \in X_H$, 系统 (1) 过初值 ϕ 的解 $(I_h(t, \cdot, \phi), S_m(t, \cdot, \phi), I_m(t, \cdot, \phi)) \in X_H$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在唯一, 且它的所有解最终有界和一致有界.

证明 利用文献 [16] 中推论 4 发展的抽象泛函微分方程理论 (见文献 [10] 中引理 1) 可得, 对于任意的 $\phi \in X_H$, 系统 (1) 在其最大存在区间 $[0, t_\phi)$ 上有满足初值 ϕ 的唯一解 $(I_h(t, \cdot, \phi), S_m(t, \cdot, \phi), I_m(t, \cdot, \phi)) \in X_H$, 其中 $t_\phi \leq \infty$.

显然对于任意的 $t \in [0, t_\phi)$, 有 $I_h(t, \cdot, \phi) \leq H(\cdot)$. 令 $N_m(t, x) = S_m(t, x) + I_m(t, x)$ 为蚊群在时刻 t 、位置 x 处的总密度, 则其满足

$$\frac{\partial N_m(t, x)}{\partial t} = \mu(t) - d_m(t)N_m(t, x) \leq \hat{\mu} - \bar{d}_m N_m(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega,$$

其中 $\hat{\mu} = \max_{t \in [0, \omega]} \mu(t)$, $\bar{d}_m = \min_{t \in [0, \omega]} d_m(t)$. 利用比较定理可得 $t_\phi = \infty$, 即系统 (1) 的解在 $[0, \infty)$ 上全局存在. 同时, 可得解最终有界和一致有界. □

对于任意的 $t \geq 0$, 定义 $Q(t) : X_H \rightarrow X_H$ 为

$$Q(t)\phi = u(t, \cdot, \phi),$$

其中 $u(t, \cdot, \phi) = (I_h(t, \cdot, \phi), S_m(t, \cdot, \phi), I_m(t, \cdot, \phi))$ 是系统 (1) 过初值 $\phi \in X_H$ 的解. 显然 $Q(t)$ 是一个 ω -周期半流^[17], 且 $Q := Q(\omega)$ 是系统 (1) 的 Poincaré 映射. 易见 $Q(t)$ 不紧, 为此, 对于 X_H 的任意有界子集 B , 定义 B 的 Kuratowski 非紧性测度^[18] 为 $\kappa(B) := \inf\{\delta > 0\}$, 其中 B 可以表示为有限个集的并: $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$, 且每个 B_i 的直径 $d(B_i) \leq \delta$.

引理 1 对于任意的 $t > 0$, $Q(t)$ 在 X_H 上是 k -contraction 的, 且具有压缩系数 $e^{-\bar{d}_m t}$. 此外, Q 在 X_H 中有一个连通的全局吸引子.

证明 利用文献 [19] 中引理 2.5 的方法可证得对于任意的 $t > 0$, $Q(t)$ 在 X_H 上是 k -contraction 的, 且具有压缩系数 $e^{-\bar{d}_m t}$. 由定理 1 知, $Q(t)$ 在 X_H 上是点耗散的, X_H 的有界集的正轨道是有界的. 进而由文献 [20] 中定理 2.4.6 知, Q 在 X_H 中有一个连通的全局吸引子. □

2 基本再生数

定义 $Y := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $Y^+ := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$. 令 $I_h \equiv I_m \equiv 0$, 则系统 (1) 中 S_m 满足

$$\frac{\partial S_m(t, x)}{\partial t} = \mu(t) - d_m(t)S_m(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega. \tag{2}$$

显然系统 (2) 存在唯一的正周期解

$$S_m^*(t) = e^{-\int_0^t d_m(s) ds} \left(\frac{\int_0^\omega \mu(\xi) e^{-\int_\xi^\omega d_m(s) ds} d\xi}{1 - e^{-\int_0^\omega d_m(s) ds}} + \int_0^t \mu(\xi) e^{\int_0^\xi d_m(s) ds} d\xi \right)$$

在 $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 上全局吸引. 将系统 (1) 在无病周期解 $(0, S_m^*(t), 0)$ 处线性化, 则 I_h, I_m 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h(t,x)}{\partial t} = D_h \Delta I_h(t,x) + c\beta(t,x)I_m(t,x) - (d_h + \rho)I_h(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_m(t,x)}{\partial t} = -d_m(t)I_m(t,x) + \frac{b\beta(t,x)pS_m^*(t)}{lH(x)}I_h(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_h(t,x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

令 C_ω 为从 \mathbb{R} 到 Y 的连续 ω -周期函数的全体构成的 Banach 空间, 赋予其上确界范数, 且 $C_\omega^+ := \{\varphi \in C_\omega : \varphi(t)(x) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, x \in \bar{\Omega}\}$. 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 定义映射 $F(t) : Y \rightarrow Y$ 为

$$F(t) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta(t, \cdot)\varphi_2 \\ \frac{b\beta(t, \cdot)pS_m^*(t)}{lH(\cdot)}\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in Y.$$

令 $\Phi(t, s), t \geq s$, 为下列系统的演化算子:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = D_h \Delta v_1(t,x) - (d_h + \rho)v_1(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} = -d_m(t)v_2(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

回顾 $\Phi(t, s)$ 指数增长界的定义, 即 $\bar{\omega}(\Phi) = \inf\{\bar{\omega} : \exists M \geq 1\}$, 使得 $\|\Phi(t+s, s)\| \leq Me^{\bar{\omega}t}, \forall s \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

由 Krein-Rutman 定理和文献 [21] 中引理 14.2 可得

$$0 < r(\Phi(\omega, 0)) = \max\{r(T_1(\omega, 0)), r(T_2(\omega, 0))\} < 1,$$

其中 $r(\Phi(\omega, 0))$ 是 $\Phi(\omega, 0)$ 的谱半径. 进而利用文献 [22] 中命题 5.5, 并取 $s = 0$ 可得 $\bar{\omega}(\Phi) < 0$. 则 $F(t)$ 和 $\Phi(t, s)$ 满足

(A1) 任意的 $t \geq 0, F(t)Y^+ \subseteq Y^+$;

(A2) 任意的 $t \geq s, \Phi(t, s)Y^+ \subseteq Y^+, \Phi(t, s)\text{int}(Y^+) \subseteq \text{int}(Y^+), \bar{\omega}(\Phi) < 0$.

现利用文献 [23] 中发展的理论定义系统 (3) 的基本再生数 \mathcal{R}_0 . 假定 $\varphi \in C_\omega, \varphi(s, x) = \varphi(s)(x)$ 是时刻 $s \in \mathbb{R}$ 、位置 x 处染病的人和蚊子的初始分布. 定义线性算子 $L : C_\omega \rightarrow C_\omega$ 为

$$[L\varphi](t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, s)F(s)\varphi(s)ds = \int_0^\infty \Phi(t, t-s)F(t-s)\varphi(t-s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \varphi \in C_\omega,$$

表示所有时刻 t 以前新感染的人和蚊子经过演化后到达时刻 t 的累积分布. 则定义基本再生数 $\mathcal{R}_0 := r(L)$.

令 $P(t)$ 为系统 (3) 的解映射, 即

$$P(t)\varphi = z(t, \cdot, \varphi), \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $z(t, \cdot, \varphi)$ 为系统 (3) 满足初始条件 $z(0, \cdot, \varphi) = \varphi$ 的唯一解. 令 $P := P(\omega)$ 为系统 (3) 的 Poincaré 映射, 它的谱半径为 $r(P)$. 考虑下列周期特征值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_1(t,x)}{\partial t} = D_h \Delta \bar{v}_1(t,x) + c\beta(t,x)\bar{v}_2(t,x) - (d_h + \rho)\bar{v}_1(t,x) + \lambda\bar{v}_1(t,x), & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \bar{v}_2(t,x)}{\partial t} = -d_m(t)\bar{v}_2(t,x) + \frac{b\beta(t,x)pS_m^*(t)}{lH(x)}\bar{v}_1(t,x) + \lambda\bar{v}_2(t,x), & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \bar{v}_1(t,x)}{\partial \nu} = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

其中 \bar{v}_1, \bar{v}_2 是关于 t 的 ω -周期函数, $t \in \mathbb{R}$.

根据文献 [24] 中定理 2.16 和注 2.20 可得如下引理.

引理 2 $r(P)$ 是 P 的主特征值. $\lambda_0^* = -\frac{\ln(r(P))}{\omega}$ 是系统 (4) 的特征值, 其对应的特征向量 $v^* \in \text{int}(C_\omega^+)$. 此外, $e^{-\lambda_0^* t} v^*(t, x)$ 是系统 (3) 的一个解.

对于任意给定的 $\lambda \in [0, \infty)$, 考虑下列线性周期系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h(t,x)}{\partial t} = D_h \Delta I_h(t,x) + \lambda c \beta(t,x) I_m(t,x) - (d_h + \rho) I_h(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_m(t,x)}{\partial t} = -d_m(t) I_m(t,x) + \lambda \frac{b \beta(t,x) p S_m^*(t)}{l H(x)} I_h(t,x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_h(t,x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

令 $\{U(t, s, \lambda) : t \geq s\}$ 为系统 (5) 在 Y 上的演化族. 定义 $\mathcal{R}_\lambda = r(\lambda L) = \lambda \mathcal{R}_0$, 则 \mathcal{R}_λ 可视作系统 (5) 的基本再生数, 且 $U(\omega, 0, 1) = P(\omega)$. 显然, 对于任意的 $t > s$, $U(t, s, \lambda)$ 在 Y 上是强正的. 进而根据文献 [25] 中引理 3.1 可以验证:

(A3) 当 $r(U(\omega, 0, \lambda)) \geq 1$ 时, 对于任意的 $\lambda \in [0, \infty)$, 正线性算子 $U(\omega, 0, \lambda)$ 具有孤立主特征值, 且该特征值对应强正的特征向量.

引理 3 $\mathcal{R}_0 - 1$ 与 $r(P) - 1$ 的符号相同 (见文献 [23] 中定理 3.1).

3 阈值动力学

本节将研究系统 (1) 关于基本再生数 \mathcal{R}_0 的阈值动力学. 为此, 首先给出如下引理.

引理 4 令 $(I_h(t, \cdot, \phi), S_m(t, \cdot, \phi), I_m(t, \cdot, \phi))$ 为系统 (1) 过初值 $\phi \in X_H$ 的解. 则

(i) 对任意的 $\phi \in X_H$, 有 $S_m(t, x, \phi) > 0$ 关于 $t > 0$ 和 $x \in \bar{\Omega}$ 成立, 并且存在正常数 σ 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S_m(t, x, \phi) \geq \sigma, \quad \forall x \in \bar{\Omega};$$

(ii) 若存在 $t_0 \geq 0$, 使得 $I_h(t_0, \cdot, \phi) \neq 0$ 或 $I_m(t_0, \cdot, \phi) \neq 0$, 则当 $t > t_0$ 时, 对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$, 有 $I_h(t, x, \phi) > 0$ 且 $I_m(t, x, \phi) > 0$.

证明 (i) 对于任意的 $\phi \in X_H$, 令 $\tilde{v}(t, x, \phi_2)$ 为

$$\frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial t} = \mu(t) - \left(d_m(t) + \frac{b \beta(t, x) p}{l} \right) \tilde{v}(t, x), \quad t > 0, x \in \bar{\Omega} \quad (6)$$

满足初值 $\tilde{v}(0, x) = \phi_2(x)$ 的解. 应用比较定理可得当 $t > 0$ 且 $x \in \bar{\Omega}$ 时, 有 $S_m(t, x, \phi) \geq \tilde{v}(t, x, \phi_2) > 0$. 又因系统 (6) 存在全局吸引的正周期解 $\tilde{v}^*(t, x)$, 所以显然

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S_m(t, x, \phi) \geq \sigma := \frac{1}{2} \inf_{t \in [0, \omega], x \in \bar{\Omega}} \tilde{v}^*(t, x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

(ii) 假设存在 $t_0 \geq 0$, 使得 $I_h(t_0, \cdot, \phi) \neq 0$. 易见 I_h 满足

$$\frac{\partial I_h(t, x)}{\partial t} \geq D_h \Delta I_h(t, x) - (d_h + \rho) I_h(t, x), \quad t > 0, x \in \bar{\Omega}.$$

由抛物方程的最大值原理 (文献 [26] 中定理 4) 和 Hopf 引理 (文献 [26] 中定理 3) 知, 当 $t > t_0$ 时, 对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$, 有 $I_h(t, x) > 0$. 由于

$$I_m(t, x) = T_2(t, t_0) I_m(t_0, x) + \int_{t_0}^t T_2(t, s) h(s, x) ds \geq \int_{t_0}^t T_2(t, s) h(s, x) ds,$$

其中 $h(s, x) = \frac{b \beta(s, x) p I_h(s, x)}{p I_h(s, x) + l [H(x) - I_h(s, x)]} S_m(s, x) > 0$, 所以对于任意的 $t > t_0$ 和 $x \in \bar{\Omega}$, 有 $I_m(t, x, \phi) > 0$.

若存在 $t_0 \geq 0$, 使得 $I_m(t_0, \cdot, \phi) \neq 0$. 因为

$$I_m(t, x) = T_2(t, t_0) I_m(t_0, x) + \int_{t_0}^t T_2(t, s) h(s, x) ds \geq T_2(t, t_0) I_m(t_0, x),$$

所以 $I_m(t, x, \phi) \geq 0$ 关于 $t > t_0$ 和 $x \in \bar{\Omega}$ 成立. 又因

$$I_h(t, x) = T_1(t, t_0) I_h(t_0, x) + \int_{t_0}^t T_1(t, s) g(s, x) ds \geq \int_{t_0}^t T_1(t, s) g(s, x) ds,$$

其中 $g(s, x) = \frac{c \beta(s, x) l [H(x) - I_h(s, x)]}{p I_h(s, x) + l [H(x) - I_h(s, x)]} I_m(s, x) \geq 0$ 且 T_1 强正, 于是当 $t > t_0$ 时, 对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$, 有 $I_h(t, x, \phi) > 0$. 进而由第一种情形可得当 $t > t_0$ 时, 对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$, 有 $I_m(t, x, \phi) > 0$.

定理 2 下列结论成立:

(i) 若 $\mathcal{R}_0 < 1$, 则无病周期解 $(0, S_m^*(t), 0)$ 在 X_H 中是全局吸引的.

(ii) 若 $\mathcal{R}_0 > 1$, 则系统 (1) 至少存在一个正的 ω -周期解. 此外, 存在 $\eta > 0$, 使得对于任意的 $\phi \in X_H$, 当 $\phi_1 \neq 0$ 且 $\phi_3 \neq 0$ 时, 系统 (1) 的解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{Q}} (I_h(t, x, \phi), S_m(t, x, \phi), I_m(t, x, \phi)) \geq (\eta, \eta, \eta). \tag{7}$$

证明 结论 (i) 的证明基本类似于文献 [10] 中定理 1(i), 因此我们只证结论 (ii). 容易看出, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 有 $r(P) > 1$, 故 $\lambda_0^* = -\frac{\ln r(P)}{\omega} < 0$. 定义

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\phi \in X_H : \phi_1(\cdot) \neq 0, \phi_3(\cdot) \neq 0\}, \\ \partial X_0 &= X_H \setminus X_0 = \{\phi \in X_H : \phi_1(\cdot) \equiv 0 \text{ or } \phi_3(\cdot) \equiv 0\}. \end{aligned}$$

对于任意的 $\phi \in X_0$, 利用引理 4(ii) 知, $I_h(t, \cdot, \phi) \gg 0$ 且 $I_m(t, \cdot, \phi) \gg 0$ 关于 $t > 0$ 成立. 所以对于一切的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $Q^n(X_0) \subset X_0$. 此外, 由引理 1 知, Q 在 X_H 中存在一个全局吸引子. 进一步定义

$$\begin{aligned} M_\partial &:= \{\psi \in \partial X_0 : Q^n(\psi) \in \partial X_0, \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ M_0 &:= \{\psi \in X_H : \psi_1(\cdot) \equiv 0, \psi_3(\cdot) \equiv 0\}. \end{aligned}$$

类似于文献 [27] 中定理 4.2 的断言 2, 可证得 $M_\partial = M_0$. 记 $E_0 = (0, S_m^*(0), 0)$. 令 $\omega(\psi)$ 为轨道 $\gamma^+(\psi) = \{Q^n(\psi) : \forall n \in \mathbb{N}\}$ 的 ω 极限集. 易见对于任意的 $\psi \in M_\partial = M_0$, 有 $I_h(t, \cdot, \psi) \equiv 0$ 且 $I_m(t, \cdot, \psi) \equiv 0$ 关于 $t \geq 0$ 成立, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_m(t, \cdot, \psi) - S_m^*(t)) = 0$. 这表明 $\omega(\psi) = E_0$. 由于系统 (1) 限制在 M_∂ 上是一个单调系统, 所以根据文献 [17] 中引理 2.2.1 知, E_0 在 M_∂ 中是局部 Liapunov 稳定的. 因此, E_0 在 ∂X_0 中不能形成环.

考虑如下带有参数 $\delta > 0$ 的辅助系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1^\delta(t, x)}{\partial t} = D_h \Delta v_1^\delta(t, x) + \frac{c\beta(t, x)[H(x) - \delta]}{p\delta + [H(x) - \delta]} v_2^\delta(t, x) - (d_h + \rho)v_1^\delta(t, x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial v_2^\delta(t, x)}{\partial t} = -d_m(t)v_2^\delta(t, x) + \frac{b\beta(t, x)p v_1^\delta(t, x)}{(p-l)\delta + lH(x)} (S_m^*(t) - \delta), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial v_1^\delta(t, x)}{\partial \nu} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

令 $r(P_\delta)$ 为系统 (8) 的 Poincaré 映射的谱半径. 因 $\lim_{\delta \rightarrow 0} r(P_\delta) = r(P) > 1$, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $r(P_\delta) > 1$ 和 $\delta < \min_{t \in [0, \omega]} S_m^*(t)$. 根据引理 2, 存在一个 ω -周期函数 v_δ^* , 使得 $e^{-\lambda_\delta^* t} v_\delta^*(t, x)$ 是系统 (8) 的一个解, 其中 $\lambda_\delta^* = -\frac{\ln r(P_\delta)}{\omega} < 0$. 由解对初值的连续依赖性知, 存在 $\eta^* > 0$, 使得当初值 ϕ 满足 $\|\phi - E_0\| < \eta^*$ 时, 对于一切的 $t \in [0, \omega]$, 有 $\|Q(t)(\phi) - Q(t)E_0\| < \delta$.

现证如下: 我们断言

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Q^n(\phi) - E_0\| \geq \eta^*, \quad \forall \phi \in X_0.$$

若不然, 假设存在 $\phi_0 \in X_0$, 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Q^n(\phi_0) - E_0\| < \eta^*$. 则能够找到一个常数 $\tilde{n} \geq 1$, 当 $n \geq \tilde{n}$ 时, 有 $\|Q^n(\phi_0) - E_0\| < \eta^*$. 对于任意的 $t \geq \tilde{n}\omega$, 令 $t = n\omega + t'$, 其中 $n = [t/\omega], t' \in [0, \omega)$. 进而有

$$\|Q(t)\phi_0 - Q(t)E_0\| = \|Q(t')(Q^n(\phi_0)) - Q(t')E_0\| < \delta.$$

由此可得

$$I_h(t, x, \phi_0), I_m(t, x, \phi_0) < \delta, \quad S_m(t, x, \phi_0) > S_m^*(t) - \delta, \quad \forall t \geq \tilde{n}\omega, x \in \bar{Q}.$$

则 I_h 和 I_m 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h(t, x)}{\partial t} \geq D_h \Delta I_h(t, x) + \frac{c\beta(t, x)[H(x) - \delta]}{p\delta + [H(x) - \delta]} I_m(t, x) - (d_h + \rho)I_h(t, x), & t \geq \tilde{n}\omega, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_m(t, x)}{\partial t} \geq -d_m(t)I_m(t, x) + \frac{b\beta(t, x)p I_h(t, x)}{(p-l)\delta + lH(x)} (S_m^*(t) - \delta), & t \geq \tilde{n}\omega, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_h(t, x)}{\partial \nu} = 0, & t \geq \tilde{n}\omega, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

因为 $(I_h(t, x, \phi_0), I_m(t, x, \phi_0)) \gg (0, 0)$, 所以存在 $\alpha > 0$, 使得

$$(I_h(\tilde{n}\omega, x, \phi_0), I_m(\tilde{n}\omega, x, \phi_0)) \gg \alpha e^{-\lambda_\delta^* \tilde{n}\omega} v_\delta^*(\tilde{n}\omega, x), \quad \forall x \in \bar{Q}.$$

利用比较定理可得 $(I_h(t, x, \phi_0), I_m(t, x, \phi_0)) \gg \alpha e^{-\lambda_0^* t} v_0^*(t, x)$ 关于 $t \geq \tilde{n}\omega$ 和 $x \in \bar{\Omega}$ 成立. 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $I_h(t, x, \phi_0) \rightarrow \infty$ 和 $I_m(t, x, \phi_0) \rightarrow \infty$, 这与 I_h 和 I_m 的有界性相矛盾.

上述断言意味着 E_0 是 Q 在 X_H 中的一个孤立不变集, 且 $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$, 其中 $W^s(E_0)$ 是 E_0 的稳定集. 由文献 [17] 中定理 1.3.1 和注 1.3.1 知, Q 关于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致持续的, 即存在 $\tilde{\eta} > 0$, 使得对于任意的 $\phi \in X_0$, 有 $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(Q^n(\phi), \partial X_0) \geq \tilde{\eta}$.

这表明 Q 是 ρ -一致持续的, 且对于任意的 $\phi \in X_0$, 有 $\rho(\phi) = d(\phi, \partial X_0)$. 另外, 注意到 Q 点耗散, k -condensing 且有界集的轨道有界. 所以, 利用文献 [28] 中定理 4.5 可得 Q 有一个不动点 $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \in X_0$. 因此, 结合引理 4 知, $(I_h(t, x, \phi^*), S_m(t, x, \phi^*), I_m(t, x, \phi^*))$ 是系统 (1) 的严格正的 ω -周期解.

最后, 类似于文献 [10] 中定理 1 的推导过程, 我们便可证得系统 (1) 的解是一致持续的, 即结论 (7) 是成立的. □

4 数值模拟

本节将通过数值模拟验证理论结果, 并分析模型 (1) 中的关键参数对疟疾传播的影响. 假设所有参数以月 (1 month \approx 30.4 d) 为时间单位, 并令 $\Omega = [0, \pi]$. 基于文献 [7, 29] 中的数据, 选取

$$H(x) = 100(1.1 - \cos(2x)) (\text{km}^2)^{-1}, \beta(t) = 3.6(1 - 0.6 \sin(\pi(t + 2.5)/6)) \text{ month}^{-1}.$$

令 $D_h = 0.1 \text{ km}^2 \cdot \text{month}^{-1}$, $d_h = 1/(70 \times 12) \text{ month}^{-1}$, $\rho = 0.0187 \text{ month}^{-1}$, $b = 0.08$, $c = 0.011$, $d_m = 3.2 \text{ month}^{-1}$, $\mu = 600 (\text{km}^2 \cdot \text{month})^{-1}$, $p = 0.7$, $l = 0.3$. 取初始值

$$I_h(0, x) = 4 - 2 \cos(2x), S_m(0, x) = 100 - 5 \cos(2x), I_m(0, x) = 8 - 5 \cos(2x).$$

利用文献 [30] 中定理 3.8 和引理 2.5 计算可得 $\mathcal{R}_0 = 1.6923 > 1$, 此时染病的人 I_h 和染病的蚊子 I_m 的长期行为如图 1 所示. 观察发现, I_h 和 I_m 将会持续存在, 并呈现周期性振荡, 与定理 2(ii) 的结果相吻合.

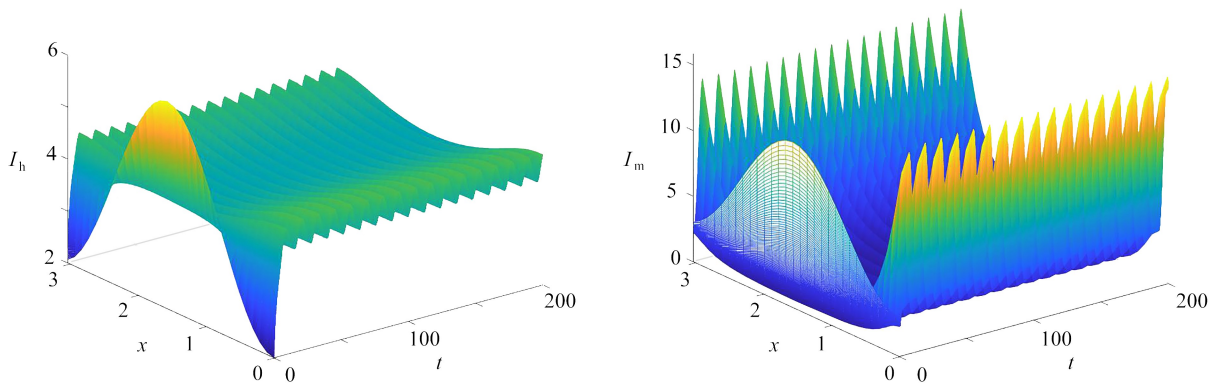


图 1 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时 I_h 和 I_m 的演化
Fig. 1 The evolutions of I_h and I_m for $\mathcal{R}_0 > 1$

为了研究蚊子叮咬的偏好性对疟疾传播的影响, 我们取 $q = l/p \in (0, 1]$, 并利用上述参数描绘出了 \mathcal{R}_0 随 q 的变化. 如图 2(a) 所示, 不考虑蚊子叮咬的偏好性, 即取 $q = l/p = 1$, 将低估疟疾的传播风险. 图 2(b) 模拟了扩散系数对 \mathcal{R}_0 的影响. 我们发现增加人类的扩散会在一定程度上降低疾病风险, 但是当 D_h 大于 0.3 时, \mathcal{R}_0 随 D_h 的变化趋于平缓, 这说明不能依靠提高人类的扩散彻底消除疟疾.

考虑到蚊群的叮咬率受气候因素影响较大, 故令 $\beta(t) = 3.6(1 - \varepsilon \sin(\pi(t + 2.5)/6))$, 其中 $\varepsilon \in [0, 1]$ 表示季节性波动的幅度. 观察图 3(a) 发现, \mathcal{R}_0 关于 ε 非单调. 固定 $\varepsilon = 0.6$, 并令 $H(x) = 100(1.1 - \delta \cos(2x))$, 其中 $\delta \in [0, 1]$ 表示人群在城乡间的分布. 图 3(b) 表明 \mathcal{R}_0 与 δ 呈正相关, 即城市化发展会加速疾病的传播.

最后, 为了考察蚊子的扩散对疟疾传播的影响, 我们令 $D_m \in [0, 0.015]$, 并利用图 1 的参数得到图 4. 显然 \mathcal{R}_0 随 D_m 的变化幅度较小, 因此在一些情况下忽略蚊子的扩散是合理的.

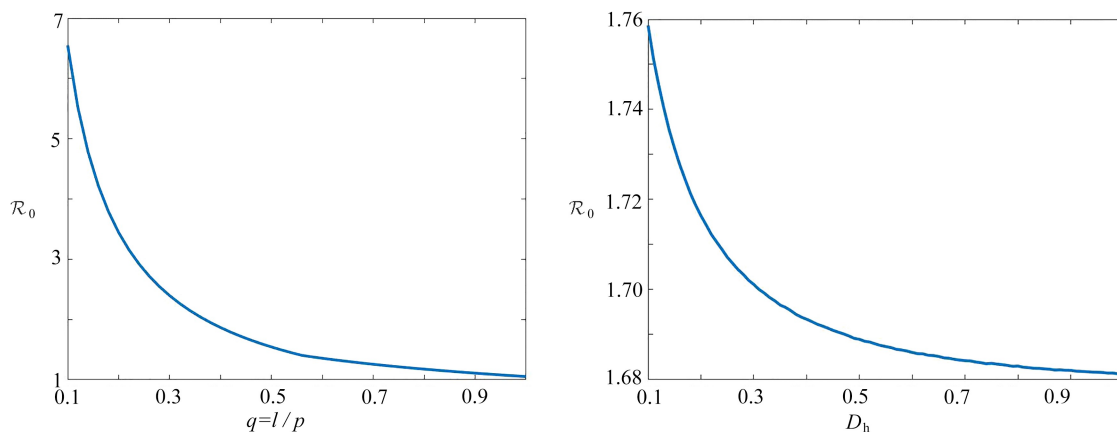


图2 蚊子叮咬的偏好性和人类的扩散对 \mathcal{R}_0 的影响
Fig. 2 The effects of vector-bias and human diffusion on \mathcal{R}_0

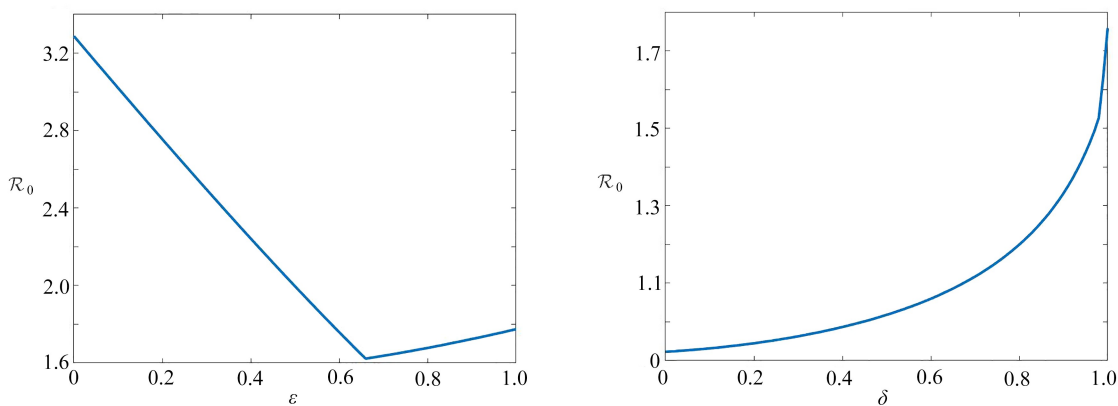


图3 季节性和空间异质性的影响
Fig. 3 The effects of seasonality and spatial heterogeneity on \mathcal{R}_0

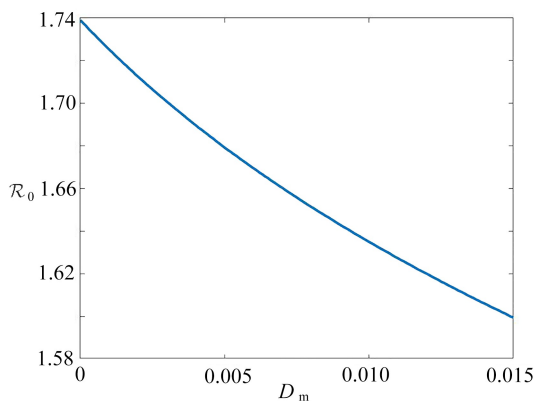


图4 \mathcal{R}_0 随 D_m 的变化
Fig. 4 \mathcal{R}_0 as a function of D_m

5 总结与讨论

为了综合考虑季节性、蚊子叮咬的偏好性和空间异质性对疟疾传播的影响,本文研究了一个部分退化的周期反应扩散模型.由于忽略了蚊子的扩散,所以系统的解映射 $Q(t)$ 失去了紧性,为了克服这一困难,我们引入了 Kuratowski 非紧性测度的概念,并证明了 $Q(t)$ 是 k -contraction 的.紧接着,我们通过下一代再生算子的谱半径定义了系统的基本再生数 \mathcal{R}_0 ,并证明了 \mathcal{R}_0 可以作为预测疾病是否持续的阈值参数,即 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时,疾病灭绝; $\mathcal{R}_0 > 1$ 时,疾病一致持续且会发生季节性的流行.最后,在数值上,我们讨论了人类的扩散、季节性、空间异

质性以及蚊子叮咬的偏好性对 \mathcal{R}_0 的影响. 结果表明, 这些因素都是影响疟疾传播的关键因素, 忽视它们将低估或高估疾病暴发的风险. 另外, 我们还考察了蚊子的小扩散对疟疾传播的影响, 证明了在一些情况下忽略蚊子的扩散是合理的.

在本课题的基础上我们还可以做进一步的探讨, 例如: 有研究表明, 不同的人感染疟疾之后潜伏期的长短存在差异, 因此建立具有分布时滞的反应扩散疟疾模型对研究疾病传播的动力学行为具有重要意义 (具体可参见文献 [31]). 另外, 无界域上疾病传播的动力学也是我们感兴趣的研究方向 (具体可参见文献 [32-33]).

参考文献 (References):

- [1] World Health Organization (WHO). 世界疟疾报告2022[EB/OL]. [2022-04-13]. <https://www.who.int/zh/news-room/fact-sheets/detail/malaria>.
- [2] 贾尚春, 邹铮, 徐伏牛. 全球气候变暖对疟疾传播的潜在影响[J]. *中国寄生虫病防治杂志*, 2004, **17**(1): 63-64. (JIA Shangchun, ZOU Zheng, XU Funiu. Potential impact of global warming on malaria transmission[J]. *Chinese Journal of Parasitic Diseases Control*, 2004, **17**(1): 63-64. (in Chinese))
- [3] DAN X, YONG L, WANG S Q, et al. Spatiotemporal distribution of malaria and the association between its epidemic and climate factors in Hainan, China[J]. *Malaria Journal*, 2010, **9**(1): 185.
- [4] LACROIX R, MUKABANA W R, GOUAGNA L C, et al. Malaria infection increases attractiveness of humans to mosquitoes[J]. *PLoS Biology*, 2005, **3**(9): e298.
- [5] KESAVAN S K, REDDY N P. On the feeding strategy and the mechanics of blood sucking in insects[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1983, **105**(4): 661-677.
- [6] CHAMCHOD F, BRITTON N F. Analysis of a vector-bias model on malaria transmission[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2011, **73**: 639-657.
- [7] WANG X N, ZHAO X Q. A periodic vector-bias malaria model with incubation period[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2017, **77**: 181-201.
- [8] SMITH D L, DUSHOFF J, MCKENZIE F E. The risk of a mosquito-borne infection in a heterogeneous environment[J]. *PLoS Biology*, 2004, **2**: 1957-1964.
- [9] LOU Y J, ZHAO X Q. A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, **62**: 543-568.
- [10] BAI Z G, PENG R, ZHAO X Q. A reaction-diffusion malaria model with seasonality and incubation period[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2018, **77**: 201-228.
- [11] SHI Y Y, ZHAO H Y. Analysis of two-strain malaria transmission model with spatial heterogeneity and vector-bias[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2021, **82**: 24.
- [12] WANG C Y, WANG J. Analysis of a malaria epidemic model with age structure and spatial diffusion[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Physik*, 2021, **72**: 74.
- [13] ZHANG Y, LIU S Y, BAI Z G. A periodic malaria model with two delays[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, **541**: 123327.
- [14] GAO D Z, LOU Y J, RUAN S G. A periodic ross-Macdonald model in a patchy environment[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B)*, 2014, **19**(10): 3133-3145.
- [15] COSTANTINI C, LI S G, TOREE A D, et al. Density, survival and dispersal of anopheles gambiae complex mosquitoes in a west African Sudan savanna village[J]. *Medical and Veterinary Entomology*, 1996, **10**(3): 203-219.
- [16] MARTIN R H, SMITH H L. Abstract functional differential equations and reaction-diffusion systems[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, **321**: 1-44.
- [17] ZHAO X Q. *Dynamical Systems in Population Biology*[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2017.
- [18] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 1-550. (GUO Dajun. *Nonlinear Functional Analysis*[M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2001: 1-550. (in Chinese))
- [19] WANG J L, WANG J. Analysis of a reaction-diffusion cholera model with distinct dispersal rates in the human population[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2021, **33**: 549-575.

- [20] HALE J K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*[M]. Providence: American Mathematical Society, 1988.
- [21] HESS P. *Periodic Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*[M]. London: Longman Scientific and Technical, 1991: 1-139.
- [22] THIEME H R. Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity[J]. *SIAM Journal of Applied and Mathematics*, 2009, **70**(1): 188-211.
- [23] YANG T H, ZHANG L. Remarks on basic reproduction ratios for periodic abstract functional differential equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B)*, 2019, **24**: 6771-6782.
- [24] LIANG X, ZHANG L, ZHAO X Q. The principal eigenvalue for degenerate periodic reaction-diffusion systems[J]. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 2017, **49**(5): 3603-3636.
- [25] YU X, ZHAO X Q. A periodic reaction-advection-diffusion model for a stream population[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **258**(9): 3037-3062.
- [26] PROTTER M H, WEINBERGER H F. *Maximum Principles in Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [27] LI F X, ZHAO X Q. Global dynamics of a nonlocal periodic reaction-diffusion model of bluetongue disease[J]. *Journal of Differential Equations*, 2021, **272**: 127-163.
- [28] MAGAL P, ZHAO X Q. Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems[J]. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 2005, **37**: 251-275.
- [29] WU R W, ZHAO X Q. A reaction-diffusion model of vector-borne disease with periodic delays[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2019, **29**: 29-64.
- [30] LIANG X, ZHANG L, ZHAO X Q. Basic reproduction ratios for periodic abstract functional differential equations (with application to a spatial model for Lyme disease)[J]. *Journal of Dynamical and Differential Equations*, 2019, **31**: 1247-1278.
- [31] WANG K, ZHAO H Y, WANG H, et al. Traveling wave of a reaction-diffusion vector-borne disease model with nonlocal effects and distributed delay[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2021. DOI: 10.1007/s10884-01-10062-w.
- [32] 张笑嫣. 一类具有非线性发生率与时滞的离散扩散SIR模型临界行波解的存在性[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(12): 1317-1326. (ZHANG Xiaoyan. Existence of critical traveling wave solutions for a class of discrete diffusion SIR models with nonlinear incidence and time delay[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(12): 1317-1326.(in Chinese))
- [33] 陈妍. 时间周期的离散SIS模型的传播动力学[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(10): 1155-1163. (CHEN Yan. Propagation dynamics of a discrete SIS model with time periodicity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(10): 1155-1163.(in Chinese))