

热传导问题杂交基本解有限元法虚拟源点的探究*

张 凯, 王克用, 齐东平

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院, 上海 201620)

摘要: 针对热传导问题, 提出了杂交基本解有限元法. 首先, 假设两个独立场: 一个为利用基本解线性组合近似的单元域内温度场, 另一个为使用与传统有限元法相同形式的辅助网线温度场. 然后, 利用修正变分泛函将上述两个独立场关联起来, 并导出有限元列式. 然而, 该方法的准确性很大程度上取决于源点的分布和数量, 通常将源点布置在单元外部两种虚拟边界上: 与单元相似的边界和圆形边界. 此外, 还提出了双重虚拟边界, 并与上述两种源点布局方式进行对比. 通过两个典型数值算例, 验证了该文方法在不同源点布局下的有效性和对网格畸变的不敏感性.

关键词: 基本解; 有限元法; 修正变分泛函; 虚拟边界; 网格畸变

中图分类号: O242.21; O343.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430077

Research on the Fictitious Source Points of the Hybrid Fundamental Solution-Based Finite Element Method for Heat Conduction Problems

ZHANG Kai, WANG Keyong, QI Dongping

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R. China)

Abstract: The hybrid fundamental solution-based finite element method was proposed for heat conduction problems. Firstly, 2 independent fields were assumed; the intra-element temperature field approximated through the linear combination of fundamental solutions, and the auxiliary frame temperature field in the same form as that in the conventional finite element method. Then, a modified variational functional was employed to link the 2 independent fields and derive the finite element formulation. However, the accuracy of the method is strongly dependent on the distribution and the number of source points. The source points were usually placed on 2 fictitious boundaries outside the element; one is similar to the element shape, the other is a circular one. Furthermore, the dual fictitious boundary scheme was proposed for comparison with the above fictitious boundaries. With different configurations of source points, 2 typical numerical examples were given to demonstrate the validity and the insensitivity to mesh distortion of the proposed method.

Key words: fundamental solution; finite element method; modified variational functional; fictitious boundary; mesh distortion

* 收稿日期: 2022-03-10; 修订日期: 2022-05-15

基金项目: 上海市自然科学基金项目(19ZR1421400)

作者简介: 张凯(1996—), 男, 硕士生(E-mail: kai_zhangly@163.com);

王克用(1975—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: keyong_wang@126.com).

引用格式: 张凯, 王克用, 齐东平. 热传导问题杂交基本解有限元法虚拟源点的探究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(4): 431-440.

0 引言

杂交 Trefftz 有限元法 (HT-FEM) 最早由 Jirousek 和 Leon^[1] 在对薄板体弯曲问题的研究中提出, 该方法融合了传统有限元法 (FEM) 和边界元法 (BEM) 的诸多优点, 并且摒弃了它们的一些缺点^[2-4]. 对于某些物理问题, 杂交 Trefftz 有限元法很难得到相应的完备解, 且需要选择合适的 Trefftz 项数来获得预期结果. 为克服这一缺点, 近年来, 基于基本解的杂交有限元法 (HFS-FEM) 得到了广泛的关注^[4-6]. 与杂交 Trefftz 有限元法相似, 杂交基本解有限元法也假设两个独立的温度场: 单元域内温度场和单元边界网线场. 不同之处在于, 后者利用控制方程基本解的线性组合来近似单元域内场, 而前者采用完备解. 引入修正变分泛函将上述两个场关联起来, 导出仅含边界积分的有限元列式, 降低了求解维度, 从而减少了计算量, 稀疏网格下也能获得理想的精度^[6-11]. 显然, 该方法几乎继承了杂交 Trefftz 有限元法的所有优点, 且规避了难以构造 Trefftz 函数的问题. 到目前为止, 杂交基本解有限元法已成功应用于热传导问题^[4]、平面弹性问题^[12]、热弹性问题^[13]、轴对称问题^[7-8, 14]和裂纹问题^[15]等.

由于基本解的奇异性^[16], 适当数量的源点需布置在单元域外, 以避免基本解涉及奇异积分问题. 根据以往的研究, 源点的布局主要有两种方式: 一种是假设与单元边界形状相似的虚拟边界 (偏置边界), 另一种是在单元域外假设一个圆形虚拟边界^[17]. 虚拟边界偏移量和源点数的选择直接影响计算结果的准确性和稳定性, 需要根据问题具体分析, 目前尚无准确的数值供选择. 上述杂交基本解有限元法均采用第一种虚拟边界求解问题, 而对其他源点布局未作阐述. 在求解扭转弹性问题^[18]中, 通过对比上述两种边界方式下的计算结果, 认为当源点布局方式与单元域形状相似时, 可得到良好的结果.

在问题求解中, 一种源点的方案可能不适用于所有的问题, 当其失效时, 可以考虑其他源点布局方式. 为了探究不同源点对杂交基本解有限元法的影响, 本文结合上述两种虚拟边界以及双重虚拟边界^[19]分析了热传导问题. 通过两个算例验证了不同源点布局方式的可行性, 探讨了源点数目和偏移量对计算精度的影响, 以及虚拟边界参数对单元刚度矩阵条件数的影响, 同时也分析了不同源点布局下的收敛性. 此外, 还说明了当网格畸变程度较大时, 哪种源点布局更适合求解.

1 问题描述

1.1 控制方程与边界条件

对于稳态热传导问题, 一般二维区域 Ω 的 Laplace 控制方程为

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

考虑 Dirichlet 和 Neumann 边界条件:

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \text{on } \Gamma_\phi, \quad (2)$$

$$q(\mathbf{x}) = -k \frac{\partial u}{\partial x_1} n_{x_1} - k \frac{\partial u}{\partial x_2} n_{x_2} = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \text{on } \Gamma_q, \quad (3)$$

式中, u 和 q 分别代表未知温度和热流, 字母上方的横线代表已知边界值, k 为导热系数, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ 为求解域 Ω 围成的整个边界, n_{x_1} 和 n_{x_2} 分别代表边界 Γ 上任意点外法线方向余弦, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.

1.2 基本解及源点布局

对于均质各向同性材料, Laplace 方程 (1) 的基本解^[4, 13]为

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4)$$

式中, \mathbf{x} 为场点, \mathbf{y} 为源点, $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, 当场点和源点重合甚至过近时, 基本解会发生奇异. 为避免基本解奇异积分问题, 通常将源点布置在单元求解域之外, 在这里考虑三种源点布局类型.

类型 1 单元域外假想一个与单元边界形状相似的虚拟边界, 源点 \mathbf{y}_{sj} ($j = 1, 2, \dots, n_s$) 位置可由基本解法确定:

$$\mathbf{y}_{sj} = \mathbf{x}_b + \lambda(\mathbf{x}_b + \mathbf{x}_c), \tag{5}$$

式中, λ 为无量纲参数, 决定着源点到单元边界的距离, \mathbf{x}_b 为单元边界上的场点, \mathbf{x}_c 为单元形心. 图 1(a) 为一个典型的单元源点分布.

类型 2 单元域外假想一个半径为 R 的圆形虚拟边界, 其形式如图 1(b) 所示, 源点和场点满足下列方程式:

$$\begin{cases} y_{1j} = x_{1c} + R\cos(\theta_j), \\ y_{2j} = x_{2c} + R\sin(\theta_j), \end{cases} \tag{6a}$$

$$\theta_j = \tan^{-1}\left(\frac{x_{2b} - x_{2c}}{x_{1b} - x_{1c}}\right). \tag{6b}$$

类型 3 双层虚拟边界, 与类型 2 类似, 在单元域外假想两个半径分别为 R_1 和 R_2 的圆, 其形式如图 1(c) 所示, 源点分别布置在两个圆上:

$$\begin{cases} y_{1k} = x_{1c} + R_1\cos(\theta_k), \\ y_{2k} = x_{2c} + R_1\sin(\theta_k), \end{cases} \tag{7a}$$

$$\begin{cases} y_{1l} = x_{1c} + R_2\cos(\theta_l), \\ y_{2l} = x_{2c} + R_2\sin(\theta_l), \end{cases} \tag{7b}$$

式中, θ 为单元边界节点的角度. 为了便于区分, 假设 $R_1 < R_2$, k 为内层虚拟边界的源点数目, l 为外层虚拟边界的源点数目, 并且 $k \leq l$, $k + l = n_s$.

为了更好地对源点布局进行比较分析, 构造了以无量纲参数 λ 为变量的关系式:

$$\begin{cases} R = R_2 = d_{\max} + \lambda d_{\max}, \\ R_1 = R_2 - d, \end{cases} \tag{8}$$

式中, d_{\max} 为单元边上点到单元形心的最大距离, d 为双层虚拟边界之间的距离, 即 $d = R_2 - R_1 = \alpha R_2$, 若无特殊说明, $\alpha = 0.1$.

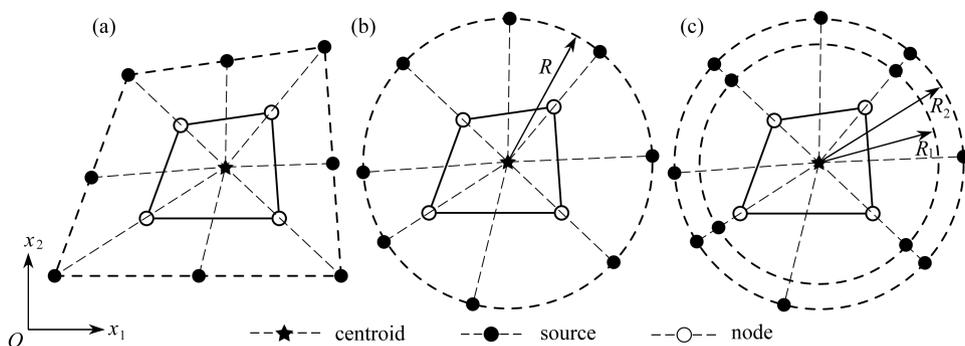


图 1 源点配置方式
Fig. 1 Configurations of source points

2 杂交有限元列式

2.1 假设温度场

类似于 Trefftz 有限元法, 杂交基本解有限元法将所考虑的问题域划分为一系列小的单元, 采用两个独立的插值模式 (单元域内温度场和辅助网线温度场). 图 2 为一个典型的四节点单元. 单元域内温度场由基本解的线性组合构成, 保证了单元域内变量场的计算精度; 单元边界定义的辅助网线温度场确保了单元间的连续性, 一般采用常规有限元法的形函数^[7].

1) 单元域内温度场

$$u_e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_s} N_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) c_{ej} = N_e(\mathbf{x}) \mathbf{c}_e, \quad \text{in } \Omega_e, \tag{9}$$

式中, u_e 为单元域内的温度, N_e 为基本解 $N_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) = u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的线性组合构成的行向量, n_s 为单元域外源点个数, \mathbf{c}_e 为待定参数构成的列向量, Ω_e 为单元边界 Γ_e 围成的单元区域。

利用式(9), 单元边界 Γ_e 上的外法向热流 q_e 为

$$q_e = -k \frac{\partial u_e}{\partial n} = \mathbf{Q}_e \mathbf{c}_e, \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A} \mathbf{T}_e, \quad \mathbf{A} = [kn_{x_1}, kn_{x_2}], \quad \mathbf{T}_e = \left[\frac{\partial N_e}{\partial x_1}, \frac{\partial N_e}{\partial x_2} \right]^T. \quad (11)$$

2) 辅助网线温度场

$$\tilde{u}_e(\mathbf{x}) = \tilde{N}_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}_e, \quad \text{on } \Gamma_e, \quad (12)$$

式中, \tilde{u}_e 为单元边界的温度, \tilde{N}_e 为常规有限元法的形函数行向量, \mathbf{d}_e 为单元节点自由度列向量。图2为自然坐标系表示的线性插值函数, 对于任一单元边(2-3边), 其温度分布可表示为

$$\tilde{u}_{2-3} = \tilde{N}_1 \tilde{u}_2 + \tilde{N}_2 \tilde{u}_3, \quad (13)$$

式中, \tilde{N}_1 和 \tilde{N}_2 为自然坐标系 $\xi \in [-1, 1]$ 定义的常规形函数, 其形式分别为

$$\tilde{N}_1 = (1 - \xi)/2, \quad \tilde{N}_2 = (1 + \xi)/2.$$

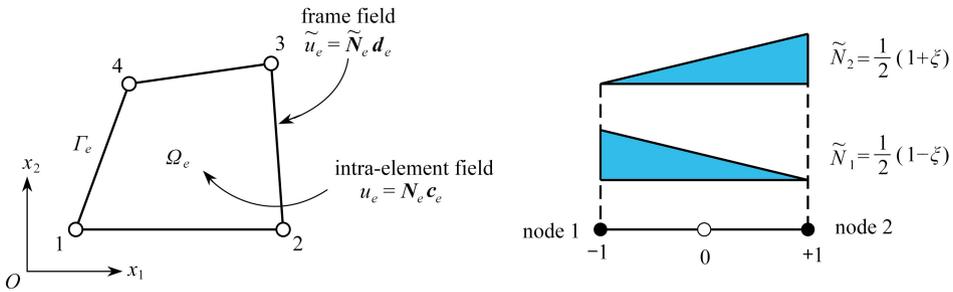


图2 典型四节点单元和单元边形函数

Fig. 2 A typical 4-node element and the element side shape functions

2.2 修正变分泛函

整个求解域 Ω 的杂交泛函 Π_m 为所有单元泛函 Π_{me} 的叠加, 即 $\Pi_m = \sum_e \Pi_{me}$. 为将上述两个温度场关联在一起, 单元泛函可表示为

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (q_{e1}^2 + q_{e2}^2) d\Omega - \int_{\Gamma_{eu}} q_e \tilde{u}_e d\Gamma + \int_{\Gamma_{eq}} (\bar{q}_e - q_e) \tilde{u}_e d\Gamma - \int_{\Gamma_{el}} q_e \tilde{u}_e d\Gamma, \quad (14)$$

式中, $q_{e1} = \partial u / \partial x_1$, $q_{e2} = \partial u / \partial x_2$, $\Gamma_e = \Gamma_{eu} + \Gamma_{eq} + \Gamma_{el}$, $\Gamma_{eu} = \Gamma_e \cap \Gamma_u$, $\Gamma_{eq} = \Gamma_e \cap \Gamma_q$, Γ_{el} 为相邻单元的公共边界。对泛函(14)应用散度定理, 并注意在单元边界 Γ_e 上有 $\bar{u} = \tilde{u}$, 可消除区域积分, 从而得到只含边界积分的泛函形式:

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} q_e u_e d\Gamma - \int_{\Gamma_e} q_e \tilde{u}_e d\Gamma + \int_{\Gamma_{eq}} \bar{q}_e \tilde{u}_e d\Gamma. \quad (15)$$

将式(9)、(10)和(12)代入式(15), 有

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{P}_e, \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{H}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}_e d\Gamma, \quad \mathbf{G}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \tilde{N}_e d\Gamma, \quad \mathbf{P}_e = \int_{\Gamma_{eq}} \tilde{N}_e^T \bar{q}_e d\Gamma. \quad (17)$$

为保证单元间连续性, 未知向量 \mathbf{c}_e 由单元节点自由度向量 \mathbf{d}_e 表示, 对泛函(16)应用驻值原理分别消去 \mathbf{c}_e 和 \mathbf{d}_e , 即

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{c}_e^T} = \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{d}_e^T} = -\mathbf{G}_e^T \mathbf{c}_e + \mathbf{P}_e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{P}_e, \tag{19}$$

式中, $\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e$ 和 \mathbf{P}_e 分别为单元刚度矩阵和等效节点载荷列阵, 由于 $\mathbf{H}_e, \mathbf{G}_e$ 和 \mathbf{P}_e 仅涉及边界积分, 因此可沿着单元边界利用一维 Gauss 积分进行数值求解。

2.3 恢复刚体运动项

将上述单元刚度方程(19)进行装配构造总体刚度方程 $\mathbf{Kd} = \mathbf{P}$, 这里 \mathbf{K}, \mathbf{d} 和 \mathbf{P} 分别为整体刚度矩阵、未知节点温度和整体等效节点载荷列阵, 然后引入式(2)的 Dirichlet 边界条件, 即可求得单元节点未知温度 \tilde{u}_e 。通过对基本解和杂交泛函(15)的检验, 在计算单元域内温度场时, 舍弃的刚体运动项必须恢复。根据以往的研究^[4,6], 对于任一单元 e , 必须通过修改式(9)以恢复舍弃的刚体运动项:

$$u_e = c_0 + \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e, \tag{20}$$

其中, c_0 为待定的刚体运动参数, 可由域内温度场 u_e 和网线温度场 \tilde{u}_e 的最小二乘在单元节点处匹配确定, 即

$$\sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{N}_e \mathbf{c}_e + c_0 - \tilde{u}_e) \Big|_{\text{node}i} = \min(u_e - \tilde{u}_e). \tag{21}$$

进一步得知

$$c_0 = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} (\tilde{u}_e - \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e), \tag{22}$$

式中, n_e 为单元的节点个数, 一旦通过整体刚度矩阵求得节点的温度, 向量 \mathbf{c}_e 即可通过式(18)确定, 然后 c_0 可由式(22)求得, 最后可通过式(20)求出单元域内任一点的温度 u_e 。

3 数值算例

为验证不同源点布局方式下本文方法的可行性, 考虑了两个数值算例: 正方形板和偏心环空的热传导。若无特别说明, 导热系数取为 $k = 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。为了从量化角度理解计算结果的准确性, 引入了任意变量 f 的平均相对误差 (ARE):

$$\varepsilon_{\text{ARE}}(f) = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} (f_{\text{HFS-FEM}} - f_{\text{ref}})_i^2}{\sum_{i=1}^{N_i} (f_{\text{ref}})_i^2} \times 100\%, \tag{23}$$

式中, N_i 为测试点的数目, $(f_{\text{HFS-FEM}})_i$ 和 $(f_{\text{ref}})_i$ 分别为杂交基本解有限元法和 ABAQUS 在点 i 的数值解。

3.1 正方形板

第一个算例考虑的是正方形板, 其几何尺寸和边界条件如图 3 所示。板的上下表面均施加 Dirichlet 边界条件, 右表面施加 Neumann 边界条件。为研究该方法的收敛性, 将正方形板分别离散为 $2 \times 2, 4 \times 4, 6 \times 6$ 和 8×8 网格。

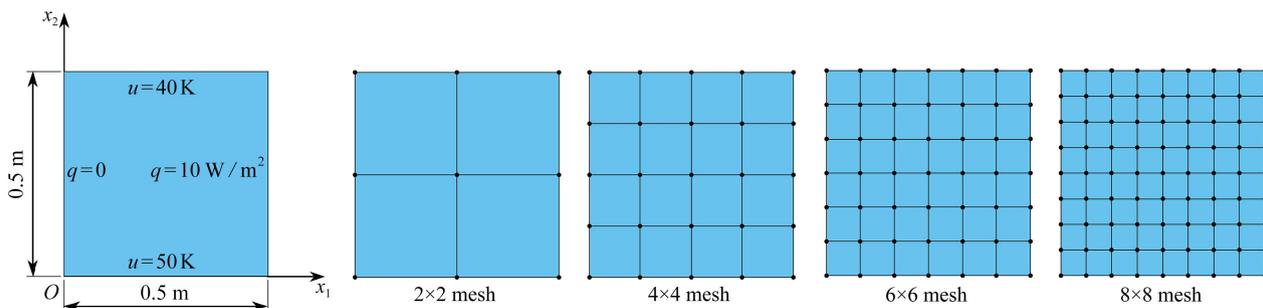


图 3 正方形板与有限元网格

Fig. 3 A square plate and the finite element meshes

在基本解法中,源点的位置和数目决定了其计算精度.图4给出了3种源点布局方案,为便于对比分析,本文还提供了 25×25 网格下(共625个单元)的ABAQUS数值解作为参考解.在计算中,采用图3所示的 4×4 网格离散求解域,图5为不同源点数目下,杂交基本解有限元法温度的平均相对误差随着无量纲参数 λ 的变化情况.当 $\lambda < 0.4$ 时,采用8源点布置于相似虚拟边界(类型1)和圆形虚拟边界(类型2)的误差过大,故未在图中表示.从图中可以看出,除了12源点的多重虚拟边界(类型3)在 $\lambda > 2.5$ 时误差有所波动外,其他5种源点布局方式下的计算精度均随着无量纲参数 λ 的增大而提高,且很快趋于平稳. λ 在 $[0.2, 1.0]$ 区间内,相比于其他源点布局方式,采用多重虚拟边界的精度趋于稳定更快.从数值角度看,随着源点和单元边界距离的增加,可能会导致矩阵 \mathbf{H}_e 产生较大的条件数($\text{cond}(\mathbf{H}_e) = \|\mathbf{H}_e\| \cdot \|\mathbf{H}_e^{-1}\|$).通过分析图6描述的变化规律不难看出,无量纲参数在 $[0.8, 3.2]$ 区间内,矩阵条件数大多在 10^3 和 10^{16} 附近.若无特别说明,综合考虑杂交基本解有限元法的准确性和稳定性,后面的计算中,前两种源点布局方式的源点数和无量纲参数分别取为 $n_s = 4$ 和 $\lambda = 3.2$,多重虚拟边界的源点数和无量纲参数分别取为 $n_s = 8$ 和 $\lambda = 3.2$.

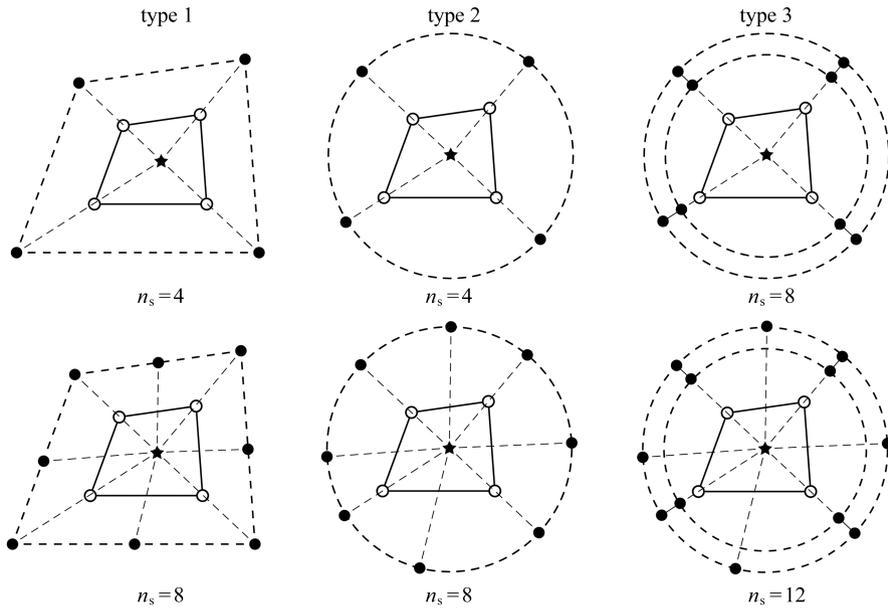


图4 不同源点数目的四节点单元

Fig. 4 A 4-node element with different numbers of source points

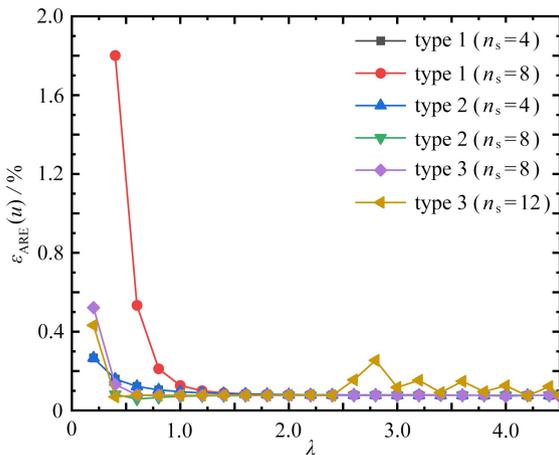


图5 无量纲参数 λ 对计算精度的影响

Fig. 5 Effects of dimensionless parameter λ on the computation accuracy

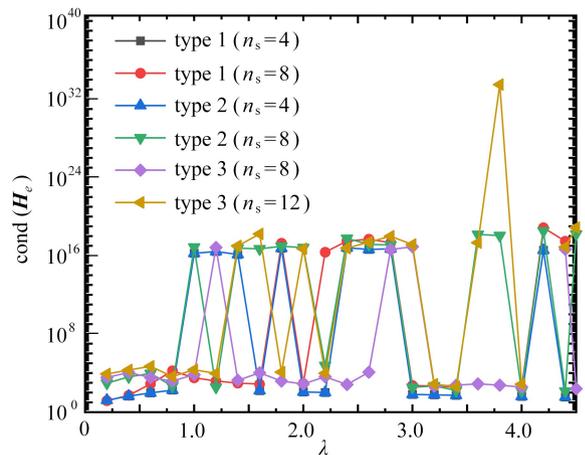


图6 无量纲参数 λ 对矩阵 \mathbf{H}_e 条件数的影响

Fig. 6 Effects of dimensionless parameter λ on the condition number of matrix \mathbf{H}_e

为研究本文方法对网格畸变的不敏感性,图 7 给出了 5 种 4×4 网格畸变方案,由无量纲参数 $\psi = e/l$ 决定网格的畸变程度.图 8 给出了温度的平均相对误差随着畸变程度的变化情况,尽管网格畸变程度较大,该方法仍能得到良好的计算结果,这主要得益于修正变分泛函仅涉及边界积分.从图 9 可以看出,采用不同源点布局方式的计算结果收敛的趋势是相同的,而采用双重虚拟边界收敛的速度更快一些.表 1 和表 2 分别给出了若干点的温度和沿着 x_2 方向的热流分量,尽管个别点热流误差较大,但仍在工程实际容许范围内,并且随着网格的加密,精度会逐渐改善.

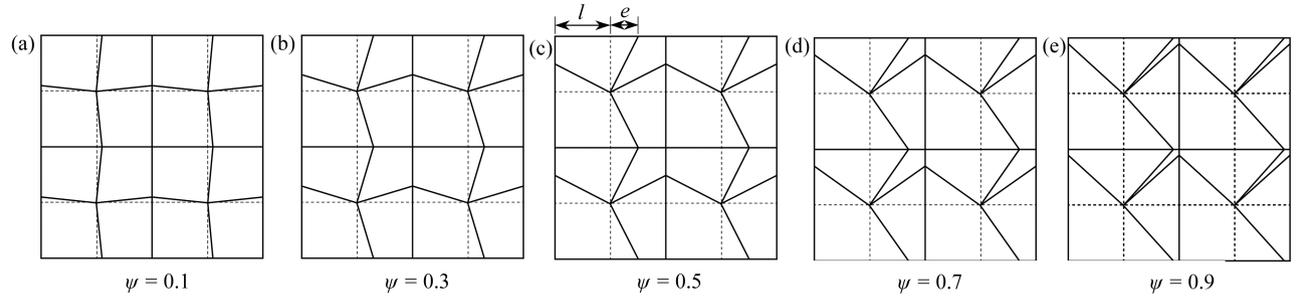


图 7 网格畸变方案

Fig. 7 Mesh distortion schemes

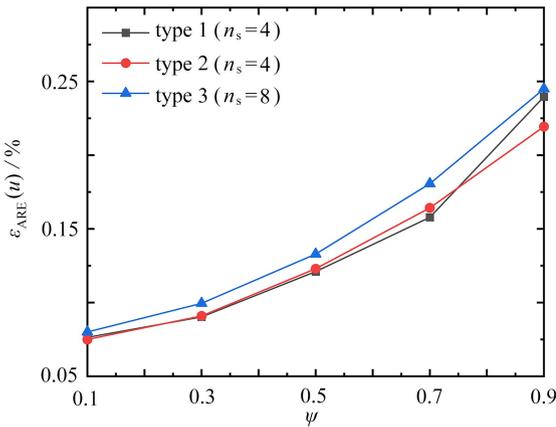


图 8 畸变程度 ψ 对计算精度影响

Fig. 8 Effects of distortion parameter ψ on the computation accuracy

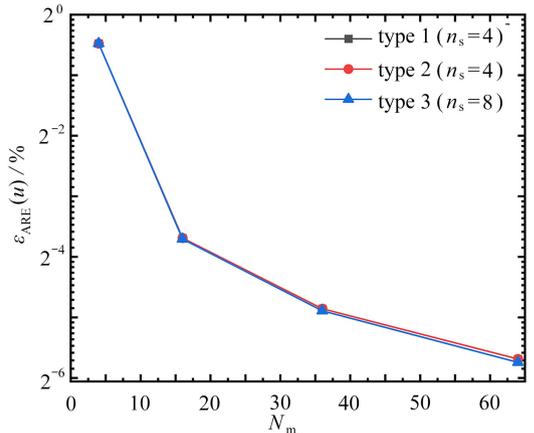


图 9 网格密度对计算精度的影响

Fig. 9 Effects of the mesh density on the computation accuracy

表 1 选择点处温度 u 的计算结果

Table 1 Computation results for temperature u at the selected points

x_1	x_2	source point type	HFS-FEM				ABAQUS
			2×2 mesh	4×4 mesh	6×6 mesh	8×8 mesh	25×25 mesh
0.02	0.48	1	40.375 3	40.410 3	40.418 2	40.420 7	40.422 1
		2	40.375 3	40.410 3	40.418 2	40.420 7	
		3	40.403 3	40.417 4	40.420 1	40.421 1	
0.1	0.1	1	48.027 5	48.102 9	48.119 0	48.119 9	48.123 8
		2	48.027 5	48.102 9	48.119 0	48.119 9	
		3	48.027 7	48.107 0	48.116 2	48.119 7	
0.34	0.44	1	41.304 1	41.453 3	41.479 8	41.480 2	41.487 0
		2	41.304 1	41.453 3	41.479 8	41.480 2	
		3	41.286 2	41.447 3	41.479 7	41.487 8	

表2 选择点处热流分量 q_{x_2} 的计算结果Table 2 Computation results for heat flux component q_{x_2} at the selected points

x_1	x_2	source point type	HFS-FEM				ABAQUS
			2×2 mesh	4×4 mesh	6×6 mesh	8×8 mesh	25×25 mesh
0.02	0.48	1	20.180 5	20.882 7	21.002 7	21.044 3	21.097 4
		2	20.180 5	20.882 6	21.002 7	21.044 3	
		3	20.111 2	20.863 1	21.010 0	21.062 4	
0.1	0.1	1	19.710 3	18.918 4	19.091 4	18.908 6	18.931 8
		2	19.710 3	18.918 4	19.091 5	18.908 6	
		3	19.731 5	19.105 3	18.922 1	18.929 5	
0.34	0.44	1	21.594 2	24.337 3	24.853 8	24.148 8	24.469 7
		2	21.594 2	24.337 3	24.853 8	24.148 7	
		3	21.446 9	23.796 8	23.991 0	24.084 1	

3.2 偏心环空的热传导

为验证本文方法求解曲边问题的有效性,第二个算例考虑偏心环空的热传导.该算例的尺寸参数和边界条件如图10所示,内表面施加 Dirichlet 边界条件,外表面施加 Neumann 边界条件.在计算过程中,整个求解域离散为78个4节点四边形单元.为便于比较,将采用300个单元的 ABAQUS 数值解作为参考解.

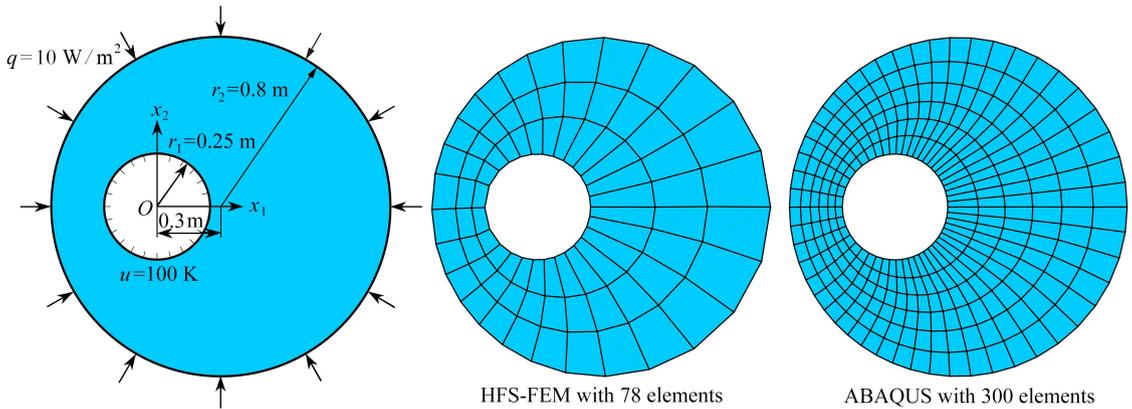


图10 偏心环空与有限元网格

Fig. 10 An eccentric annulus and the finite element meshes

图11给出了不同源点布局下杂交基本解有限元法采用78个单元的温度等值线图,可以看出与 ABAQUS 数值结果吻合较好.为了使数据可视化,图12和13给出了不同源点布局下偏心环空内表面和外表面单元形心的周向温度及其热流分量 q_{x_1} 和 q_{x_2} 的计算结果,与 ABAQUS 数值解对比发现,两者结果基本吻合,进一步说明了本文方法在稀疏网格下仍能得到满意的结果.为说明该方法的效率,表3列出了 CPU 计算所需的时间,所有的计算都是在戴尔灵越 15-1558(处理器类型: Intel Core i7-5500U)上进行的.与 ABAQUS 相比, HFS-FEM 计算所需的时间更少,这表明该方法具有更高的效率.

表3 CPU 时间的对比

Table 3 Comparison of the CPU time

method	element	CPU time $t_{\text{CPU}} / \text{s}$
HFS-FEM (type 3)	78	0.07
ABAQUS	78	0.1
	300	0.2

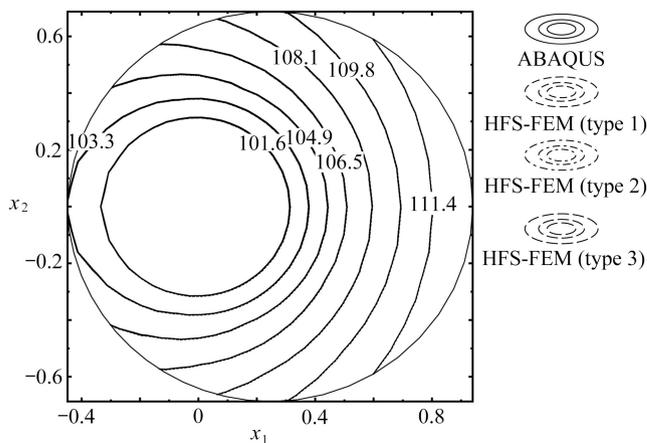


图 11 偏心环空温度 u 的等值线图

Fig. 11 Contour plots of temperature u in the eccentric annulus

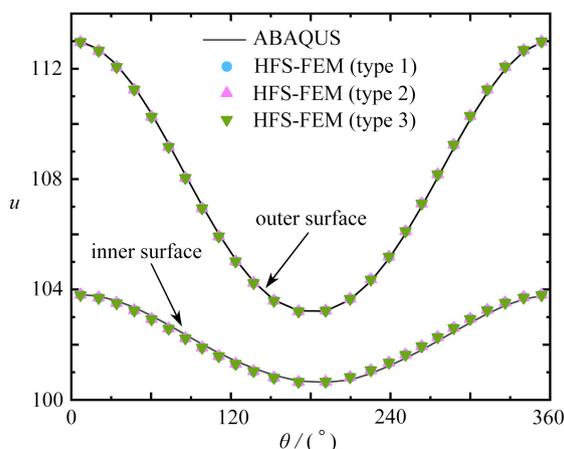


图 12 单元形心处温度 u 沿周向的变化

Fig. 12 Variations of temperature u at element centroids along the circumferential direction

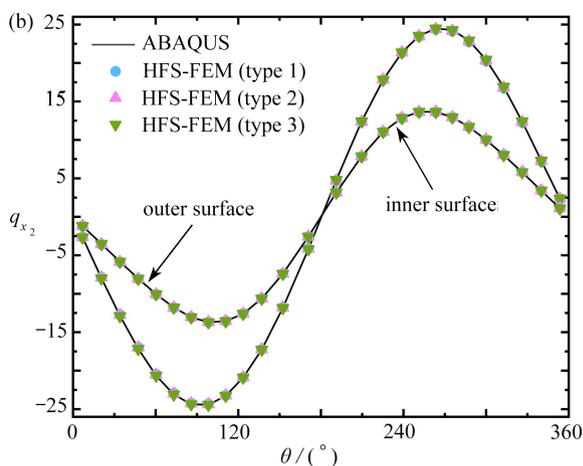
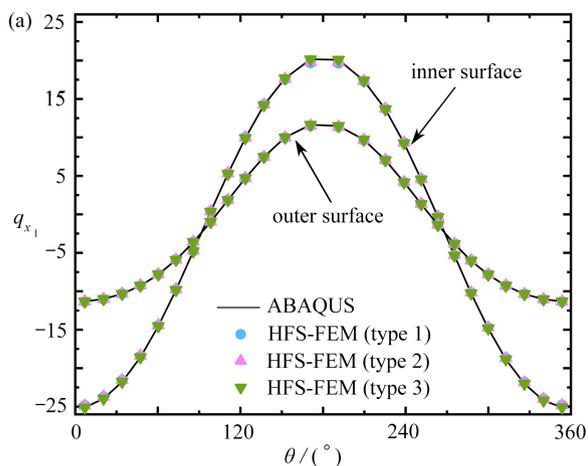


图 13 单元形心处热流分量 q_{x_1} 和 q_{x_2} 沿周向的变化

Fig. 13 Variations of heat flux components q_{x_1} and q_{x_2} at element centroids along the circumferential direction

4 结 论

对于热传导问题,本文基于杂交基本解有限元法,分别采用 3 种源点布局方式(与单元形状相似的虚拟边界、圆形虚拟边界和双重虚拟边界)进行求解,所得结论如下:

- 1) 相比于单元偏置的虚拟边界和圆形边界,随着网格的加密,采用双重虚拟边界的收敛性更好。
- 2) 对于网格畸变程度较大的算例,圆形虚拟边界更适合用来求解。

3) 随着源点与边界距离的增加,8 源点双重虚拟边界下,靠近单元边界趋于稳定更快,并且其矩阵条件数的上下振荡次数较小,对于另外两种方法,尽管矩阵条件数较小,但其数值振荡次数较大。

本文通过两个数值算例,与传统有限元法计算结果对比,验证了 3 种源点布局方式的可行性,在稀疏网格下,杂交基本解有限元法仍能获得较高的精度。

参考文献 (References):

[1] JIROUSEK J, LEON N. A powerful finite element for plate bending[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1977, 12(1): 77-96.

[2] JIROUSEK J, VENKATESH A. Hybrid Trefftz plane elasticity elements with p -method capabilities[J]. *Inter-*

- national Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **35**(7): 1443-1472.
- [3] QIN Q H, WANG H. *MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods* [M]. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [4] WANG H, QIN Q H. Hybrid FEM with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, **22**(5): 487-498.
- [5] SHE Z, WANG K Y, LI P C. Thermal analysis of multilayer coated fiber-reinforced composites by the hybrid Trefftz finite element method [J]. *Composite Structures*, 2019, **224**: 110992.
- [6] WEISSER S. Arbitrary order Trefftz-like basis functions on polygonal meshes and realization in BEM-based FEM [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2014, **67**(7): 1390-1406.
- [7] ZHOU J C, WANG K Y, LI P C, MIAO X D. Hybrid fundamental solution based finite element method for axisymmetric potential problems [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2018, **91**: 82-91.
- [8] ZHOU J C, WANG K Y, LI P C. Hybrid fundamental solution based finite element method for axisymmetric potential problems with arbitrary boundary conditions [J]. *Computers & Structures*, 2019, **212**: 72-85.
- [9] 秦庆华. Hybrid-Trefftz 有限元法的研究进展 [J]. 力学进展, 1998, **28**(1): 71-82. (QIN Qinghua. Advances in hybrid-Trefftz finite element method [J]. *Advances in Mechanics*, 1998, **28**(1): 71-82. (in Chinese))
- [10] 王克用, 黄争鸣, 李培超, 等. 正交各向异性轴对称位势问题的 Trefftz 有限元分析 [J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(5): 462-469. (WANG Keyong, HUANG Zhengming, LI Peichao, et al. Trefftz finite element analysis of axisymmetric potential problems in orthotropic media [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(5): 462-469. (in Chinese))
- [11] CAO C Y, QIN Q H, YU A B. Micromechanical Analysis of heterogeneous composites using hybrid Trefftz FEM and hybrid fundamental solution based FEM [J]. *Journal of Mechanics*, 2013, **29**(4): 661-674.
- [12] WANG H, QIN Q H. Fundamental-solution-based finite element model for plane orthotropic elastic bodies [J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2010, **29**(5): 801-809.
- [13] CAO C Y, QIN Q H. Hybrid fundamental solution based finite element method: theory and applications [J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2015, **2015**: 916029.
- [14] WANG K Y, ZHOU J C, ZENG R Y. Hybrid Trefftz finite element method for axisymmetric elasticity problems under torsion [J]. *Materials Today Communications*, 2021, **27**: 102420.
- [15] WANG H, LIN W, QIN Q H. Fundamental-solution-based hybrid finite element with singularity control for two-dimensional mixed-mode crack problems [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2019, **108**: 267-278.
- [16] 周枫林, 谢贵重, 张见明, 等. 角度-距离复合变换法消除边界积分方程近奇异性 [J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(5): 530-540. (ZHOU Fenglin, XIE Guizhong, ZHANG Jianming, et al. Near-singularity cancellation with the angle-distance transformation method for boundary integral equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(5): 530-540. (in Chinese))
- [17] GRABSKI J K, KARAGEORGHIS A. Moving pseudo-boundary method of fundamental solutions for nonlinear potential problems [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2019, **105**: 78-86.
- [18] GORZELAŃCZYK P, KOŁODZIEJ J A. Some remarks concerning the shape of the source contour with application of the method of fundamental solutions to elastic torsion of prismatic rods [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2008, **32**(1): 64-75.
- [19] 潘文峰, 戴海. 具有双重虚拟边界的基本解方法求解 Stokes 问题 [J]. 中国科技论文, 2018, **13**(5): 563-567. (PAN Wenfeng, DAI Hai. Method of fundamental solutions with double fictitious boundaries for solving Stokes problems [J]. *China Sciencepaper*, 2018, **13**(5): 563-567. (in Chinese))