

横向非均匀温度场作用的 FGM 夹层 圆板热屈曲分析*

龚雪蓓^{1,2}, 赵伟东^{1,2}, 郭冬梅^{1,2}

(1. 青海大学 土木工程学院, 西宁 810016;

2. 青海省建筑节能材料与工程安全重点实验室, 西宁 810016)

摘要: 基于 von Kármán 几何非线性板理论, 导出了受横向非均匀温度场作用的幂律型功能梯度材料 (FGM) 夹层圆板的位移型几何非线性控制方程. 考虑不可移夹紧边界条件, 通过求解线性特征值问题, 得到了系统的有量纲临界屈曲温度差解析公式. 另外, 运用打靶法计算了非线性常微分方程两点边值问题. 考察了几何参数、组分材料特性、梯度指数、温度场参数和层厚比对 FGM 夹层圆板的临界屈曲温度差、热过屈曲平衡路径和平衡构形的影响. 当厚径比、梯度层相对厚度和梯度指数增加时, FGM 夹层圆板临界屈曲温度差均单调增加; 当半径和总厚度给定时, 随 FGM 层相对厚度增加, FGM 夹层圆板后屈曲变形显著减小.

关键词: 功能梯度材料; 夹层圆板; 非均匀温度场; 热屈曲; 打靶法

中图分类号: TU43 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430094

Thermal Buckling Analysis of FGM Sandwich Circular Plates Under Transverse Nonuniform Temperature Field Actions

GONG Xuebei^{1,2}, ZHAO Weidong^{1,2}, GUO Dongmei^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Qinghai University, Xining 810016, P.R.China;

2. Qinghai Provincial Key Laboratory of Energy-Saving Building Materials and Engineering Safety, Xining 810016, P.R.China)

Abstract: Based on the von Kármán geometric nonlinear plate theory, the displacement-type geometric nonlinear governing equations for FGM sandwich circular plates under transverse nonlinear temperature field actions were derived. With the immovable clamped boundary condition, the analytical formula for dimensional critical buckling temperature differences of the system was obtained from the solution of the linear eigenvalue problem. Moreover, the 2-point boundary value problem of ordinary differential equations was solved with the shooting method. The effects of geometric parameters, constituent material properties, gradient indexes, temperature field parameters and layer-thickness ratios on the critical buckling temperature differences, the thermal post-buckling equilibrium paths, and the buckling equilibrium configurations of FGM sandwich circular plates, were investigated. The results show that, with the increases of the thickness-radius ratio, the relative thickness of

* 收稿日期: 2022-03-21; 修订日期: 2022-05-05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52168053)

作者简介: 龚雪蓓 (1999—), 女, 硕士生 (E-mail: 754928145@qq.com);

赵伟东 (1972—), 男, 副教授, 硕士, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: zhwd.xbl@163.com).

引用格式: 龚雪蓓, 赵伟东, 郭冬梅. 横向非均匀温度场作用的 FGM 夹层圆板热屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(4): 419-430.

the FGM layer and the gradient index, the FGM sandwich circular plate's critical buckling temperature difference will increase monotonically. Given a fixed radius and a fixed total thickness, the postbuckling deformation of the FGM sandwich circular plate will decrease significantly with the relative thickness of the FGM layer.

Key words: FGM; sandwich circular plate; nonuniform temperature field; thermal buckling; shooting method

0 引 言

功能梯度材料(FGM)板壳通常是由陶瓷和金属两种组分材料沿厚度方向按照特定混合规则加工而成的一种新型梯度复合材料.与层压及纤维增强复合材料相比较,功能梯度材料能够明显减弱乃至消除不同组分材料之间的界面效应,从而有效解决因热膨胀失配和应力集中等不利因素导致材料失效的问题.陶瓷通常具有突出的耐高温性能和良好的抗腐蚀性能,金属通常具有优异的延展性和机械强度.由于陶瓷-金属 FGM 板壳结构兼具上述诸多优异性能,使其在诸如航空航天、热核反应、军事工业和化学工程等领域具有广阔的应用前景.

随着 FGM 板壳结构在现代工程领域的逐步应用,对其结构力学行为的研究吸引了诸多研究人员的注意.常见的分析方法有忽略横向剪切变形效应的经典理论和计及横向剪切变形效应的各种剪切理论.经典理论的数学形式简单、物理概念直观,但其分析精度稍显不足.剪切变形理论的结果更为精确,但其数学形式复杂、推导过程繁琐.基于经典板理论(CPT),Najafizadeh 和 Eslami^[1]讨论了 FGM 圆板轴对称热屈曲问题,推导得到了一般形式的平衡方程和稳定方程,给出了用于预测 FGM 圆板临界屈曲温度的解析解.基于一阶剪切变形理论(FSDT),Reddy 等^[2]导出了一个考虑三维热传导方程耦合的 FGM 板壳热弹性边值问题,并借助有限元方法研究了 FGM 圆柱壳与板的动态热弹耦合响应.Shen^[3]基于高阶剪切变形板理论(HSDT),考虑组分材料特性的温度依赖性,推导了功能梯度板的广义 von Kármán 大挠度方程,为 FGM 板壳的几何非线性分析奠定了基础.Van Do 等^[4]介绍了一种基于 HSDT 的横向剪切函数和基于径向点插值方法的精确、高效的无网格近似方法,分析了沿厚度具有不同温度分布的 FGM 板在边缘压缩荷载下的后屈曲响应.Ma 等^[5]基于 von Kármán 几何非线性理论,针对 FGM 圆板在热机械荷载作用下的非线性弯曲和后屈曲行为开展研究,并使用数值打靶法求解了非线性耦合常微分方程边值问题.Zhang 等^[6]基于 HSDT 和物理中面概念,研究了弹性地基上 FGM 矩形板的热后屈曲响应.Lee 等^[7]针对弹性地基上的 FGM 板,考虑厚度拉伸效应,通过修正四变量板理论的位移场,提出了一种简单有效的高阶剪切变形理论.陈明飞等^[8]基于平面应变理论,利用等几何有限元方法分析了弹性边界条件下面内功能梯度三角形板的面内振动特性.

与 FGM 板壳结构比较,由其发展得到的 FGM 夹层板壳结构,具有更为优异的阻热、防腐和力学性能.常见的 FGM 夹层板壳结构有两种类型,一种为 FGM 面层和均匀材料(陶瓷或金属)夹层连接而成的 FGM 夹层板壳结构(下文称此类结构为 A 类 FGM 夹层板壳结构),另一类为 FGM 夹层连接纯陶瓷和纯金属面层构成的 FGM 夹层板壳结构(下文称此类结构为 B 类 FGM 夹层板壳结构).到目前为止,研究人员针对 FGM 夹层板壳结构力学行为的研究已得到了诸多研究成果.Shen 等^[9]基于 HSDT,研究了考虑初始几何缺陷的 A 类 FGM 夹层板在不同热环境下的屈曲行为,Zenkour 等^[10]采用正弦剪切变形板理论推导了简支边 A 类 FGM 夹层矩形板的稳定性方程,对不同温度场条件下的控制方程进行了解析求解.Wang 等^[11]采用两步摄动法求解了置于弹性地基上的 A 类 FGM 夹层矩形板的控制方程.Alibeigloo^[12]将广义微分求积法应用于沿径向的状态空间方程,形成半解析状态空间微分求积法,并使用这种半解析状态空间微分求积法对不同边界条件下的 B 类 FGM 夹层圆板进行了轴对称热弹性分析.Mahi 等^[13]基于 FSDT 对幂律型简支边 A 类 FGM 夹层矩形板进行静力分析.Li 等^[14]基于静力平衡法推导了 B 类 FGM 夹层板在横向分布荷载作用下的控制方程,研究了体积分指数、厚度与边长比和层厚比对板弯曲特性的影响.Van Do 等^[15]提出了一种简单而精确的无网格逼近方法,在考虑初始几何缺陷的情况下对 A、B 类 FGM 夹层矩形板在边缘压力作用下的后屈曲行为进行了分析.

当幂律型 FGM 板壳或夹层板壳沿厚度方向存在温差时,沿厚度方向的 Fourier 热传导温度场存在无穷级数形式的解.数值计算时需要截取级数的多少项才能获得精度可接受的解呢?据笔者文献调阅所知,到目

前为止,该问题仍未被研究人员充分关注.Zhao^[16]针对幂律型 FGM 圆板,考察了截取的级数项数目对解的精度影响,获得了一些有意义的结果.本文针对夹紧边的 B 类幂律型 FGM 夹层圆板,考虑沿厚度非均匀温度场作用,基于层间连续性条件,给出了沿厚度方向的温度场分布函数的解析解,建立了基于经典板理论的轴对称几何非线性位移型控制方程与其边界条件(两点边值问题).本文首先将非线性边值问题退化为关于挠度的四阶线性边值问题,通过分析线性特征值问题,得到了系统的有量纲临界屈曲温度差解析解.然后运用数值打靶法求解非线性边值问题,求解时截取级数的前 97 项进行计算,得到了精度很好的热过屈曲平衡路径和平衡构形数值解,并进行了参数影响分析.当模型退化为 FGM 板时,通过识别屈曲平衡路径上分支点的值和用解析公式计算得到的系统的有量纲临界屈曲温度差,均能与已有文献结果很好一致.

1 基本方程

如图 1 所示的 FGM 夹层圆板,半径为 a ;总厚度为 h ; h_c , h_f 和 h_m 分别为纯陶瓷层、FGM 夹层和纯金属层的厚度.为便于分析,建立圆柱坐标系 $(Or\theta z)$,坐标轴正向如图所示.其中 $rO\theta$ 坐标面位于圆板中面内,坐标原点位于圆板中面形心处.中面内任意点 $(r, \theta, 0)$ 处的径向、环向和横向位移分别由 $U(r, \theta)$ (与 r 轴正向一致为正)、 $V(r, \theta)$ (与 θ 轴正向一致为正) 和 $W(r, \theta)$ (与 z 轴正向一致为正) 表示.

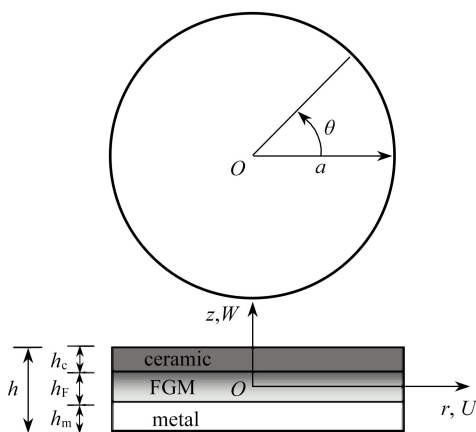


图 1 FGM 夹层圆板的几何和坐标系

Fig. 1 Geometry and the coordinate system of FGM sandwich circular plates

1.1 几何方程

在轴对称情况下,圆板中面任意点 $(r, \theta, 0)$ 处横向位移 W 和径向位移 U 都是径向坐标 r 的一元函数,即 $W = W(r)$, $U = U(r)$,环向位移 V 恒等于 0.基于 von Kármán 几何非线性板理论,圆板内任意一点 (r, θ, z) 的应变-位移关系为^[17]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r(z) \\ \varepsilon_\theta(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,r} + W_{,r}^2/2 - zW_{,rr} \\ U/r - zW_{,r}/r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中 $(\cdot)_{,r}$ 代表 (\cdot) 对 r 的一阶导数.

1.2 物理方程

在轴对称情况下,考虑温度应力,FGM 夹层圆板的本构关系^[18]表达为

$$\begin{pmatrix} \sigma_r(z) \\ \sigma_\theta(z) \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r(z) \\ \varepsilon_\theta(z) \end{pmatrix} - \frac{E(z)\alpha(z)T(z)}{1-\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中 $T(z)$ 表示圆板中任意点 (r, θ, z) 处相对初始无应力状态温度(即参考温度)的变温值,为厚度坐标 z 的一元函数; $E(z)$ 和 $\alpha(z)$ 分别是圆板中任意点 (r, θ, z) 处材料的等效弹性模量和等效热膨胀系数; μ 是 Poisson 比,本文假定为常数.

为得到 FGM 夹层板壳结构坐标 z 处的温度应力,需要求解如下的一维 Fourier 热传导边值问题^[19]:

$$-\frac{d}{dz} \left[K(z) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0, \quad T\left(-\frac{h}{2}\right) = T_1, \quad T\left(\frac{h}{2}\right) = T_u, \quad (3)$$

式中 $K(z)$ 是圆板中任意点 (r, θ, z) 处材料的等效导热系数; T_l 和 T_u 分别表示 FGM 夹层圆板金属侧表面和陶瓷侧表面相对参考温度的变温值, 用 $\Delta T = T_u - T_l$ 表示夹层圆板两表面之间的温度差. 为了物理概念直观, 本文建模过程使用 T_l, T_u 和 ΔT 作为系统的热荷载参数. 需要指出的是, 当金属侧表面温度相对参考温度不变化时 (即 $T_l = 0^\circ\text{C}$), 陶瓷侧的变温值 T_u 即为两表面温度差 (即 $\Delta T = T_u$), 本文热过屈曲数值解就是在这种情况下得到的.

假设 FGM 层材料体积分数为幂律分布^[16], 即

$$V_c(z) = (0.5 + z/h_F)^k, V_m(z) = 1 - V_c(z), \quad -h_F/2 \leq z \leq h_F/2, \quad (4)$$

式中 V_c 和 V_m 分别指陶瓷和金属组分材料的体积分, 非负指数 k 为梯度指数.

则 FGM 材料层坐标 z 处的材料等效弹性模量 $E(z)$ 、等效热膨胀系数 $\alpha(z)$ 和等效导热系数 $K(z)$ 可表示为厚度坐标 z 的函数^[20]:

$$E(z) = E_m \psi_1(\xi), \alpha(z) = \alpha_m \psi_2(\xi), K(z) = K_m \psi_3(\xi), \quad (5)$$

式中 E_m, α_m 和 K_m 分别为金属组分 (与金属面层材料相同) 材料的弹性模量、热膨胀系数和导热系数.

$\psi_i(\xi)$ 是无量纲坐标 $\xi (\xi = z/h_F)$ 的连续函数, 其数学表达式为

$$\psi_i(\xi) = 1 + \eta_i(0.5 + \xi)^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

式中 $\eta_i = r_i - 1, r_1 = E_c/E_m, r_2 = \alpha_c/\alpha_m, r_3 = K_c/K_m$, 其中 E_c, α_c 和 K_c 分别为陶瓷组分材料 (与陶瓷面层材料相同) 的弹性模量、热膨胀系数和导热系数.

本文所用组分材料特性^[16] 如表 1 所示.

表 1 金属和陶瓷组分的材料特性

Table 1 Material properties of metal and ceramic

material property	aluminum (Al)	ceramic (Al_2O_3)
elastic modulus E/GPa	70	380
thermal expansion coefficient $\alpha/^\circ\text{C}^{-1}$	2.3×10^{-5}	7.4×10^{-6}
thermal conductivity $K/(\text{W/mK})$	204	10.4
Poisson's ratio μ	0.3	0.3

将式(6)取 $i = 3$ 代入式(5)中的第三式, 再将式(5)中的第三式代入式(3), 考虑 $K(z) = K_m (-h_m - h_F/2 \leq z \leq -h_F/2)$, $K(z) = K_c (h_F/2 \leq z \leq h_F/2 + h_c)$ 与温度场边界条件和连续性条件, 解边值问题(3)得到如下温度场分布函数:

$$T(z) = \begin{cases} T_c + \frac{A\Delta T}{h_F + h_c A + h_m B} \left(z - \frac{h_F}{2} \right), & \frac{h_F}{2} \leq z \leq \frac{h_F}{2} + h_c, \\ T_m + \frac{h_F B \Delta T}{h_F + h_c A + h_m B} \left[\sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_F} \right)^{ks+1} \right], & N \rightarrow \infty, -\frac{h_F}{2} \leq z \leq \frac{h_F}{2}, \\ T_m + \frac{B\Delta T}{h_F + h_c A + h_m B} \left(z + \frac{h_F}{2} \right), & -h_m - \frac{h_F}{2} \leq z \leq -\frac{h_F}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

式中 $T_c = [h_c A T_l + (h_F + h_m B) T_u] / (h_F + h_c A + h_m B)$ 为 FGM 夹层纯陶瓷侧相对参考温度的变温值, $T_m = [h_m B T_u + (h_F + h_c A) T_l] / (h_F + h_c A + h_m B)$ 为 FGM 夹层纯金属侧相对参考温度的变温值, $\Delta T = T_u - T_l$ 为圆板上下表面温度差, 无量纲系数 A, B 分别为

$$A = \sum_{s=0}^N (-\eta_3)^s / \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1}, B = 1 / \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks}, \quad N \rightarrow \infty.$$

在轴对称变形情况下, FGM 夹层圆板的薄膜力和弯曲内力为

$$(N_i, M_i) = \int_{-h_m - h_F/2}^{h_F/2 + h_c} \sigma_i(1, z) dz, \quad i = r, \theta. \quad (8)$$

将式(1)、(5)、(7)代入式(2), 再将式(2)代入式(8), 得内力/内矩表达式如下:

$$N_r = S_0 \left(U_{,r} + \mu \frac{U}{r} + \frac{1}{2} W_{,r}^2 \right) - S_1 \left(\frac{\mu}{r} W_{,r}^2 + W_{,rr} \right) + N_T, \quad (9)$$

$$N_\theta = S_0 \left(\frac{U}{r} + \mu U_{,r} + \frac{\mu}{2} W_{,r}^2 \right) - S_1 \left(\frac{1}{r} W_{,r} + \mu W_{,rr} \right) + N_T, \quad (10)$$

$$M_r = S_1 \left(U_{,r} + \mu \frac{U}{r} + \frac{1}{2} W_{,r}^2 \right) - S_2 \left(\frac{\mu}{r} W_{,r} + W_{,rr} \right) + M_T, \quad (11)$$

$$M_\theta = S_1 \left(\frac{U}{r} + \mu U_{,r} + \frac{\mu}{2} W_{,r}^2 \right) - S_2 \left(\frac{1}{r} W_{,r} + \mu W_{,rr} \right) + M_T. \quad (12)$$

刚度系数 S_i 由下式计算:

$$S_i = \int_{-h_m - h_F/2}^{-h_F/2} \frac{E_m}{1 - \mu^2} z^i dz + \int_{-h_F/2}^{h_F/2} \frac{E(z)}{1 - \mu^2} z^i dz + \int_{h_F/2}^{h_F/2 + h_c} \frac{E_c}{1 - \mu^2} z^i dz, \quad i = 0, 1, 2, \quad (13)$$

N_T 和 M_T 分别为热膜力和热弯矩, 可由下式计算:

$$(N_T, M_T) = - \int_{-h_m - h_F/2}^{h_F/2 + h_c} \frac{E(z) \alpha(z) T(z)}{1 - \mu} (1, z) dz. \quad (14)$$

将式(5)中的第一式代入式(13), 通过积分运算得到刚度系数 S_i :

$$S_i = A_m h^i \chi_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (15)$$

式中 $A_m = E_m h / (1 - \mu^2)$ 是均质金属圆板的抗拉刚度, 无量纲系数 χ_i 为

$$\chi_0 = \frac{h_m}{h} + \frac{h_F}{h} \left(1 + \frac{\eta_1}{k+1} \right) + \frac{h_c}{h} (1 + \eta_1), \quad (16)$$

$$\chi_1 = \frac{-h_m(h_m + h_F)}{2h^2} + \frac{h_F^2}{h^2} \eta_1 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2} \right) + \frac{h_c(h_c + h_F)}{2h^2} (1 + \eta_1), \quad (17)$$

$$\chi_2 = \frac{h_m(3h_F^2 + 6h_F h_m + 4h_m^2)}{12h^3} + \frac{h_F^3}{h^3} \left[\frac{1}{12} + \eta_1 \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] + \frac{h_c(3h_F^2 + 6h_F h_c + 4h_c^2)}{12h^3} (1 + \eta_1). \quad (18)$$

将式(5)的第一、第二式和式(7)代入式(14)得

$$(N_T, M_T) = - (1 + \mu) A_m \alpha_m T_1(\zeta_0, h\zeta_1), \quad (19)$$

无量纲系数 $\zeta_i (i = 0, 1)$ 的表达式为

$$\zeta_0 = \frac{h_m(T_m + T_1)}{h(2T_1)} + (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \frac{h_c(T_u + T_c)}{h(2T_1)} + \beta_0, \quad (20)$$

$$\zeta_1 = - \left(\frac{h_m}{2h} + \frac{h_m^2}{2h^2} \right) \left(\frac{T_m}{T_1} + \frac{T_m - T_1}{T_1} \frac{h}{2h_m} \right) + (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \left(\frac{h_c}{2h} + \frac{h_c^2}{2h^2} \right) \left(\frac{T_c}{T_1} - \frac{T_u - T_c}{T_1} \frac{h}{2h_c} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{h_m}{2h} + \frac{h_m^2}{3h^2} \right) \frac{T_m - T_1}{T_1} + (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \left(\frac{1}{4} + \frac{h_c}{2h} + \frac{h_c^2}{3h^2} \right) \frac{h_u - T_c}{h_1} + \beta_1. \quad (21)$$

无量纲系数 β_i 通过下式计算:

$$\beta_i = \int_{-1/2}^{1/2} \psi_1(\xi) \psi_2(\xi) \psi_4(\xi) \xi^i d\xi, \quad i = 0, 1, \quad (22)$$

式中

$$\psi_4(\xi) = 1 + \eta_4 \left[\sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1} \left(\frac{1}{2} + \xi \right)^{ks+1} \right] / \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$\eta_4 = r_4 - 1, r_4 = T_c/T_m, N$ 为非负整数。

将式(6) ($i = 1, 2$) 和式(23)代入式(22), 得 β_i 的表达式为

$$\beta_0 = \frac{T_m}{T_1} \left(1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k+1} + \frac{\eta_1 \eta_2}{2k+1} \right) +$$

$$\frac{T_c - T_m}{T_1} \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1} \left[\frac{1}{ks+2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k(s+1)+2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{k(s+2)+2} \right] / \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$\beta_1 = \frac{T_m}{T_1} \left[(\eta_1 + \eta_2) \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2} \right) + \eta_1 \eta_2 \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{4k+2} \right) \right] + \frac{T_c - T_m}{T_1} \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks+1} \left[\left(\frac{1}{ks+3} - \frac{1}{2ks+4} \right) + (\eta_1 + \eta_2) \left(\frac{1}{k(s+1)+3} - \frac{1}{2k(s+1)+4} \right) + \eta_1 \eta_2 \left(\frac{1}{k(s+2)+3} - \frac{1}{2k(s+2)+4} \right) \right] / \sum_{s=0}^N \frac{(\eta_3)^s}{ks+1}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (25)$$

1.3 平衡方程

轴对称情况下,功能梯度夹层圆板的平衡微分方程为

$$(rN_r)_{,r} - N_\theta = 0, \quad (26)$$

$$(rM_r)_{,rr} - M_{\theta,r} + (rN_r W_r)_{,r} + qr = 0, \quad (27)$$

其中 q 为横向均匀分布荷载,与 z 轴正向一致为正。

2 边值问题

2.1 控制方程

为便于数值计算,引入下列无量纲变量:

$$x = r/a, \quad (w, \delta) = (W, a)/h, \quad u = Ua/h^2, \quad \lambda = (1 + \mu) \alpha_m T_1 \zeta_0 \chi_0 \delta^2 / (\chi_0 \chi_2 - \chi_1^2),$$

$$Q = (1 - \mu^2) q \delta^4 \chi_0 / [E_m (\chi_0 \chi_2 - \chi_1^2)],$$

其中 x 为无量纲径向坐标变量, w, u 分别为圆板中面上任意一点的横向和径向无量纲位移, λ 为相对参考温度的无量纲变温, Q 为无量纲横向均布荷载。

将式(9)–(12)代入式(26)、(27),考虑前述无量纲变换关系,得到一组无量纲位移型几何非线性常微分控制方程如下:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \lambda \nabla^2 w - \frac{\chi_0^2}{\chi_0 \chi_2 - \chi_1^2} \{ (u_{,x} + w_{,x}^2/2 + \mu u/x) w_{,xx} + [u/x + \mu u_{,x} + \mu (w_{,x})^2/2] w_{,x/x} \} + \frac{\chi_0 \chi_1}{\chi_0 \chi_2 - \chi_1^2} [(2\mu w_{,xx} + w_{,x/x}) w_{,x/x} + (w_{,xx})^2] = Q, \quad (28)$$

$$u_{,xx} + u_{,x/x} - u/x^2 + w_{,x} w_{,xx} + (1 - \mu) w_{,x}^2/2x - \chi_1/\chi_0 (\nabla^2 w)_{,x} = 0, \quad (29)$$

式中 $\nabla^2(\cdot) = (\cdot)_{,xx} + (\cdot)_{,x/x}$, $(\cdot)_x$ 表示关于 x 的一阶导数。

2.2 边界条件

不可移夹紧边界条件为

$$w(1) = 0, \quad w_{,x}(1) = 0, \quad u(1) = 0; \quad (30)$$

中心对称条件为

$$w_{,x}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (w_{,xxx} + w_{,xx/x} - w_{,x/x^2}) = 0, \quad u(0) = 0. \quad (31)$$

3 线性特征值分析

我们已经知道,周边夹紧的 FGM 夹层圆板的热屈曲属于分岔屈曲问题.结构的临界屈曲温度差可以通过识别结构热过屈曲平衡路径上的分岔点对应的值来确定,也可以通过求解线性特征值问题得到.考虑到分岔点对应的变形是微小的,因此忽略非线性控制方程中的径向位移函数 u 及其各阶导数与全部非线性项,得到一个关于挠度 w 的四阶线性微分方程如下:

$$\nabla^4 w + \lambda \nabla^2 w = 0. \quad (32)$$

方程式(32)与边界条件式(30)中的前二式和中心对称条件式(31)中的前二式构成一个线性特征值问题.通

过求解该特征值问题,可以得到无量纲临界屈曲温度 λ_{cr} (即特征值)。考虑到工程设计人员对该系统的最低临界屈曲温度 (即最小特征值) 更感兴趣,而最小特征值对应于圆板的一阶轴对称屈曲的分岔点解,因此,为了得到最小特征值,可以假设一个圆板中心挠度有限的一元挠度函数如下:

$$w(x) = C_1 + C_2 J_0(\sqrt{\lambda}x), \quad (33)$$

式中 J_0 为零阶 Bessel 函数, C_1 和 C_2 为积分常数。

将式(33)代入边界条件式(30)中的前二式,得到如下齐次线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & J_0(\sqrt{\lambda}) \\ 0 & -\sqrt{\lambda}J_{0,x}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

式中 $J_{0,x}$ 代表 J_0 对 x 的一阶导数。

在屈曲状态下,积分常数 C_1 和 C_2 不全为零,根据 Cramer 法则,线性代数方程式(34)的系数矩阵的行列式必然为零,再考虑到最小特征值 $\lambda \neq 0$, 因此有

$$J_{0,x}(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (35)$$

根据著名的 Bessel 函数关系,有

$$J_{0,x}(\sqrt{\lambda}x) = -\sqrt{\lambda}J_1(\sqrt{\lambda}x), \quad (36)$$

式中 J_1 为一阶 Bessel 函数。

对式(36),当 $x = 1$ 时,考虑式(35),有

$$J_1(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (37)$$

基于式(37),可以得到系统最小的特征值为

$$\lambda_{cr} = 14.684. \quad (38)$$

根据式(38),再结合前文给出的无量纲温度与有量纲温度变换关系,对于具有实际参数的不可移夹紧边 FGM 夹层圆板,当金属侧表面相对初始参考温度变温值为 T_1 时,系统的有量纲临界屈曲温度 $(T_u)_{cr}$ 为

$$(T_u)_{cr} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{14.684(\chi_0\chi_2 - \chi_1^2)}{(1 + \mu)\alpha_m\chi_0\delta^2} - \bar{h}T_1 \right], \quad (39)$$

式中无量纲系数 λ 和 \bar{h} 表示如下:

$$\lambda = \left\{ \frac{h_m^2 B}{2h} + (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \frac{h_c(2h_F + h_c A + 2h_m B)}{2h} + \left(1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k + 1} + \frac{\eta_1 \eta_2}{2k + 1} \right) h_m B + \right. \\ \left. h_F B \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks + 1} \left[\frac{1}{ks + 2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k(s + 1) + 2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{k(s + 2) + 2} \right] \right\} \frac{1}{h_F + h_c A + h_m B}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (40)$$

$$\bar{h} = \left\{ \frac{h_m(2h_F + 2h_c A + h_m B)}{2h} + (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \frac{h_c^2 A}{2h} + \left(1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k + 1} + \frac{\eta_1 \eta_2}{2k + 1} \right) (h_F + h_c A) - \right. \\ \left. h_F B \sum_{s=0}^N \frac{(-\eta_3)^s}{ks + 1} \left[\frac{1}{ks + 2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{k(s + 1) + 2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{k(s + 2) + 2} \right] \right\} \frac{1}{h_F + h_c A + h_m B}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (41)$$

在式(39)的基础上,可进一步定义有量纲临界屈曲温度差如下:

$$\Delta T_{cr} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{14.684(\chi_0\chi_2 - \chi_1^2)}{(1 + \mu)\alpha_m\chi_0\delta^2} - (\bar{h} + \lambda)T_1 \right]. \quad (42)$$

由式(42)易见,系统的临界屈曲温度差不但依赖于系统本身的几何物理参数、梯度指数和所截取的级数项数目,也与变温值 T_1 有关。需要说明的是,本文仅针对 $T_1 = 0^\circ\text{C}$ 的情况进行计算,故系统的临界屈曲温度差在数值上等于使系统发生临界屈曲时陶瓷侧表面的温升值。换句话说,当 $T_1 = 0^\circ\text{C}$ 时,用式(39)计算得到的 $(T_u)_{cr}$ 和用式(42)计算得到的 ΔT_{cr} 在数值上是相等的。另外需要指出,式(39)和式(42)经退化,可用于梯度材料圆板和均匀材料圆板的分析计算。

4 热过屈曲分析

控制方程(28)、(29)与边界条件(30)和中心对称条件(31)构成几何非线性常微分方程两点边值问题,可以用其考察固定边 FGM 夹层圆板在轴对称热机械荷载作用下的几何非线性力学行为.当横向荷载 Q 充分小时,可以用其考察系统的热过屈曲问题.限于篇幅,本文仅运用上述非线性边值问题讨论系统的热过屈曲问题,并进行相应的参数影响分析.考虑到模型属于几何非线性两点边值问题,因此本文运用数值打靶法对其求解.

4.1 打靶法求解简单说明

为了用打靶法求解上述两点边值问题,现假设^[21]

$$\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6]^T = [w \ w' \ w'' \ w''' \ u \ u']^T. \quad (43)$$

考虑方程(28)、(29)和中心对称条件式(31)中的第二式在 $x = 0$ 处具有奇异性,数值计算时,可在区间 $[\Delta x, 1]$ 上(本文计算时取 $\Delta x = 10^{-4}$) 计算.为了运用打靶法求解,需将原两点边值问题转化为以下初值问题:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}, x) = [y_2 \ y_3 \ y_4 \ \varphi_1 \ y_6 \ \varphi_2]^T, \quad x \in [\Delta x, 1], \quad (44)$$

式中 $\varphi_i (i = 1, 2)$ 可从方程(28)和(29)中得到.

由于位移函数在 $x = 0$ 处连续可微,当 Δx 足够小时,可以用 $x = \Delta x$ 处的值替代 $x = 0$ 处的值,即在 $x = 0$ 处的中心对称条件可表示如下:

$$\mathbf{Y}(\Delta x) = [V_1 \ 0 \ V_2 \ -V_2/x \ 0 \ V_3]^T, \quad (45)$$

式中 ζ 为 $x = \Delta x$ 处的初始挠度(赋值); $V_i (i = 1, 2, 3)$ 为待定参数,由 $x = 1$ 处的边界条件确定.以上是本文数值求解过程中对打靶法使用方法的简单说明,有关打靶法数值求解方法更为详细的介绍和具体实现步骤和程序可以参阅文献[22-23].

4.2 结果验证

将本文 FGM 夹层圆板退化为 FGM 圆板,考虑沿厚度非均匀温度场作用(取温度级数解前 7 项计算),在金属侧表面相对参考温度未发生变温(即 $T_1 = 0^\circ\text{C}$) 的情况下,表 2 给出了不同厚径比和不同梯度指数的 FGM 圆板临界屈曲温度差 ΔT_{cr} (从识别过屈曲平衡路径上分岔点处的值和用式(42)进行计算两种途径得到),表中同时给出了文献[24]的结果.可以看出,本文结果与文献结果几乎一致.

表 2 具有不同厚径比和梯度指数的 FGM 圆板在 $T_1 = 0^\circ\text{C}$ 时对应的临界屈曲温度差 ΔT_{cr}

Table 2 Critical buckling temperature difference ΔT_{cr} of FGM circular plates with different thickness-radius ratios and gradient indexes for $T_1 = 0^\circ\text{C}$

k		h/a				
		0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
0	solution in ref. [24]	635.828	405.821	228.898	101.590	25.433
	present solution	636.000	407.040	228.960	101.760	25.440
0.5	solution in ref. [24]	475.230	304.146	171.083	76.037	19.009
	present solution	475.061	304.039	171.021	76.009	19.002
1	solution in ref. [24]	384.600	246.153	138.456	61.536	15.384
	present solution	384.453	246.050	138.433	61.512	15.378

4.3 热过屈曲分析

我们已经知道,当幂律型功能梯度板两侧存在温度差时,其沿厚度方向的温度场函数可以表达为无穷级数.由于级数收敛慢,需要取相当多项才能获得精度可接受的解^[16].在给定层厚比为 2 : 1 : 2、底面温度相对参考温度不改变(即 $T_1 = 0^\circ\text{C}$)、梯度指数 $k = 1$ 和厚径比 $h/a = 0.05$ 的情况下,图 2 给出了一组不同的温度级数项数 N 对应的 FGM 夹层圆板(固定边界)的热过屈曲平衡路径.其中 $N = 0$ 为对应级数的前两项的计算结果,此种情况下沿板厚的温度场退化成了线性温度场.由图 2 可以判断,当幂律型梯度夹层板/壳在两表面之间存在温度差时,如果将沿厚度的温度场退化为线性温度场,数值解会严重失真.当 $N \geq 1$ 时,沿梯度层厚度

方向的温度场为非线性温度场,沿均质面层依然为线性温度分布.从图中可以看出,当 $N = 95$ 时(对应级数的前 97 项),数值解收敛到了一个很理想的程度.因此对于两表面存在温差的 FGM 夹层圆板,为了保证解具有足够的精度,除非特别说明,本文数值结果均为对应级数前 97 项的结果.

为了考察厚径比对 FGM 夹层圆板热过屈曲平衡路径的影响,在给定层厚比为 2 : 1 : 2、底面相对参考温度的温升 $T_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ 、梯度指数 $k = 1$ 的情况下,针对一组不同的厚径比 h/a ,图 3 给出了固定边的 FGM 夹层圆板的一组热过屈曲平衡路径.从图中可以看出,随着厚径比的增加,板的临界屈曲温度差 ΔT_{cr} 增加.因为当厚径比 h/a 增加时,板的弯曲刚度随之增大,结构抗屈曲能力增加,该现象与定性结论一致.

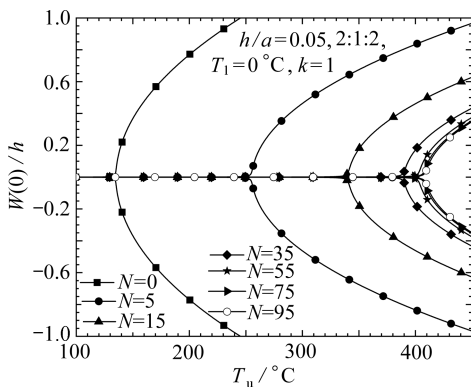


图 2 不同的温度级数项数目对应的 FGM 夹层圆板热屈曲平衡路径

Fig. 2 Thermal buckling equilibrium paths of FGM sandwich circular plates corresponding to different numbers of temperature series terms

为了考察梯度指数 k 对 FGM 夹层圆板热过屈曲平衡路径的影响,在给定厚径比 $h/a = 0.05$ 、层厚比为 2 : 1 : 2、底面温升 $T_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ 的情况下,图 4 给出了多个梯度指数 k 对应的 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡路径.从图可以看出,临界屈曲温度 ΔT_{cr} 随着 k 的增加而增大,这里再次表明,对于层厚比为 2 : 1 : 2 的 FGM 夹层圆板,当梯度指数 k 增加时,结构抵抗热屈曲的能力是增加的.另外可以看出,随着梯度指数 k 的增加,其对于临界屈曲温度差 ΔT_{cr} 的影响逐渐减小,这是因为当梯度指数 k 较小时, k 对组分材料体积分数的影响更为显著,而随着 k 的增加,其对组分材料体积分数的影响逐渐减小.

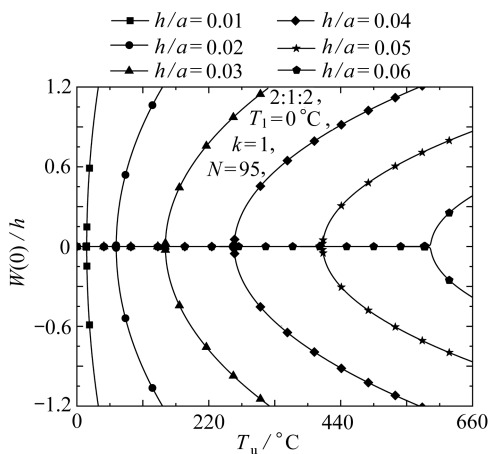


图 3 厚径比对 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡路径的影响

Fig. 3 Effects of thickness-radius ratios on thermal postbuckling equilibrium paths of FGM sandwich circular plates

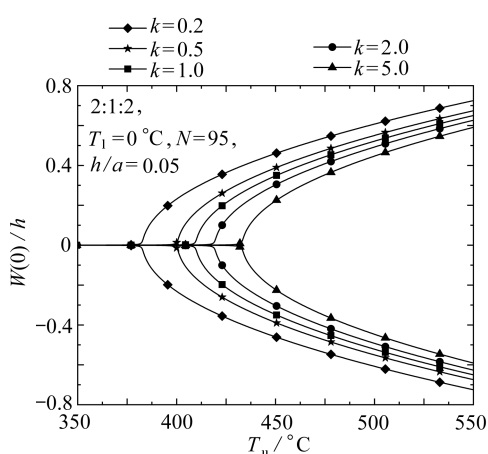


图 4 梯度指数对 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡路径的影响

Fig. 4 Effects of gradient indexes on thermal postbuckling equilibrium paths of FGM sandwich circular plates

为了考察层厚比对 FGM 夹层圆板热过屈曲平衡路径的影响,图 5 给出了不同层厚比对应的 FGM 夹层

圆板的热过屈曲平衡路径.从图中可以看出,在厚径比 h/a 、梯度指数 k 和底面相对参考温度的温升 T_1 给定的情况下,随着梯度层相对厚度的增加,临界屈曲温度 ΔT_{cr} 增加.

给定半径 $a = 120 \text{ mm}$ 、梯度指数 $k = 1$ 、底面温升 $T_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ 、上表面温升 $T_u = 480 \text{ }^\circ\text{C}$ 和层厚比为 $1:2:1$ 的情况下,图6给出了不同厚度的FGM夹层圆板的热过屈曲平衡构形.可以看出,厚度 h 越小,过屈曲变形越大,该现象与预期结果一致.

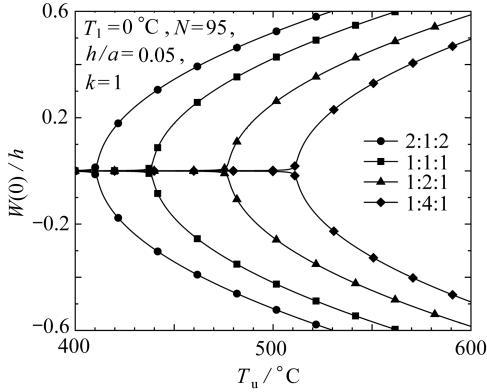


图5 层厚比对 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡路径的影响

Fig. 5 Effects of the layer-thickness ratios on thermal postbuckling equilibrium paths of FGM sandwich circular plates

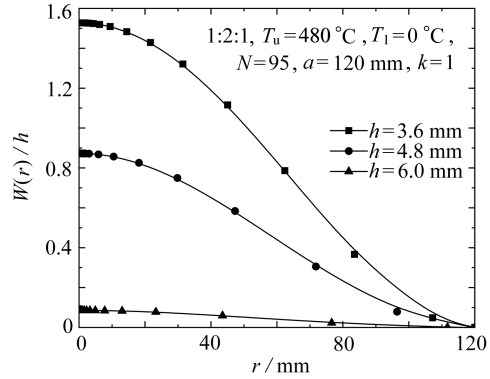


图6 不同厚度下 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡构形

Fig. 6 Thermal postbuckling equilibrium configurations of FGM sandwich circular plates with different thicknesses

给定半径 $a = 120 \text{ mm}$ 、厚度 $h = 6 \text{ mm}$ 、梯度指数 $k = 1$ 、底面温升 $T_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ 、上表面温升 $T_u = 480 \text{ }^\circ\text{C}$ 时,图7给出了不同层厚比下 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡构形.从图中可以看出,在厚度和半径给定的情况下,梯度层相对厚度越小,FGM 夹层圆板后屈曲变形越大.该现象表明,在 FGM 夹层圆板半径和厚度不变的情况下,通过改变层厚比,就可以显著改变 FGM 夹层圆板后屈曲变形程度,为工程中的弹性元件和结构设计提供了重要参考信息.

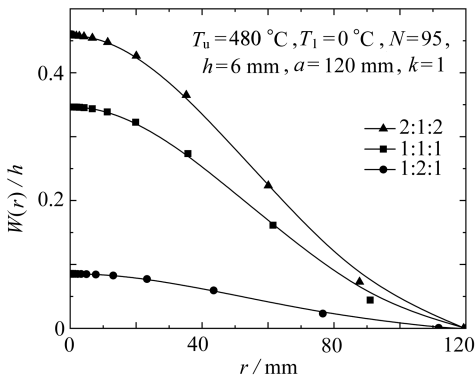


图7 不同层厚比的 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡构形

Fig. 7 Thermal postbuckling equilibrium configurations of FGM sandwich circular plates with different layer-thickness ratios

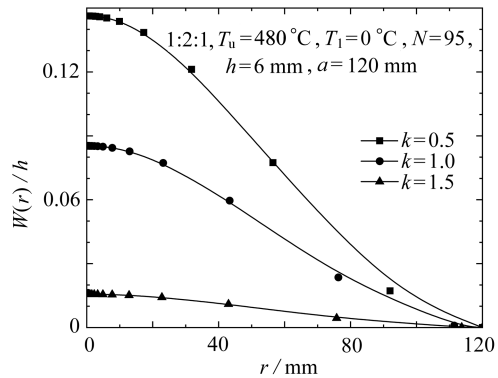


图8 不同梯度指数的 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡构形

Fig. 8 Thermal postbuckling equilibrium configurations of FGM sandwich circular plates with different gradient indices

给定半径 $a = 120 \text{ mm}$ 、厚度 $h = 6 \text{ mm}$ 、底面温升 $T_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ 、上表面温升 $T_u = 480 \text{ }^\circ\text{C}$ 和层厚比为 $1:2:1$ 的情况下,图8给出了不同梯度指数对应的 FGM 夹层圆板的热过屈曲平衡构形.从图中可以看出,梯度指数 k 越小,FGM 夹层圆板后屈曲变形越大.该现象表明,在 FGM 夹层圆板半径、厚度以及层厚比不变的情况下,通过调整 FGM 层的梯度指数,可以显著改变 FGM 夹层圆板后屈曲变形程度,同样为工程中的弹性元件和结构设计提供了重要的参考信息.

5 结 论

本文基于经典板理论,详细考察了横向非均匀温度场作用的边界夹紧的幂律型 FGM 夹层圆板的临界屈曲温度差和热过屈曲特性,得到了如下主要结论:

给定层厚比和梯度指数,随厚径比的增加,FGM 夹层圆板的临界屈曲温度差单调增加.给定层厚比和厚径比,随梯度指数的增加,FGM 夹层圆板的临界屈曲温度差单调增加.给定厚径比和梯度指数,随 FGM 层相对厚度的增加,FGM 夹层圆板的临界屈曲温度差单调增加.给定半径和厚度,随着面板相对厚度增加,FGM 夹层圆板的热过屈曲变形显著增加;随着梯度指数减小,FGM 夹层圆板的热过屈曲变形显著增加.

参考文献(References):

- [1] NAJAFIZADEH M M, ESLAMI M R. First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates[J]. *AIAA Journal*, 2012, **40**(7): 1444-1450.
- [2] REDDY J N, CHIN C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1998, **21**(6): 593-626.
- [3] SHEN H S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, **44**(3): 561-584.
- [4] VAN DO V N, CHANG K H, LEE C H. Post-buckling analysis of FGM plates under in-plane mechanical compressive loading by using a mesh-free approximation[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, **89**(7): 1421-1446.
- [5] MA L S, WANG T J. Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(13/14): 3311-3330.
- [6] ZHANG D G, ZHOU H M. Mechanical and thermal post-buckling analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on nonlinear elastic foundations[J]. *Thin-Walled Structures*, 2015, **89**: 142-151.
- [7] LEE W H, HAN S C, PARK W T. A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation[J]. *Composite Structures*, 2015, **122**: 330-342.
- [8] 陈明飞, 刘坤鹏, 靳国永, 等. 面内功能梯度三角形板等几何面内振动分析[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(2): 156-170.(CHEN Mingfei, LIU Kunpeng, JIN Guoyong, et al. Isogeometric in-plane vibration analysis of functionally graded triangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 156-170. (in Chinese))
- [9] SHEN H S, LI S R. Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties[J]. *Composites (Part B): Engineering*, 2008, **39**(2): 332-344.
- [10] ZENKOUR A M, SOBHY M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates[J]. *Composite Structures*, 2010, **93**(1): 93-102.
- [11] WANG Z X, SHEN H S. Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations[J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(10): 2521-2532.
- [12] ALIBEIGLOO A. Thermo elasticity solution of sandwich circular plate with functionally graded core using generalized differential quadrature method[J]. *Composite Structures*, 2016, **136**: 229-240.
- [13] MAHI A, BEDIA E A A, TOUNSI A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(9): 2489-2508.
- [14] LI D, DENG Z, XIAO H, et al. Bending analysis of sandwich plates with different face sheet materials and functionally graded soft core[J]. *Thin-Walled Structures*, 2018, **122**: 8-16.
- [15] VAN DO V N, LEE C H. Numerical investigation on post-buckling behavior of FGM sandwich plates subjected to in-plane mechanical compression[J]. *Ocean Engineering*, 2018, **170**: 20-42.

- [16] ZHAO W. Nonlinear axisymmetric thermomechanical response of FGM circular plates[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, **42**(7): 3-10.
- [17] HUANG C L, SANDMAN B E. Large amplitude vibrations of a rigidly clamped circular plate[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1971, **6**(4): 451-468.
- [18] LI S R, ZHANG J H, ZHAO Y G. Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection[J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, **45**(5): 528-536.
- [19] VAN DO V N, LEE C H. Nonlinear thermal buckling analyses of functionally graded circular plates using higher-order shear deformation theory with a new transverse shear function and an enhanced mesh-free method [J]. *Acta Mechanica*, 2018, **229**: 3787-3811.
- [20] REDDY J N, WANG C M, KITIPORNCHAI S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 1999, **18**(2): 185-199.
- [21] 王雪, 赵伟东. 功能梯度梁在热-机械荷载作用下的几何非线性分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(5): 508-517.(WANG Xue, ZHAO Weidong. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded beam under thermomechanical loading[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(5): 508-517.(in Chinese))
- [22] 李世荣, 苏厚德, 程昌钧. 热环境中粘贴压电层功能梯度材料梁的自由振动[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(8): 907-918.(LI Shirong, SU Houde, CHENG Changjun. Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(8): 907-918.(in Chinese))
- [23] LIS R, BATRA R C, MA L S. Vibration of thermally post-buckled orthotropic circular plate[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2007, **30**(1): 43-57.
- [24] NAJAFIZADEH M M, HEDAYATI B. Refined theory for thermoelastic stability of functionally graded circular plates[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2004, **27**(9): 857-880.