应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

等离子体中双流体模型的调制逼近

刘慧敏，蒲学科

Modulation Approximation of a 2-Fluid System in Plasma

LIU Huimin and PU Xueke

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.430007 http://www.applmathmech.cn

等离子体中双流体模型的调制逼近*

刘慧敏[1]，　蒲学科[2]

（1. 山西财经大学 应用数学学院，太原 030006；
2. 广州大学 数学与信息科学学院，广州 510006）

摘要： 等离子体中的双流体模型描述了丰富的等离子体动力学行为, 包括离子声波和等离子体波之间的相互作用. 为了描述该双流体模型小振荡波包解包络的演化, 利用多尺度分析方法将非线性 Schrödinger (NLS) 方程作为形式逼近方程导出, 并通过对该双流体模型的真实解和逼近解之间的误差, 在 Sobolev 空间中进行了一致能量估计, 最终在时间尺度$O(\epsilon^{-2})$上严格证明了 NLS 逼近的有效性.

关　键　词： 双流体模型； 调制逼近； NLS 方程； 共振点； Normal-Form 变换

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.430007

Modulation Approximation of a 2-Fluid System in Plasma

LIU Huimin[1]，　PU Xueke[2]

（1. *School of Applied Mathematics*, *Shanxi University of Finance and Economics*, *Taiyuan* 030006, *P.R.China*；
2. *School of Mathematics and Information Science*, *Guangzhou University*, *Guangzhou* 510006, *P.R.China*）

Abstract: A kind of 2-fluid system in plasmas describes rich plasma dynamics, including the interactions between the ion acoustic wave and the plasma body wave. In order to describe the evolution of the envelope of the small oscillating wave packet solution of the 2-fluid model, the nonlinear Schrödinger (NLS) equation was derived as a formal approximation equation with the multi-scale analysis method, and the uniform energy estimation of the error between the exact solution and the approximate solution to the 2-fluid model was given in the Sobolev space. The NLS approximation was finally proved strictly on the time-scale $O(\epsilon^{-2})$.

Key words: 2-fluid model; modulation approximation; NLS equation; resonance; normal-form transformation

引　　言

等离子体模型是指在研究复杂的非平衡态等离子体时, 经常遇到多参变量的情况, 为了从理论上定量地或定性地描述它们, 利用一些互相补充的简化模型常常是很有益的[1-2]. 本文在一维直线上考虑下列等离子体中的简化双流体模型:

* **收稿日期：** 2022-01-11; **修订日期：** 2022-02-12
基金项目： 国家自然科学基金 (12001338; 11871172); 广东省自然科学基金 (2019A1515012000); 山西省高等学校科技创新项目 (2020L0256)
作者简介： 刘慧敏(1989—), 女, 博士(E-mail: hmliucqu@163.com);
蒲学科(1981—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: puxueke@gmail.com).
引用格式： 刘慧敏, 蒲学科. 等离子体中双流体模型的调制逼近[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(9): 944-954.

$$\begin{cases}\partial_t n+\partial_x(nv)=0,\\ \partial_t v+v\partial_x v+\dfrac{\partial_x n}{n}=-\partial_x\phi,\\ \partial_x^2\phi=\mathrm{e}^{\phi-\mathcal{E}^2}-n,\\ \partial_{tt}\mathcal{E}-\partial_x^2\mathcal{E}+\mathrm{e}^{\phi-\mathcal{E}^2}\mathcal{E}=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中n表示离子的密度, v表示离子的速度, $\mathcal{E}$表示高频电场, ϕ是低频电场的势函数, 这些函数均定义在$(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$上. 此模型描述了离子声波与等离子体波的相互作用, 来源于 Euler-Maxwell 系统, 即由离子和电子的 Euler 方程, 以及电场和磁场的 Maxwell 方程耦合的双流体模型. 模型 (1) 的推导过程可参考文献 [3] 及其相关文献.

对于双流体模型 (1), Guo 和 Huang[4] 利用常微分方程方法证明了孤立波的存在性、唯一性以及无穷远处的渐近行为. Han、Zhang 和 Guo[5] 证明了三维空间中平衡态附近扰动解的整体存在性, 该结果推广了 Guo 和 Pausader[6] 关于离子 Euler-Poisson 模型 (2) 在三维空间中的小振幅整体光滑无旋解. 事实上, 当忽略高频电场效应时, 双流体模型 (1) 退化为下列离子 Euler-Poisson 模型:

$$\begin{cases}\partial_t n+\partial_x(nv)=0,\\ \partial_t v+v\partial_x v=-\dfrac{\partial_x n}{n}-\partial_x\phi,\\ \partial_x^2\phi=\mathrm{e}^{\phi}-n.\end{cases}\tag{2}$$

对于离子 Euler-Poisson 模型 (2), Guo 和 Pu[7] 首次严格建立了一维冷离子以及热离子两种情形的 KdV 极限. Pu[8] 对高维的情形, 即二维的 KP-II 极限以及三维的 ZK 极限进行了研究. 之后, Liu 和 Pu[9] 严格证明了带量子效应的退化双流体模型的量子 KdV 极限. 由于 KdV 方程的解恰是非线性 Schrödinger (NLS) 方程在小波数区域的解, 故考虑色散模型的 NLS 逼近是很有意义的事情. 作为著名的非线性逼近方程, NLS 方程在一维直线上是完全可积的 Hamilton 系统, 可以借助反散射方法对其求解[10]. 1968 年, Zakharov[11] 从流体动力学方程推导出了 NLS 方程, 用于考虑具有无限深度的自由表面理想流体. 随着研究的深入, 学者们发现了一些重要的非线性波动现象(如等离子体中的离子声波、电场中超导电子的运动以及非线性光学的自陷现象等)都可以用 NLS 方程进行描述[12-13]. 最近, Liu 和 Pu[14] 利用 normal-form 变换以及修正能量的方法严格证明了离子 Euler-Poisson 模型 (2) 的 NLS 逼近. 本文将此结果[14] 推广到双流体模型 (1) 的调制逼近. 双流体模型 (1) 是一个高度耦合的双曲方程组, 其线性色散关系有两个:

$$\begin{cases}\omega_u=\operatorname{sgn}(k)\sqrt{1+k^2},\\ \omega_v=k\hat{q}(k),\ \hat{q}(k)=\sqrt{\dfrac{2+k^2}{1+k^2}}.\end{cases}\tag{3}$$

因而在研究调制逼近过程中, 需要寻找合适的满足耦合方程组兼容性的形式逼近解. 本文考虑下列基本空间波数$k_0=0$的关于时间震荡的形式波列解:

$$\begin{cases}\mathcal{E}=\epsilon A(\epsilon x,\epsilon^2 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+c.c.+O(\epsilon^2),\\ \begin{pmatrix}n-1\\ v\end{pmatrix}=\epsilon^2\boldsymbol{B}(\epsilon x,\epsilon^2 t)+O(\epsilon^3),\end{cases}\tag{4}$$

其中$0<\epsilon\ll 1$是一个小扰动参数, A 表示复值振幅, $c.c.$表示复共轭. 将式 (4) 代入模型 (1) 中, 可得复振幅 A 满足下列 NLS 方程:

$$\partial_T A=\mathrm{i}\nu_1\partial_X^2 A+\mathrm{i}\nu_2 A|A|^2,\tag{5}$$

其中$X=\epsilon x\in\mathbb{R}$, $T=\epsilon^2 t\in\mathbb{R}$, 即时间和空间的调制尺度分别为$O(1/\epsilon^2)$和$O(1/\epsilon)$, 系数满足$\nu_j\in\mathbb{R}$, $j\in\{1,2\}$.

严格证明上面阐述的 NLS 逼近过程不是一件容易的事情. Kalyakin[15] 首次真正意义上地证明了拟线性色散系统的 NLS 逼近结果, 然而该系统中拟线性二次项被完全排除在外. 目前, 带有拟线性二次项色散系统的 NLS 逼近已取得了部分重要结果. 具体来说, 可以针对系统本身特点, 寻找特殊变换将二次项消除, 例如忽略表面张力且考虑无限深度的二维和三维水波问题[16-17]. 再如拟线性 KdV 方程, Schneider[18] 利用 Miura 变换得到了 NLS 逼近结果. 另外, 当原系统中右端二次项只丢失$1/2$阶导数时, 可以借助 normal-form 变换消除二次

项, 如忽略表面张力且考虑有限深度的二维水波问题. 此时, 由于变换后系统的右端项会丢失一阶导数, 从而通过 Cauchy-Kowalevskaya 定理便可得到 NLS 逼近结果[19-20]. 利用 normal-form 变换消除双曲系统中半线性二次项的方法最早在文献 [21] 中被介绍. Kalyakin[15] 首次利用 normal-form 变换证明了 NLS 逼近理论. 另外, 当二次项丢失一阶导数时, 可以利用 normal-form 变换修正能量泛函的方法, 有效处理由拟线性项丢失导数引起的困难, 例如 Düll[22] 证明了拟线性 Klein-Gordon 方程在 Sobolev 空间中的 NLS 逼近结果, 注意到这里的拟线性 Klein-Gordon 方程的线性色散关系不会引起共振点. 此外, Liu 和 Pu[14] 得到了离子 Euler-Poisson 方程组的 NLS 逼近结果, 与上述模型不同, 离子 Euler-Poisson 方程组不仅二次项丢失一阶导数, 而且会出现非平凡共振点, 他们在 Fourier 空间中利用截断函数修正误差, 并通过投影算子将误差的高低频部分分开, 对低频部分直接应用 normal-form 变换, 对高频部分则利用此变换定义新的能量泛函, 从而解决了由导数丢失以及共振点出现带来的双重困难. 最近, Bian、Liu 和 Pu[23] 严格证明了一维带量子效应的退化双流体模型的 NLS 逼近结果, 其中量子项会引起更高阶导数的出现. 另外, Düll[24] 在弧长坐标下严格证明了二维有限深度水波的 NLS 逼近, 其中带表面张力和不带表面张力的情形均包含在内. 注意到本文考虑的双流体模型 (1) 是一个高度耦合的色散模型, 包含两种完全不同的色散关系, 既会出现共振点又会损失导数, 因而与上述列举模型均有所不同. 本文将利用 normal-form 变换消除低阶项, 结合方程本身的特点去构造合适的修正能量泛函, 最终严格论证双流体模型 (1) 的 NLS 逼近结果.

定理 1　固定 $s_A\geqslant 6$, 对于所有的 $C_1,\ T_0>0$, 都存在常数 $C_2>0,\ \epsilon_0>0$, 使得当 NLS 方程 (5) 的所有解 $A\in C([0,T_0],H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ 满足

$$\sup_{T\in[0,T_0]}\left\|A(\cdot,T)\right\|_{H^{s_A}}(\mathbb{R},\mathbb{C})\leqslant C_1$$

时, 下面的陈述成立. 对于任意的 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$, 模型 (1) 的解存在

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ n-1\\ v\end{pmatrix}\in(C([0,T_0/\epsilon^2],H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{R})))^3,$$

且满足

$$\sup_{t\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|\mathcal{E}-\epsilon(A(\epsilon x,\epsilon^2 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+c.c.)\|_{H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\leqslant C_2\epsilon^{3/2},\quad \sup_{t\in[0,T_0/\epsilon^2]}\left\|\begin{pmatrix}n-1\\ v\end{pmatrix}-\epsilon^2|A(\epsilon x,\epsilon^2 t)|^2\zeta\right\|_{H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2}\leqslant C_2\epsilon^{5/2},$$

其中　$$\zeta=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

注 1　对于任意的 $t\in[0,T_0/\epsilon^2]$, 相对于真实解 $(\mathcal{E},n-1,v)$ 和逼近解 $(\epsilon A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+c.c.,\epsilon^2|A|^2\zeta)$ 来说, 定理 1 中阶为 $O(\epsilon^{3/2})$ 和 $O(\epsilon^{5/2})$ 的误差是足够小的. 换言之, 由于 NLS 逼近存在的时间尺度 ϵ^{-2} 足够长, 从而保证在原系统模型 (1) 中能够很好地观察到 NLS 方程的动力学行为.

注 2　定理 1 中误差的光滑性与复振幅 A 的光滑性一致, 这一点可以通过修正逼近解使其在 Fourier 空间中有紧支集来实现, 这是因为逼近解在 Fourier 空间中的支集集中在 $k=0$ 的某个邻域. 具体细节可参见本文第 3 节.

注 3　由于双流体模型 (1) 中出现了拟线性二次项, 这会引起三方面困难. 首先, 为了在时间尺度 $O(\epsilon^{-2})$ 上严格证明 NLS 逼近, 需要利用 normal-form 变换消去误差方程中阶为 $O(1)$ 的非线性项, 而双流体模型 (1) 的色散关系 (3) 导致消去过程中出现共振点 $k=0$, 本文充分利用了拟线性二次项在 $k=0$ 处消失的特点来处理共振点. 其次, 拟线性二次项会损失一阶导数, 因此在对误差进行一致能量估计的过程中, 需要充分利用模型的结构特点解决导数损失的问题. 最后, 双流体模型 (1) 的高度耦合性以及两种完全不同的色散关系, 使得在克服前两种困难时需要更加细致的分析.

本文具体结构如下: 第 1 节列出本文中需要用到的记号以及预备引理; 第 2 节从形式上将 NLS 方程导出, 并给出余项的估计; 第 3 节利用 normal-form 变换消去误差方程中的低阶项; 第 4 节充分利用误差方程结构, 通过构造合适的修正能量泛函得到误差的一致能量估计, 从而严格证明了本文主要结论.

1　预备知识

符号说明　函数 $u\in L^2(\mathbb{R},K)$ 的 Fourier 变换定义如下:

$$\hat{u}(k)=\frac{1}{2\pi}\int u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

其中$K=\mathbb{R}$或者$K=\mathbb{C}$. $H^s(\mathbb{R},K)$表示从$\mathbb{R}$映到K的函数空间. $u\in H^s(\mathbb{R},K)$意味着存在常数C使得

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R},K)}\leqslant C.$$

泛函空间$L^p(m)$的定义如下:

$$u\in L^p(m)(\mathbb{R},K)\Leftrightarrow u\varrho^m\in L^p(\mathbb{R},K),$$

其中$\varrho=\sqrt{1+x^2}$. 若存在常数C使得$A\leqslant CB$, 则记$A=\mathcal{O}(B)$. 注意本文中出现的常数C各不相同. 为了书写方便, 本文中用$\int(\cdot)\,\mathrm{d}x$, L^2 和 H^s 分别代替$\int_{\mathbb{R}}(\cdot)\,\mathrm{d}x$, $L^2(\mathbb{R},K)$和$H^s(\mathbb{R},K)$.

引理 1(Cauchy-Schwarz 不等式)　设f, g在$\mathbb{R}$上可积, 则

$$\int_{\mathbb{R}}fg\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

引理 2(Young 不等式)　设a,b是非负实数, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 那么

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

引理 3　设$j\in\{\pm1\}$, $a_j\in H^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$且$f_j\in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}}a_jf_j\partial_xf_j\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_xa_jf_j^2\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{j\in\{\pm1\}}\int_{\mathbb{R}}a_jf_j\partial_xf_{-j}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(a_{-1}-a_1)(f_1+f_{-1})\partial_x(f_1-f_{-1})\mathrm{d}x+$$
$$\mathcal{O}((\|a_1\|_{H^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}+\|a_{-1}\|_{H^2(\mathbb{R},\mathbb{R})})(\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}+\|f_{-1}\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})})),$$

$$\sum_{j\in\{\pm1\}}j\int_{\mathbb{R}}a_jf_j\partial_xf_{-j}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(a_1+a_{-1})(f_1+f_{-1})\partial_x(f_{-1}-f_1)\mathrm{d}x+$$
$$\mathcal{O}((\|a_1\|_{H^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}+\|a_{-1}\|_{H^2(\mathbb{R},\mathbb{R})})(\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}+\|f_{-1}\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})})).$$

引理 3 的证明可以参考文献 [10] 中的引理 5.3.

引理 4(交换子估计)[25]　设$m\geqslant1$是一个整数, 定义交换子如下:

$$[\nabla^m,f]g:=\nabla^m(fg)-f\nabla^mg.\tag{6}$$

则该交换子有下列估计:

$$\|[\nabla^m,f]g\|_{L^p}\leqslant\|\nabla f\|_{L^{p_1}}\|\nabla^{m-1}g\|_{L^{p_2}}+\|\nabla^mf\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}},\tag{7}$$

其中$p,p_2,p_3\in(1,\infty)$, 且有

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}.$$

2　形式推导和余项估计

为了从双流体模型 (1) 中形式推导出 NLS 方程, 首先将式 (1) 写成一阶偏微分方程组. 为此, 取平衡解附近的扰动解$\rho=n-1$, 则由模型 (1) 中的 Poisson 方程可知, 存在可逆算子$(\rho,\mathcal{E})\to\varphi(\rho,\mathcal{E})$, 使得

$$\phi(\rho,\mathcal{E})=\frac{1}{1-\partial_x^2}\rho+\frac{1}{1-\partial_x^2}\mathcal{E}^2-\frac{1}{2(1-\partial_x^2)}\left(\frac{1}{1-\partial_x^2}\rho\right)^2+\mathcal{M}_1.$$

进一步, 令

$$\partial_t\mathcal{E}=\Lambda\tilde{\mathcal{E}},\ \hat{\Lambda}(k)=\mathrm{i}\cdot\mathrm{sgn}(k)\sqrt{1+k^2},$$

其中sgn(k)表示k的符号函数. 则由模型 (1) 的最后一个方程可得

$$\partial_t\tilde{\mathcal{E}}=-\Lambda\mathcal{E}-\frac{1}{\Lambda}[(1-\partial_x^2)^{-1}\rho)\mathcal{E}]+\mathcal{M}_2,$$

其中$\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$是三次及高于三次的非线性项, 均有很好的性质. 此时, 可将方程 (1) 重新书写为一阶偏微分方程

组,并将其线性项、二次项以及高次项分开:

$$\begin{cases}\partial_t\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ \tilde{\mathcal{E}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \Lambda\\ -\Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ \tilde{\mathcal{E}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{1}{\Lambda}[(1-\partial_x^2)^{-1}\rho)\mathcal{E}]+\mathcal{M}_2\end{pmatrix},\\ \partial_t\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \partial_x\\ \partial_x+\dfrac{\partial_x}{1-\partial_x^2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}+\\ \qquad\begin{pmatrix}-\partial_x(\rho v)\\ -\dfrac{\partial_x}{1-\partial_x^2}\mathcal{E}^2-\dfrac{1}{2}\partial_x v^2+\dfrac{1}{2}\partial_x\rho^2-\dfrac{\partial_x}{2(1-\partial_x^2)}\left(\dfrac{1}{1-\partial_x^2}\rho\right)^2-\partial_x\left(\mathcal{M}_1+\ln(\rho+1)-\rho+\dfrac{1}{2}\rho^2\right)\end{pmatrix}.\end{cases}\tag{8}$$

下面通过变量替换,将式 (8) 的线性部分进行对角化处理.令

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -q & q\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ \tilde{\mathcal{E}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{S}_1\begin{pmatrix}U_1\\ U_{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}=\boldsymbol{S}_2\begin{pmatrix}V_1\\ V_{-1}\end{pmatrix},\tag{9}$$

其中$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}U_1\\ U_{-1}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}V_1\\ V_{-1}\end{pmatrix}$, q满足$\hat{q}=\sqrt{\dfrac{2+k^2}{1+k^2}}$.记

$$\begin{cases}\hat{\Omega}_{\boldsymbol{U}}=\mathrm{i}\omega_u(k),\ \omega_u(k)=\operatorname{sgn}(k)\sqrt{1+k^2},\\ \hat{\Omega}_{\boldsymbol{V}}=\mathrm{i}\omega_v(k),\ \omega_v(k)=k\hat{q}(k),\ \hat{q}(k)=\sqrt{\dfrac{2+k^2}{1+k^2}}.\end{cases}$$

将式 (9) 代入式 (8) 可得以下对角化方程组:

$$\begin{cases}\partial_t U_j=j\Omega_{\boldsymbol{U}}U_j-\dfrac{j}{2\Omega_{\boldsymbol{U}}}\left[\left(\dfrac{1}{1-\partial_x^2}(V_1+V_{-1})\right)(U_1+U_{-1})\right]+\mathcal{H}_{1j}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}),\\ \partial_t V_j=j\Omega_{\boldsymbol{V}}V_j+\dfrac{j\partial_x}{2q(1-\partial_x^2)}(U_1+U_{-1})^2+\dfrac{1}{2}\partial_x[(V_1+V_{-1})q(V_1-V_{-1})]+\\ \qquad\dfrac{j\partial_x}{4q}[q(V_1-V_{-1})]^2-\dfrac{j\partial_x}{4q}(V_1+V_{-1})^2-\dfrac{j\partial_x}{4q(1-\partial_x^2)}\left[\dfrac{1}{1-\partial_x^2}(V_1+V_{-1})\right]^2+\mathcal{H}_{2j}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}),\end{cases}\tag{10}$$

其中$j\in\{\pm1\}$, $\mathcal{H}_{1j}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$, $\mathcal{H}_{2j}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$是关于$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$的三次及高于三次的项,且不会损失导数,因而有比较好的估计.

下面从对角化方程组 (10) 出发,形式推导 NLS 方程.做如下渐近展开:

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}=\epsilon\tilde{\boldsymbol{\varPsi}}=\epsilon\begin{pmatrix}\tilde{\varPsi}_1\\ \tilde{\varPsi}_{-1}\end{pmatrix}=\epsilon(\tilde{\boldsymbol{\varPsi}}_{11}+\tilde{\boldsymbol{\varPsi}}_{-11})=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1(\epsilon x,\epsilon^2 t)\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\begin{pmatrix}\tilde{A}_{-1}(\epsilon x,\epsilon^2 t)\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\\ \boldsymbol{V}=\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\varPhi}}=\epsilon^2\begin{pmatrix}\tilde{\varPhi}_1\\ \tilde{\varPhi}_{-1}\end{pmatrix}=\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\varPhi}}_2=\begin{pmatrix}\tilde{B}_2(\epsilon x,\epsilon^2 t)\\ 0\end{pmatrix},\end{cases}\tag{11}$$

其中$A_{\pm1}$为复值函数,且满足$\overline{A_1}=A_{-1}$, B_2为实值函数.将渐近展开式 (11) 代入对角化方程 (10) 并取ϵ的各阶系数为零.在这个过程中,遇到如$\omega_u(k)\hat{\tilde{A}}_{\pm1}$, $\hat{q}(k)\hat{\tilde{B}}_2$的项,可将$\omega_u(k)$以及$\hat{q}(k)$在$k=0$处 Taylor 展开.令$\epsilon^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$的系数为零,可得

$$\partial_T\tilde{A}_1=-\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_X^2\tilde{A}_1+\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{A}_1\tilde{B}_2.\tag{12}$$

令ϵ^3的系数为零,可得

$$\sqrt{2}\partial_X\tilde{B}_2+\frac{\sqrt{2}}{4}\partial_X|\tilde{A}_1|^2=0.\tag{13}$$

由方程 (13),可取关系式$\tilde{B}_2=-\dfrac{1}{4}|\tilde{A}_1|^2$,将此关系式代入式 (12) 可得下列 NLS 方程:

$$\partial_T\tilde{A}_1=-\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_X^2\tilde{A}_1-\frac{\mathrm{i}}{8}|\tilde{A}_1|^2\tilde{A}_1.\tag{14}$$

为了证明 NLS 方程 (14) 的逼近性质, 需要考虑下列余项:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_U(\epsilon\tilde{\boldsymbol{\Psi}}) = \begin{pmatrix} R_{U_1}(\epsilon\tilde{\boldsymbol{\Psi}}) \\ R_{U_{-1}}(\epsilon\tilde{\boldsymbol{\Psi}}) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{R}_V(\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\Phi}}) = \begin{pmatrix} R_{V_1}(\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\Phi}}) \\ R_{V_{-1}}(\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\Phi}}) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

这些余项就是将渐近展开式 (11) 代入对角化方程 (10) 之后所有未被消掉的项. 通过对形式逼近解 $\epsilon\tilde{\boldsymbol{\Psi}},\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$进行以下两方面的修正, 可以使余项任意小, 进而有利于后面对误差进行一致能量估计. 首先, 将式 (11) 从形式上展开到关于ϵ更高阶的项, 形式上如式 (15). 实际上, 展开到高阶之后代入方程 (10), 类似的方法可得$\tilde{A}_{p1}(p=2,3,4)$满足线性非齐次 Schrödinger 方程. 该方程的系数函数和自由项依赖于$\tilde{A}_1$, 且$\tilde{B}_{ql}(q=3,4,5)$满足依赖于$\tilde{A}_1$的代数方程, 具体推导过程这里不再赘述. 其次, 利用截断函数使逼近解在 Fourier 空间中具有紧支集, 且集中在$k=0$的某个小邻域内. 通过对逼近解进行这两次修正, 可以证明余项任意小, 并且修正后的逼近解与修正前的逼近解差值很小. 另外, 第二步修正使得逼近解成为解析函数, 从而对误差的能量估计更有利. 此修正过程也可参考文献 [20]. 具体地说, 修正后的逼近解 (记为$(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})$) 有下列形式:

$$\begin{cases} \epsilon\boldsymbol{\Psi} = \epsilon\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_{-1} \end{pmatrix} = \epsilon(\boldsymbol{\Psi}_{11}+\boldsymbol{\Psi}_{-11}) + \epsilon^2(\boldsymbol{\Psi}_2+\boldsymbol{\Psi}_{-2}) + \epsilon^3(\boldsymbol{\Psi}_3+\boldsymbol{\Psi}_{-3}) + \epsilon^4(\boldsymbol{\Psi}_4+\boldsymbol{\Psi}_{-4}), \\ \epsilon^2\boldsymbol{\Phi} = \epsilon^2\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_{-1} \end{pmatrix} = \epsilon^2\boldsymbol{\Phi}_2 + \epsilon^3\boldsymbol{\Phi}_3 + \epsilon^4\boldsymbol{\Phi}_4 + \epsilon^5\boldsymbol{\Phi}_5, \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_{\pm11} = \begin{pmatrix} A_{\pm1}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t},\ \boldsymbol{\Psi}_{\pm2} = \begin{pmatrix} A_{\pm21}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ A_{\pm22}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t},$$
$$\boldsymbol{\Psi}_{\pm3} = \begin{pmatrix} A_{\pm31}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ A_{\pm32}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t},\ \boldsymbol{\Psi}_{\pm4} = \begin{pmatrix} A_{\pm41}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ A_{\pm42}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t},$$
$$\boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} B_2(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}_3 = \begin{pmatrix} B_{31}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ B_{32}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\Phi}_4 = \begin{pmatrix} B_{41}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ B_{42}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}_5 = \begin{pmatrix} B_{51}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \\ B_{52}(\epsilon x,\epsilon^2 t) \end{pmatrix}.$$

对于$0<\epsilon\ll1$, 这里$\overline{A_1}=A_{-1},\overline{A_{pl}}=A_{-pl}$, 且$B_2,B_{ql}$在 Fourier 空间中有紧支集. 因此下面的引理成立.

引理 5　令$s_A\geqslant6$, 设$\tilde{A}_1\in C([0,T_0];H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$是 NLS 方程 (14) 的解, 且满足

$$\sup_{T\in[0,T_0]}\|\tilde{A}_1(\cdot,T)\|_{H^{s_A}}\leqslant C_A,$$

则对所有的$s\geqslant0$, 存在依赖于C_A的常数$C_{\boldsymbol{R}_U},C_{\boldsymbol{R}_V},C_{\boldsymbol{\Psi}},C_{\boldsymbol{\Phi}},\epsilon_0$, 使得对所有的$\epsilon\in(0,\epsilon_0)$, 逼近解$(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})$满足

$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|R_{U_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi})\|_{H^s}\leqslant C_{\boldsymbol{R}_U}\epsilon^{13/2},$$
$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|R_{V_j}(\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})\|_{H^s}\leqslant C_{\boldsymbol{R}_V}\epsilon^{13/2},$$
$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|\hat{\Phi}_{\pm1}\|_{L^1(s+1)(\mathbb{R},\mathbb{R})}\leqslant C_{\boldsymbol{\Phi}},$$
$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|\hat{\Psi}_{\pm1}\|_{L^1(s+1)(\mathbb{R},\mathbb{C})}\leqslant C_{\boldsymbol{\Psi}},$$
$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|\epsilon\boldsymbol{\Psi}-\epsilon(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{11}+\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{-11})\|_{H^{s_A}}\leqslant C_{\boldsymbol{\Psi}}\epsilon^{3/2},$$
$$\sup_{T\in[0,T_0/\epsilon^2]}\|\epsilon^2\boldsymbol{\Phi}-\epsilon^2\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2\|_{H^{s_A}}\leqslant C_{\boldsymbol{\Phi}}\epsilon^{5/2}.$$

引理 5 的证明可参考文献 [20] 中的引理 5. 事实上, 前 4 个估计式成立的原因是修正逼近解$(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})$在 Fourier 空间中有紧支集. 又由于对于所有的$m,M\geqslant0$有

$$\|(\chi_{[-\delta,\delta]}-1)\epsilon^{-1}\hat{f}(\epsilon^{-1}\cdot)\|_{L^2(m)}\leqslant C\epsilon^{m+M-1/2}\|f\|_{H^{m+M}},$$

其中$\chi_{[-\delta,\delta]}$是作用在$[-\delta,\delta]$上的特征函数. 引理 5 中第三和第四个估计式经常被用来估计下式:

$$\|\psi_j f\|_{H^s}\leqslant C\|\psi_j\|_{C_b^s}\|f\|_{H^s}\leqslant C\|\hat{\psi}_j\|_{L^1(s)(\mathbb{R},\mathbb{C})}\|f\|_{H^s}.$$

注意到此式不会丢失ϵ. 进一步, $\partial_t\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\pm 11}$可以被$\mathrm{i}\omega_u\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\pm 11}$逼近, 即下列引理成立.

引理 6[20] 对所有的$s\geqslant 0$, 存在常数$C>0$使得下式成立:

$$\|\partial_t\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\pm 11}+\mathrm{i}\omega_u\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\pm 11}\|_{L^1(s)}\leqslant C\epsilon^2. \tag{16}$$

3 Normal-form 变换

为了严格证明 NLS 逼近, 需要对误差作一致能量估计. 为此, 先推导误差满足的发展方程. 根据第 2 节得到的修正逼近解$\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi}$, 可设模型 (10) 的真实解有下列形式:

$$U_j=\epsilon\Psi_j+\epsilon^\beta R_j,\ V_j=\epsilon\Phi_j+\epsilon^\beta S_j, \tag{17}$$

其中$j\in\{\pm 1\},\beta=\dfrac{7}{2}$. 将式 (17) 代入方程 (10) 中可得误差$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$满足的发展方程为

$$\begin{aligned}\partial_t R_j={}&j\Omega_U R_j-\frac{j\epsilon^2}{2\Omega_U}\left[\frac{1}{1-\partial_x^2}(\Phi_1+\Phi_{-1})(R_1+R_{-1})\right]-\frac{j\epsilon^2}{2\Omega_U}\left[(\Psi_1+\Psi_{-1})\frac{1}{1-\partial_x^2}(S_1+S_{-1})\right]-\\&\frac{j\epsilon^{\beta+1}}{2\Omega_U}\left[(R_1+R_{-1})\frac{1}{1-\partial_x^2}(S_1+S_{-1})\right]+\mathcal{H}_{1j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta}R_{U_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})=\\&j\Omega_U R_j+j\epsilon^2(Q_1(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R})+Q_2(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{S}))+j\epsilon^{\beta+1}Q_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\\&\mathcal{H}_{1j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta}R_{U_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi}),\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\partial_t S_j={}&j\Omega_V S_j+\frac{j}{q(1-\partial_x^2)}\partial_x[(\Psi_1+\Psi_{-1})(R_1+R_{-1})]+\left\{\frac{\epsilon^2}{2}\partial_x[(\Phi_1+\Phi_{-1})q(S_1-S_{-1})]+\right.\\&\frac{\epsilon^2}{2}\partial_x[q(\Phi_1-\Phi_{-1})(S_1+S_{-1})]+\frac{j\epsilon^2}{2q}\partial_x[q(\Phi_1-\Phi_{-1})q(S_1-S_{-1})]-\frac{j\epsilon^2}{2q}\partial_x[(\Phi_1+\Phi_{-1})q(S_1+S_{-1})]-\\&\left.\frac{j\epsilon^2}{2q(1-\partial_x^2)}\partial_x\left[\frac{1}{1-\partial_x^2}(\Phi_1+\Phi_{-1})\frac{1}{1-\partial_x^2}(S_1+S_{-1})\right]\right\}+\\&\frac{j\epsilon^{\beta-1}}{2q(1-\partial_x^2)}\partial_x[(R_1+R_{-1})^2]+\left\{\frac{\epsilon^{\beta+1}}{2}\partial_x[(S_1+S_{-1})q(S_1-S_{-1})]+\right.\\&\frac{j\epsilon^{\beta+1}}{4q}\partial_x[q(S_1-S_{-1})^2]-\frac{j\epsilon^{\beta+1}}{4q(1-\partial_x^2)}\partial_x\left[\frac{1}{(1-\partial_x^2)}(S_1+S_{-1})\right]^2-\\&\left.\frac{j\epsilon^{\beta+1}}{4q}\partial_x[(S_1+S_{-1})^2]\right\}+\mathcal{H}_{2j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta-1}R_{V_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})=\\&j\Omega_V S_j+jD(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{R})+\epsilon^2G_j(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{S})+j\epsilon^{\beta-1}D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})+\epsilon^{\beta+1}G_j(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})+\\&\mathcal{H}_{2j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta-1}R_{V_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi}),\end{aligned}\tag{19}$$

其中q满足$\hat{q}=\sqrt{\dfrac{2+k^2}{1+k^2}}$. 对于误差方程 (18) 和 (19), 线性算子Ω_U和Ω_V生成一致有界半群, 因而不会产生困难. 根据引理 5 中的估计式以及β的取值可知, 余项满足

$$\epsilon^{-\beta}R_{U_j}=O(\epsilon^4),\ \epsilon^{-\beta-1}R_{V_j}=O(\epsilon^2).$$

由引理 5 中逼近解的估计以及方程 (10) 中$\mathcal{H}_{1j,2j}$的特点可知

$$\mathcal{H}_{1j,2j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})=O(\epsilon^2).$$

另外, 二次项满足

$$\epsilon^2(Q_1(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R}),\ Q_2(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{S}),G_j(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{S}))=O(\epsilon^2),$$
$$\epsilon^{\beta+1}(G_j(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}),\ Q_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}))=O(\epsilon^{\beta+1}),$$
$$\epsilon^{\beta-1}D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})=O(\epsilon^{\beta-1}).$$

因此, 为了在时间尺度$O(\epsilon^{-2})$上得到 NLS 逼近的有效性, 只有误差方程 (19) 右端第二项即$jD(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{R})=\dfrac{j}{q(1-\partial_x^2)}\partial_x[(\Psi_1+\Psi_{-1})(R_1+R_{-1})]$需要被消去, 使其成为$O(\epsilon^2)$项. 下面利用 normal-form 变换消去该问题项, 令

$$\tilde{S}_j=S_j+\sum_{\tilde{j}\in\{\pm1\}}N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}}),\qquad \Psi_p=\Psi_1+\Psi_{-1},\tag{20}$$

$$N_{j\tilde{j}}(\hat{\Psi}_p,\hat{R}_{\tilde{j}})=\int n_{j\tilde{j}}(k,k-m,m)\hat{\Psi}_p(k-m)\hat{R}_{\tilde{j}}(m)\mathrm{d}m,\qquad j,\tilde{j}\in\{\pm1\}.\tag{21}$$

引理 7　Normal-form 变换 (20) 有以下性质:

① Normal-form 变换的核函数满足

$$n_{j\tilde{j}}(k,k-m,m)=\frac{jk}{\hat{q}(k)(1+k^2)}\frac{1}{j\omega_v(k)-\omega_u(k-m)-\tilde{j}\omega_u(m)},\tag{22}$$

且下列等式成立

$$-j\Omega_{\boldsymbol{V}}N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}})+N_{j\tilde{j}}(\Omega_{\boldsymbol{U}}\Psi_p,R_{\tilde{j}})+\tilde{j}N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,\Omega_{\boldsymbol{U}}R_{\tilde{j}})=-\frac{j}{q(1-\partial_x^2)}\partial_x(\Psi_pR_{\tilde{j}});\tag{23}$$

② 对于任意的$s\geqslant6$, 存在常数C, 使得

$$\|N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}})\|_{H^s}\leqslant C\|R_1,R_{-1}\|_{H^s}.\tag{24}$$

证明　将 normal-form 变换 (20) 代入关于误差$\boldsymbol{S}$的发展方程 (19) 中可得

$$\begin{aligned}
&\partial_t\tilde{S}_j=\partial_tS_j+\sum_{\tilde{j}\in\{\pm1\}}(N_{j\tilde{j}}(\partial_t\Psi_p,R_{\tilde{j}})+N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,\partial_tR_{\tilde{j}}))=\\
&\quad j\Omega_{\boldsymbol{V}}\tilde{S}_j+\sum_{\tilde{j}\in\{\pm1\}}\Bigg\{\Bigg[-j\Omega_{\boldsymbol{V}}N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}})+N_{j\tilde{j}}(\Omega_{\boldsymbol{U}}\Psi_p,R_{\tilde{j}})+\tilde{j}N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,\Omega_{\boldsymbol{U}}R_{\tilde{j}})+\\
&\quad\frac{j\partial_x}{q(1-\partial_x^2)}(\Psi_pR_{\tilde{j}})\Bigg]+N_{j\tilde{j}}(\partial_t\Psi_p-\Omega_{\boldsymbol{U}}\Psi_p,R_{\tilde{j}})+\tilde{j}\epsilon^2N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,Q_1(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R})+Q_2(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{S}))+\\
&\quad N_{j\tilde{j}}(\Psi_p,\tilde{j}\epsilon^{\beta+1}Q_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}))\Bigg\}+\mathcal{H}_{1j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta}R_{U_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi})+\epsilon^2G_j(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{S})+\\
&\quad\epsilon^{\beta+1}G_j(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})+j\epsilon^{\beta-1}D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})+\mathcal{H}_{2j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})+\epsilon^{-\beta-1}R_{V_j}(\epsilon\boldsymbol{\Psi},\epsilon^2\boldsymbol{\Phi}).
\end{aligned}\tag{25}$$

根据引理 6 可知方程 (25) 右端项$N_{j\tilde{j}}(\partial_t\Psi_p-\Omega_{\boldsymbol{U}}\Psi_p,R_{\tilde{j}})=O(\epsilon^2)$, 且除了方程 (25) 右端$O(1)$项, 即中括号里的项以外, 其他项关于$\epsilon$的阶均大于等于 2. 取方程 (25) 右端中括号里的项为零, 可得等式 (23). 在 Fourier 空间中计算可得

$$(j\omega_v(k)-\omega_u(k-m)-\tilde{j}\omega_u(m))n_{j\tilde{j}}(k,k-m,m)=\frac{jk}{\hat{q}(k)(1+k^2)}.\tag{26}$$

由式 (26) 可得$n_{j\tilde{j}}(k,k-m,m)$满足引理 7 中的式 (23). 然而, 若式 (22) 右端的分母为零, 则 normal-form 变换 (20) 没有意义. 但是因为修正逼近解$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(k-m)$的紧支集在$k-m=0$附近, 因而在方程 (17) 中可用$0$和$k$分别替换$k-m$和$m$, 回顾双流体模型的色散关系 (3) 有

$$(j\omega_v(k)-\omega_u(0)-\tilde{j}\omega_u(k))n_{j\tilde{j}}(k)=\frac{jk}{\hat{q}(k)(1+k^2)}.$$

故可定义$n_{j\tilde{j}}(k)$为

$$n_{j\tilde{j}}(k)=\frac{jk}{\hat{q}(k)(1+k^2)}\frac{1}{jk\hat{q}(k)-1-\tilde{j}\sqrt{1+k^2}},$$

注意到当$k=0,\tilde{j}=1$时, 分母确实为零, 也就是说$k=0$是一个共振点, 但由于二次项$D(\hat{\boldsymbol{\Psi}},\hat{\boldsymbol{R}})$在$k=0$也为零, 因此

$k=0$为平凡共振点. 除此之外, 无其他共振点. 因此, 此处所做的 normal-form 变换是有意义的, 可以成功消去误差方程中的$O(1)$项, 引理 7 的第①条得证. 根据引理 5 关于逼近解的估计以及 normal-form 变换的核函数的形式可以直接得到估计式 (22), 引理 7 的第②条得证.

4 误差估计

将 normal-form 变换 (20) 代入误差方程 (18) 和 (19) 中, 得到变换后的误差方程为

$$\partial_t R_j = j\Omega_U R_j + \epsilon^2 \mathcal{F}_{1j}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}}), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{S}_j = {} & j\Omega_V \tilde{S}_j + \frac{j\epsilon^2}{2}[\Theta_+ q\partial_x(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{-j})] + \frac{\epsilon^2}{2}[q\Theta_-\partial_x(\tilde{S}_j + \tilde{S}_{-j})] + \\ & \frac{\epsilon^2}{2q}[q\Theta_- q\partial_x(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{-j})] - \frac{j\epsilon^2}{2q}[\Theta_+\partial_x(\tilde{S}_j + \tilde{S}_{-j})] + \epsilon^2\mathcal{F}_{2j}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}}),\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\Theta_+ = \Phi_1 + \Phi_{-1} + \epsilon^{\beta+1}\left((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_{-1}) - \sum_{\tilde{j}\in\{\pm1\}}(N_{1\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}}) + N_{-1\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}}))\right),$$

$$\Theta_- = \Phi_1 - \Phi_{-1} + \epsilon^{\beta+1}\left((\tilde{S}_1 - \tilde{S}_{-1}) - \sum_{\tilde{j}\in\{\pm1\}}(N_{1\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}}) - N_{-1\tilde{j}}(\Psi_p,R_{\tilde{j}}))\right),$$

其中$\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$表示不损失导数的项, 即对于所有的$s\geqslant 6$有下列估计

$$\|\epsilon^2\mathcal{F}_{1j,2j}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\|_{H^s} \leqslant C\epsilon^2(1 + \|(\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\|_{H^s} + \epsilon^{1/2}\|(\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\|_{H^s}^2 + \epsilon^{5/2}\|(\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\|_{H^s}^3). \tag{29}$$

为了严格证明 NLS 逼近的有效性, 只需要得到误差$(\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})$在时间尺度$O(\epsilon^{-2})$上的一致能量估计. 由于误差方程 (28) 中二次项损失一阶导数并且有交叉项, 故首先介绍以下引理.

引理 8 误差方程 (28) 的两个分量方程作差可得

$$\begin{aligned}\partial_x(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_{-1}) = {} & \frac{1}{q(1+\epsilon^2\Theta_+)}[\partial_t(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_{-1}) - \epsilon^2 q\Theta_-\partial_x(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_{-1}) - \\ & \epsilon^2(\mathcal{F}_{21}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}}) + \mathcal{F}_{2-1}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}}))].\end{aligned} \tag{30}$$

下面对误差作能量估计. 设

$$\mathcal{M}_s = \sum_{\ell=1}^{s} M_\ell, \tag{31}$$

$$M_\ell = \frac{1}{2}\sum_{j\in\{\pm1\}}\left(\int(\partial_x^\ell R_j)^2\mathrm{d}x + \int(\partial_x^\ell \tilde{S}_j)^2\mathrm{d}x\right). \tag{32}$$

现在分析$\partial_t M_\ell$. 经过计算可得

$$\begin{aligned}\partial_t M_\ell = \sum_{j\in\{\pm1\}}\Bigg[& \int\partial_x^\ell R_j\partial_x^\ell j\Omega_U R_j\mathrm{d}x + \epsilon^2\int\partial_x^\ell R_j\partial_x^\ell\mathcal{F}_{1j}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\mathrm{d}x + \\ & \int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\partial_x^\ell j\Omega_V\tilde{S}_j\mathrm{d}x + \frac{j\epsilon^2}{2}\int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\partial_x^\ell(\Theta_+ q\partial_x(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{-j}))\mathrm{d}x + \\ & \frac{\epsilon^2}{2}\int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\partial_x^\ell(q\Theta_-\partial_x(\tilde{S}_j + \tilde{S}_{-j}))\mathrm{d}x + \frac{\epsilon^2}{2}\int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\frac{\partial_x^\ell}{q}(q\Theta_- q\partial_x(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{-j}))\mathrm{d}x - \\ & \frac{j\epsilon^2}{2}\int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\frac{\partial_x^\ell}{q}(\Theta_+\partial_x(\tilde{S}_j + \tilde{S}_{-j}))\mathrm{d}x + \frac{\epsilon^2}{2}\int\partial_x^\ell\tilde{S}_j\partial_x^\ell\mathcal{F}_{1j}(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{R},\tilde{\boldsymbol{S}})\mathrm{d}x\Bigg].\end{aligned} \tag{33}$$

由于色散算子Ω_U,Ω_V是反对称微分算子, 因而等式 (33) 右端第一项和第三项均为零. 又根据估计式 (29)、引理 5、Cauchy-Schwarz 不等式、Sobolev 嵌入$H^1\hookrightarrow L^\infty$以及 Young 不等式可得, 等式 (33) 右端第二项和最后一项可以被$\epsilon^2 C(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2)$控制. 对等式 (33) 进一步利用交换子的定义 (6), 可得

$$
\begin{aligned}
\partial_t M_\ell = &\sum_{j\in\{\pm1\}}\Big[\frac{j\epsilon^2}{2}\int \partial_x^\ell \tilde S_j\ \Theta_+ q\partial_x^{\ell+1}(\tilde S_j-\tilde S_{-j})\mathrm{d}x+\frac{j\epsilon^2}{2}\int \partial_x^\ell \tilde S_j[\partial_x^\ell,\Theta_+]q\partial_x(\tilde S_j-\tilde S_{-j})\mathrm{d}x+\\
&\frac{\epsilon^2}{2}\int \partial_x^\ell \tilde S_j q\Theta_-\partial_x^{\ell+1}(\tilde S_j+\tilde S_{-j})\mathrm{d}x+\frac{\epsilon^2}{2}\int \partial_x^\ell \tilde S_j[\partial_x^\ell,q\Theta_-]\partial_x(\tilde S_j+\tilde S_{-j})\mathrm{d}x+\\
&\frac{\epsilon^2}{2}\int \frac{1}{q}\partial_x^\ell \tilde S_j q\Theta_- q\partial_x^{\ell+1}(\tilde S_j-\tilde S_{-j})\mathrm{d}x+\frac{\epsilon^2}{2}\int \frac{1}{q}\partial_x^\ell \tilde S_j[\partial_x^\ell,q\Theta_-]q\partial_x(\tilde S_j-\tilde S_{-j})\mathrm{d}x-\\
&\frac{j\epsilon^2}{2}\int \frac{1}{q}\partial_x^\ell \tilde S_j\Theta_+\partial_x^{\ell+1}(\tilde S_j+\tilde S_{-j})\mathrm{d}x-\frac{j\epsilon^2}{2}\int \frac{1}{q}\partial_x^\ell \tilde S_j[\partial_x^{\ell 1},\Theta_+]\partial_x(\tilde S_j+\tilde S_{-j})\mathrm{d}x\Big]+\\
&\epsilon^2 O(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2).
\end{aligned}\tag{34}
$$

回顾式 (3) 可知, 当$|k|\to\infty$时, 有

$$
\hat q(k)-1=O(k^{-2}),\ \frac{1}{\hat q(k)}-1=O(k^{-2}).\tag{35}
$$

对式 (34), 利用式 (35)、式 (30)、分部积分、交换子估计 (7)、引理 5、Cauchy-Schwarz 不等式、Sobolev 嵌入$H^1\hookrightarrow L^\infty$以及 Young 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\partial_t M_\ell = &\sum_{j\in\{\pm1\}}\Big[-2\epsilon^2\int q\partial_x\Theta_-(\partial_x^\ell\tilde S_j)^2\mathrm{d}x-j\epsilon^2\int \Theta_+\partial_x^\ell\tilde S_j\partial_x^{\ell+1}\tilde S_{-j}\mathrm{d}x\Big]+\epsilon^2 O(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2)=\\
&-2\epsilon^2\int\Theta_+\partial_x^\ell(\tilde S_1+\tilde S_{-1})\partial_x^{\ell+1}(\tilde S_1-\tilde S_{-1})\mathrm{d}x+\epsilon^2 O(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2)=\\
&-2\epsilon^2\int\Theta_+\partial_x^\ell(\tilde S_1+\tilde S_{-1})\partial_x^\ell\Big[\frac{1}{q(1+\epsilon^2\Theta_+)}(\partial_t(\tilde S_1+\tilde S_{-1})-\epsilon^2 q\Theta_-\partial_x(\tilde S_1+\tilde S_{-1})-\\
&\epsilon^2(\mathcal{F}_{21}(\boldsymbol\Psi,\boldsymbol\Phi,\boldsymbol R,\tilde{\boldsymbol S})+\mathcal{F}_{2-1}(\boldsymbol\Psi,\boldsymbol\Phi,\boldsymbol R,\tilde{\boldsymbol S})))\Big]\mathrm{d}x+\epsilon^2 O(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2)=\\
&-\epsilon^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\Theta_+}{q(1+\epsilon^2\Theta_+)}(\partial_x^\ell(\tilde S_1+\tilde S_{-1}))^2\mathrm{d}x+\epsilon^2 O(1+\mathcal{M}_s+\epsilon^{1/2}\mathcal{M}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\mathcal{M}_s^2).
\end{aligned}\tag{36}
$$

因此, 可以定义如下形式的修正能量泛函:

$$
\tilde{\mathcal{M}}_s=\mathcal{M}_s+\epsilon^2\sum_{\ell=1}^{s}h_\ell,\tag{37}
$$

其中

$$
h_\ell=\int\frac{\Theta_+}{q(1+\epsilon^2\Theta_+)}(\partial_x^\ell(\tilde S_1+\tilde S_{-1}))^2\mathrm{d}x.
$$

因而对于修正能量泛函$\tilde{\mathcal{M}}_s$有

$$
\partial_t\tilde{\mathcal{M}}_s\leqslant C\epsilon^2(1+\tilde{\mathcal{M}}_s+\epsilon^{1/2}\tilde{\mathcal{M}}_s^{3/2}+\epsilon^{5/2}\tilde{\mathcal{M}}_s^2).\tag{38}
$$

对于封闭的能量估计式 (38), 利用 Gronwall 不等式可知, 对于足够小的$\epsilon>0$, $\tilde{\mathcal{M}}_s$在$t\in[0,T_0/\epsilon^2]$上是一致有界的. 另外, 根据 normal-form 变换 (20) 及其估计 (22) 可得, $\|(\boldsymbol R,\boldsymbol S)\|_{H^s}\leqslant C\|(\boldsymbol R,\tilde{\boldsymbol S})\|_{H^s}\leqslant C\sqrt{\tilde{\mathcal{M}}_s}$. 因此, 对角化模型 (10) 的真实解与修正逼近解$\epsilon\boldsymbol\Psi,\epsilon^2\boldsymbol\Phi$之间的误差$(\boldsymbol R,\boldsymbol S)$在$t\in[0,T_0/\epsilon^2]$上是一致有界的. 进一步地, 根据引理 5 中关于逼近解的估计, 以及可逆变换 (9) 可得定理 1 的结论.

5　结论与展望

本文研究了一类双流体模型的调制逼近, 其中调制逼近解是关于时间震荡的正弦波列. 在严格证明该调制逼近的有效性时, 模型中拟线性二次项会引起平凡共振点$k=0$的出现以及导数的损失. 本文通过利用 normal-form 变换并构造合适的修正能量泛函, 最终在时间尺度$O(\epsilon^{-2})$上严格证明了误差的一致能量估计. 若考虑关于时空的震荡逼近解, 则证明调制逼近过程中还会出现两个非平凡共振点. 寻找合适的权重函数有望解决非平凡共振点引起的困难, 笔者拟将另文探讨.

致谢　本文作者衷心感谢山西财经大学青年基金项目 (QN-202021) 对本文的资助.

参考文献(References):

[1] 冯依虎, 石兰芳, 许永红, 等. 一类大气尘埃等离子体扩散模型研究[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 639-650.(FENG Yihu, SHI Lanfang, XU Yonghong, et al. Study on a class of diffusion models for dust plasma in atmosphere[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 639-650.(in Chinese))

[2] 陈丽娟, 鲁世平. 一类太空等离子体单粒子运动模型的同宿轨[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(12): 1258-1265.(CHEN Lijuan, LU Shiping. Homoclinic orbit of the motion model for a single space plasma particle[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(12): 1258-1265.(in Chinese))

[3] GUO B L. *Soliton Theory and Its Application*[M]. Berlin: Springer, 2008.

[4] GUO B L, HUANG D W. Existence of solitary waves for a simplified two fluid system of equations in plasma[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, **46**(7): 073514.

[5] HAN L J, ZHANG J J, GUO B L. Global smooth solution for a kind of two-fluid system in plasmas[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**(5): 3453-3481.

[6] GUO Y, PAUSADER B. Global smooth ion dynamics in the Euler-Poisson system[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2011, **303**(1): 89-125.

[7] GUO Y, PU X K. KdV limit of the Euler-Poisson system[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2014, **211**: 673-710.

[8] PU X K. Dispersive limit of the Euler-Poisson system in higher dimensions[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2013, **45**(2): 834-878.

[9] LIU H M, PU X K. Long wavelength limit for the quantum Euler-Poisson equation[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2016, **48**(4): 2345-2381.

[10] ABLOWITZ M J, SEGUR H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*[M]//*SIAM Studies in Applied Mathematics*. 1981.

[11] ZAKHAROV V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, **9**(2): 190-194.

[12] SULEM C, SULEM P. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-focusing and Wave Collapse*[M]. Springer Science & Business Media, 2007.

[13] BERGÉ L. Wave collapse in physics: principle and applications to light and plasma waves[J]. *Physics Reports*, 1998, **303**(5/6): 259-370.

[14] LIU H M, PU X K. Justification of the NLS approximation for the Euler-Poisson equation[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2019, **371**(2): 357-398.

[15] KALYAKIN L A. Asymptotic decay of a one-dimensional wave packet in a nonlinear dispersive medium[J]. *SBORNIK Mathematics*, 1988, **60**: 457-483.

[16] TOTZ N, WU S J. A rigorous justification of the modulation approximation to the 2D full water wave problem[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2012, **310**(3): 817-883.

[17] TOTZ N. A justification of the modulation approximation to the 3D full water wave problem[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2015, **335**(1): 369-443.

[18] SCHNEIDER G. Justification of the NLS approximation for the KdV equation using the Miura transformation[J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2011(4): 1687-9120.

[19] DÜLL W P, SCHNEIDER G, WAYNE C E. Justification of the non-linear Schrödinger equation for the evolution of gravity driven 2D surface water waves in a canal of finite depth[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2016, **220**(2): 543-602.

[20] SCHNEIDER G, WAYNE C E. Justification of the NLS approximation for a quasilinear water wave model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(2): 238-269.

[21] SHATAH J. Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1985, **38**: 685-696.

[22] DÜLL W P. Justification of the nonlinear Schrödinger approximation for a quasi-linear Klein-Gordon equation[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2017, **335**(3): 1189-1207.

[23] BIAN D F, LIU H M, PU X K. Modulation approximation for the quantum Euler-Poisson equation[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (*Series B*), 2021, **26**(8): 4375-4405.

[24] DÜLL W P. Validity of the nonlinear schrödinger approximation for the two-dimensional water wave problem with and without surface tension in the arc length formulation[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2021, **239**: 831-914.

[25] KATO T, PONCE G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1988, **41**(7): 891-907.