



具有Robin边界条件的分数阶扩散方程的源项辨识问题研究

崔建璇, 石成鑫, 柳冕, 程浩

Source Identification for the Time-Fractional Diffusion Equation With Robin Boundary Conditions

CUI Jianxuan, SHI Chengxin, LIU Mian, and CHENG Hao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430004>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于组合神经网络的时间分数阶扩散方程计算方法

A Combined Artificial Neural Network Method for Solving Time Fractional Diffusion Equations

应用数学和力学. 2019, 40(7): 741–750 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390288>

Sobolev方程的混合连续时空有限元解的误差估计

Error Estimates of Mixed Space–Time Finite Element Solutions to Sobolev Equations

应用数学和力学. 2020, 41(8): 834–843 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410053>

变系数分数阶对流扩散方程的一种算子矩阵方法

An Operational Matrix Method for Fractional Advection–Diffusion Equations With Variable Coefficients

应用数学和力学. 2018, 39(1): 104–112 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380041>

一种新的正则化方法求解热传导方程的侧边值问题

A New Regularization Method for Solving Sideways Heat Equations

应用数学和力学. 2021, 42(5): 541–550 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410290>

非线性分数阶常微分方程的分段线性插值多项式方法

A Piecewise Linear Interpolation Polynomial Method for Nonlinear Fractional Ordinary Differential Equations

应用数学和力学. 2021, 42(5): 531–540 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410149>

具有不确定性的分数阶时滞复值神经网络无源性

Passivity of Fractional–Order Delayed Complex–Valued Neural Networks With Uncertainties

应用数学和力学. 2021, 42(5): 492–499 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410309>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

具有 Robin 边界条件的分数阶扩散方程的源项辨识问题研究*

崔建讓, 石成鑫, 柳冕, 程浩

(江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 对 Robin 边界条件时间分数阶扩散方程的源项辨识问题进行了研究. 这类问题是不适定的, 因此提出了一种迭代型正则化方法, 得到了源项辨识问题的正则近似解, 给出了先验和后验参数选取规则下正则近似解和精确解之间的误差估计, 数值算例验证了该方法的有效性.

关键词: 分数阶扩散方程; 源项辨识; 迭代正则化; 误差估计

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430004

Source Identification for the Time-Fractional Diffusion Equation With Robin Boundary Conditions

CUI Jianxuan, SHI Chengxin, LIU Mian, CHENG Hao

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, P.R.China)

Abstract: The source term identification for the time-fractional diffusion equation with Robin boundary conditions was studied. Since the ill-posedness of this problem, an iterative regularization method was constructed to calculate the regularized approximate solution of the source term. The error estimates between the regularized approximate solution and the exact solution were given under the priori and the posteriori regularization parameter choice rules. Numerical examples verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: fractional diffusion equation; source term identification; iterative regularization; error estimate

引言

近几十年来, 分数阶微分方程被广泛应用在地震波勘探、黏弹性、反常扩散、生物材料和混沌动力学等许多领域, 已经成为数学和物理学的热门研究课题之一. 相较于整数阶微分方程, 分数阶微分方程具有记忆和遗传性质, 使得其在描述反常扩散现象时更有效, 因此受到了学者们的广泛关注, 而分数阶扩散方程就是其中一

* 收稿日期: 2022-01-04; 修订日期: 2022-02-10

基金项目: 国家自然科学基金(11801221); 江苏省自然科学基金(BK20190578)

作者简介: 崔建讓(1998—), 男, 硕士生(E-mail: 2979697403@qq.com);

石成鑫(1998—), 男, 硕士生(E-mail: 1772065320@qq.com);

柳冕(1997—), 男, 硕士生(E-mail: 819340002@qq.com);

程浩(1983—), 男, 副教授, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: chenghao@jiangnan.edu.cn).

引用格式: 崔建讓, 石成鑫, 柳冕, 程浩. 具有 Robin 边界条件的分数阶扩散方程的源项辨识问题研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(11): 1303-1312.

类重要的分数阶微分方程.

目前关于分数阶扩散方程正问题的研究已经相对完善,包括极值原理^[1]、解的存在唯一性理论^[2]、有限差分法^[3-4]、有限元法^[5]和谱方法^[6]等,但是关于分数阶扩散方程反问题的研究结果还相对较少,源项辨识问题是分数阶扩散方程反问题的一个重要分支.许多学者使用不同方法研究了分数阶扩散方程源项辨识问题:Zhang等^[7]通过解析延拓和Laplace变换证明解的唯一性,并运用Tikhonov正则化方法进行数值求解;Tuan等^[8]在Dirichlet边界条件下考虑了源项辨识问题,得到了精确解与正则近似解之间的先验误差估计;Wei等^[9]考虑了一种变系数的时间分数阶扩散方程,并用一种修正的拟边界方法辨识了源项;Yang等^[10]利用Landweber迭代正则化方法,分别给出了先验和后验正则化参数选择规则下的收敛性误差估计;Wang等^[11]考虑了二维时间分数阶扩散方程,提出了一种新的数值方法,给出了正则近似解.上述研究结果大多考虑的是Dirichlet或Neumann边界条件下的分数阶方程的源项辨识问题,然而Robin边界条件的物理模型在描述边界上热流变化与界面内外温度差之间的关系上有着广泛的应用背景.因此,本文考虑更为一般的Robin边界条件下的时间分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r(t)f(x) + Z(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) - bu_x(0,t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(L,t) + bu_x(L,t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $b > 0$ 是一个正常数; $D_t^\alpha u(x,t)$ 是阶数为 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 的Caputo分数阶导数,定义为

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\alpha};$$

$\phi(x)$, $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 需要满足相容性条件

$$\begin{cases} \phi(0) - bu_x(0,0) = \mu_1(0), \\ u(L,0) + bu_x(L,0) = \mu_2(0). \end{cases}$$

若已知源项 $r(t)$, $f(x)$, $Z(x,t)$, 初值条件 $\phi(x)$ 和Robin边界条件 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, 则问题(1)是经典的时间分数阶扩散方程正问题.

本文所要研究的源项辨识问题是:已知 $r(t)$, $Z(x,t)$, 初值条件 $\phi(x)$, Robin边界条件 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, 利用终值数据 $u(x,T) = g(x)$ 来确定未知源项 $f(x)$, 即

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r(t)f(x) + Z(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) - bu_x(0,t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(L,t) + bu_x(L,t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x,T) = g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2)$$

该源项辨识问题是不适定的,因此需要进行正则化处理.我们使用迭代正则化方法解决不适定问题,同时给出先验和后验正则化参数选取规则,以及正则近似解和精确解之间的误差估计,并给出了数值算例.

本文主要结构如下:第1节给出了正问题的求解过程并分析了反问题的不适定性;第2节介绍了正则化方法,并给出了先验和后验参数选取规则下的误差估计;第3节通过数值算例说明了该方法的有效性;最后一节给出了全文的总结.

1 问题求解与不适定性分析

为了便于计算,将问题(1)中的非齐次边界条件转化为齐次边界条件,做如下变换:

$$u(x,t) = W(x,t) + V(x,t),$$

其中辅助函数 $V(x,t)$ 满足条件

$$\begin{cases} V(0,t) - bV_x(0,t) = \mu_1(t), \\ V(L,t) + bV_x(L,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

解得

$$V(x, t) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2b + L} x + \frac{(b + L)\mu_1(t) + b\mu_2(t)}{2b + L}, \tag{3}$$

$W(x, t)$ 是下列问题的解:

$$\begin{cases} D_t^\alpha W(x, t) = \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \tilde{F}(x, t), & 0 < x < L, t > 0, \\ W(x, 0) = \tilde{\phi}(x), & 0 \leq x \leq L, \\ W(0, t) - bW_x(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ W(L, t) + bW_x(L, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

这里 $\tilde{F}(x, t) = r(t)f(x) + Z(x, t) - D_t^\alpha V(x, t)$, $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - V(x, 0)$. 通过分离变量法、Laplace 变换与逆变换可以求出

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \tilde{F}_n(t - \tau) d\tau + \tilde{\phi}_n E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) \right] X_n(x), \tag{4}$$

其中 $E_{\alpha, \alpha}(\cdot)$ 和 $E_{\alpha, 1}(\cdot)$ 为 Mittag-Leffler 函数^[12], $\tilde{F}_n(t) = (\tilde{F}(x, t), X_n(x))$, $\tilde{\phi}_n = (\tilde{\phi}(x), X_n(x))$. 这里特征值 $\lambda_n = \mu_n^2$, $X_n(x)$ 是标准正交基底, 其表达式为

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} (b\mu_n \cos(\mu_n x) + \sin(\mu_n x)), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中

$$d_n = \frac{\mu_n^2}{2} \left(\frac{b^2 \sin(2\mu_n L)}{2\mu_n} + b^2 L \right) - \frac{2b\mu_n \cos(2\mu_n L) + \sin(2\mu_n L)}{4\mu_n} + \frac{L + b}{2},$$

μ_n 是超越方程 $\tan(\mu L) = \frac{2b\mu}{b^2\mu^2 - 1}$ 的第 n 个正根, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ ^[13].

由式(3)和(4), 可以得到正问题(1)的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \tilde{F}_n(t - \tau) d\tau + \tilde{\phi}_n E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) \right] X_n(x) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2b + L} x + \frac{(b + L)\mu_1(t) + b\mu_2(t)}{2b + L}.$$

由终值数据 $u(x, T) = g(x)$, 可得未知源项 $f(x)$ 满足以下算子方程:

$$(Kf)(x) = \int_0^L k(x, \xi) f(\xi) d\xi = \tilde{g}(x),$$

这里 $\tilde{g}(x) = g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (Z_n(T - \tau) - D_t^\alpha V_n(T - \tau)) d\tau + \tilde{\phi}_n E_{\alpha, 1}(-\lambda_n T^\alpha) \right] X_n(x) - V(x, T)$, 核函数为

$$k(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n X_n(x) X_n(\xi),$$

其中 $\sigma_n = \int_0^T \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) r(T - \tau) d\tau$. 设 K^* 是算子 K 的共轭算子, 容易计算得出 $K = K^*$, 因此 K 是一个具有奇异值 σ_n 的自伴算子.

为了方便后续的定理证明, 我们给出引理 1 ~ 4.

引理 1^[14] 设 $r(t) \in C[0, T]$ 满足 $r(t) \geq r_0 > 0, t \in [0, T], \|r\|_{C[0, T]} = \sup_{t \in [0, T]} |r(t)|$, 对于任意 $\lambda_n \geq \lambda_1 > 0$, 存在与 α, T, λ_1 有关的正常数 C_1 , 使得

$$\frac{r_0 C_1}{\lambda_n} \leq \sigma_n = \int_0^T \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) r(T - \tau) d\tau \leq \frac{\|r\|_{C[0, T]}}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

引理 2^[15] 设 $0 < \beta < \frac{1}{\|K\|^2}, \gamma \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则当 $\gamma > \mu/2$ 时, 有

$$\sup_{0 < \sigma_n \leq \sigma_1} \left| (1 - (1 - \beta \sigma_n^2)^m)^\gamma \sigma_n^{-\mu} \right| \leq \beta^{\frac{\mu}{2}} m^{\frac{\mu}{2}}.$$

引理 3^[15] 对于 $m > 0, \frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, 当 $|\varphi| \leq 1$ 时, 有

$$|1 - (1 - \varphi^m)^\gamma| \leq |\varphi|^m.$$

引理 4^[16] 对于 $0 < \lambda \leq 1, k > 0$, 定义 $r_k(\lambda) = (1 - \lambda)^k$, 则有 $r_k(\lambda)\lambda^v \leq \theta_v(k + 1)^{-v}$, 其中

$$\theta_v = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq 1, \\ v^v, & v > 1. \end{cases}$$

由引理 1 可知当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\int_0^T \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) r(T-\tau) d\tau} \geq \frac{\lambda_n}{\|r\|_{C[0,T]}} \rightarrow \infty$. 这意味着终值数据中的微小扰动都会引起源项 $f(x)$ 的巨大变化, 因此必须借助正则化方法来恢复源项的稳定性.

2 正则化方法与误差估计

对于不适定问题的求解, 经典的方法有 Tikhonov 正则化和 Landweber 迭代方法^[17]. 本文给出了三种 Landweber 迭代型正则化方法求解反问题(2). 首先给出经典的 Landweber 迭代方法:

$$f^{0,\delta}(x) := 0, f^{m,\delta}(x) = (I - \beta K^* K) f^{m-1,\delta}(x) + \beta K^* \tilde{g}^\delta(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

其中 I 是单位算子, $m > 0$ 是迭代步数, 松弛因子 β 满足 $0 < \beta < \frac{1}{\|K\|^2}$. 容易计算得到正则近似解:

$$f^{m,\delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \beta \sigma_n^2)^m}{\sigma_n} \tilde{g}_n^\delta X_n(x),$$

这里 $\tilde{g}_n^\delta = (\tilde{g}^\delta(x), X_n(x))$.

然而传统的 Landweber 方法给出的正则近似解往往过于光滑, 为了克服解的过度光滑性, 文献 [15] 提出了分数阶 Landweber 迭代方法, 我们通过该方法来求解问题(2):

$$f^{0,\delta}(x) := 0, f^{m,\delta}(x) = \left(I - \beta (K^* K)^{\frac{\gamma+1}{2}} \right) f^{m-1,\delta}(x) + \beta (K^* K)^{\frac{\gamma-1}{2}} K^* \tilde{g}^\delta(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

其中 $1/2 < \gamma \leq 1$. 容易计算得到正则近似解

$$f^{m,\delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (1 - \beta \sigma_n^2)^m)^\gamma}{\sigma_n} \tilde{g}_n^\delta X_n(x).$$

此外, 我们将分数阶 Landweber 迭代方法和 TSVD 正则化方法^[18] 相结合, 构造如下的正则近似解:

$$f^{m,\delta}(x) = \sum_{\sigma_n^2 \geq M/m} \frac{1}{\sigma_n} \tilde{g}_n^\delta X_n(x) + \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{(1 - (1 - \beta \sigma_n^2)^m)^\gamma}{\sigma_n} \tilde{g}_n^\delta X_n(x), \quad (5)$$

其中 $M > 0$ 是一个正常数. 该方法的优势在于: 既保留了分数阶 Landweber 方法的特色, 又增加了 TSVD 正则化方法对大、小奇异值分别过滤的优点.

本文以式(5)为例, 对反问题(2)进行稳定求解. 由于在实际应用中, 终值数据是在 $t = T$ 处测量得到的, 因而不可避免会带有误差. 假设测量数据 $g^\delta(x)$ 和终值数据 $g(x)$ 满足

$$\|g^\delta(x) - g(x)\| \leq \delta, \quad (6)$$

其中 $\delta > 0$ 是测量误差, $\|\cdot\|$ 是 L^2 范数, 不难看出 $\|\tilde{g}^\delta(x) - \tilde{g}(x)\| = \|g^\delta(x) - g(x)\| \leq \delta$.

假设源项 $f(x)$ 满足如下先验界条件:

$$\|f(x)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-2p} |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq E, \quad (7)$$

其中 $p > 0, E > 0$ 均为常数.

为了保证解的稳定性, 我们给出如下的条件稳定性结果.

定理 1 若 $\|f(x)\|_p \leq E$, 则有 $\|f(x)\| \leq E^{\frac{1}{p+1}} \|\tilde{g}(x)\|^{\frac{p}{p+1}}$.

证明 由式(7)和 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^2}{\sigma_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^{2/p+1}}{\sigma_n^2} \tilde{g}_n^{2/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^{2/p+1}}{\sigma_n^{2/p+1}} \sigma_n^{-2/p} \tilde{g}_n^{2/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^2}{\sigma_n^2} \sigma_n^{-2p} \right)^{1/p+1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n^2 \right)^{p/p+1} = \\ &\|f(x)\|_p^{2/p+1} \|\tilde{g}(x)\|^{2/p} \leq E^{2/p+1} \|\tilde{g}(x)\|^{2/p}. \end{aligned}$$

2.1 先验误差估计

定理 2 假设 $f(x)$ 是反问题(2)的精确解, $f^{m,\delta}(x)$ 是由式(5)给出的正则近似解, 噪声估计(6)和先验界条件(7)成立, 若选取

$$m = \left\lceil \left(\frac{E}{\delta} \right)^{2/p+1} \right\rceil,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则有以下误差估计:

$$\|f^{m,\delta}(x) - f(x)\| \leq \left(\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{M}} + M^{p/2} \right) E^{1/p+1} \delta^{p/p+1}.$$

证明 由三角不等式得

$$\|f^{m,\delta}(x) - f(x)\| \leq \|f^{m,\delta}(x) - f^m(x)\| + \|f^m(x) - f(x)\|.$$

先考虑第一部分, 由引理 2(取 $\mu = 1$) 和式(6)可知

$$\begin{aligned} \|f^{m,\delta}(x) - f^m(x)\| &= \left\| \sum_{\sigma_n^2 \geq M/m} \frac{1}{\sigma_n} (\tilde{g}_n^\delta - \tilde{g}_n) X_n(x) + \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma}{\sigma_n} (\tilde{g}_n^\delta - \tilde{g}_n) X_n(x) \right\| \leq \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 \geq M/m} \sqrt{\frac{m}{M}} (\tilde{g}_n^\delta - \tilde{g}_n) X_n(x) + \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \sqrt{\beta m} (\tilde{g}_n^\delta - \tilde{g}_n) X_n(x) \right\| \leq \\ &\left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\beta m} \right) \|\tilde{g}^\delta(x) - \tilde{g}(x)\| \leq \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\beta m} \right) \delta. \end{aligned} \tag{8}$$

再考虑第二部分

$$\begin{aligned} \|f^m(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{\sigma_n^2 \geq M/m} \frac{1}{\sigma_n} \tilde{g}_n X_n(x) + \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma}{\sigma_n} \tilde{g}_n X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \tilde{g}_n X_n(x) \right\| = \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{[(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma - 1]}{\sigma_n} \tilde{g}_n X_n(x) \right\| \leq \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{1}{\sigma_n} \tilde{g}_n X_n(x) \right\| = \left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/m} f_n X_n(x) \right\| = \\ &\left(\sum_{\sigma_n^2 < M/m} \sigma_n^{2p} \sigma_n^{-2p} f_n^2 \right)^{1/2} < \left(\frac{M}{m} \right)^{p/2} \|f(x)\|_p \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{p/2} E. \end{aligned} \tag{9}$$

结合式(8)和(9), 并选取 $m = \lceil (E/\delta)^{2/(p+1)} \rceil$, 证毕.

2.2 后验误差估计

在上一小节中, 我们给出了先验规则下的正则化参数 $m = \lceil (E/\delta)^{2/(p+1)} \rceil$, 但事实上先验界 E 是很难获得的, 因此下面我们将考虑不依赖任何先验信息的后验参数选取规则.

采用偏差原理, 正则化参数 m 的选取满足

$$\|K f^{m,\delta}(x) - \tilde{g}^\delta(x)\| \leq \omega \delta \leq \|K f^{m-1,\delta}(x) - \tilde{g}^\delta(x)\|, \tag{10}$$

其中 $\omega > 1$ 是一个常数.

定理 3 假设 $f(x)$ 是反问题(2)的精确解, $f^{m,\delta}(x)$ 是由式(5)给出的正则近似解, 噪声估计(6)和先验界条件(7)成立, 正则化参数 m 由偏差原理(10)给出, 则有以下误差估计:

$$\|f^{m,\delta}(x) - f(x)\| \leq \left[2^{\frac{p}{2p+2}} \frac{(M\beta)^{\frac{p}{2p+2}} + (M\beta)^{\frac{-1}{2p+2}}}{(\omega - 1)^{\frac{1}{p+1}}} + (\omega + 1)^{\frac{p}{p+1}} \right] E^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

证明 由三角不等式得

$$\|f^{m,\delta}(x) - f(x)\| \leq \|f^{m,\delta}(x) - f^m(x)\| + \|f^m(x) - f(x)\|.$$

先考虑第一部分, 由引理 3(取 $\varphi = 1 - \beta\sigma_n^2$) 和引理 4(取 $k = m - 1, \lambda = \beta\sigma_n^2, v = 1/2$) 可知

$$\begin{aligned} \omega\delta &\leq \|Kf^{m-1,\delta}(x) - \tilde{g}^\delta(x)\| = \left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/(m-1)} [1 - (1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^{m-1})^\gamma] \tilde{g}_n^\delta X_n(x) \right\| \leq \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} (1 - \beta\sigma_n^2)^{m-1} \tilde{g}_n^\delta X_n(x) \right\| \leq \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} (1 - \beta\sigma_n^2)^{m-1} (\tilde{g}_n^\delta - \tilde{g}_n) X_n(x) \right\| + \left\| \sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} (1 - \beta\sigma_n^2)^{m-1} \tilde{g}_n X_n(x) \right\| \leq \\ &\delta + \left\| \sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} (1 - \beta\sigma_n^2)^{m-1} \sigma_n f_n X_n(x) \right\| \leq \delta + \frac{1}{\sqrt{\beta m}} \left\| \sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} f_n X_n(x) \right\| \leq \\ &\delta + \frac{1}{\sqrt{\beta m}} \left(\sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} \sigma_n^{2p} \sigma_n^{-2p} f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta + \frac{1}{\sqrt{\beta m}} \left(\frac{2M}{m} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{\sigma_n^2 < 2M/m} \sigma_n^{-2p} f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta + \frac{1}{\sqrt{\beta m}} \left(\frac{2M}{m} \right)^{\frac{p}{2}} E, \end{aligned}$$

故

$$m \leq \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{2}{p+1}} \frac{(2M)^{\frac{p}{p+1}}}{\frac{1}{\beta^{p+1}} (\omega - 1)^{\frac{2}{p+1}}}.$$

参考定理 2 的证明可知

$$\|f^{m,\delta}(x) - f^m(x)\| \leq \left(\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \sqrt{m} \delta \leq E^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} 2^{\frac{p}{2p+2}} \frac{(M\beta)^{\frac{p}{2p+2}} + (M\beta)^{\frac{-1}{2p+2}}}{(\omega - 1)^{\frac{1}{p+1}}}. \tag{11}$$

再考虑第二部分

$$\begin{aligned} \|K(f^m(x) - f(x))\| &= \left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/m} [(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma - 1] \tilde{g}_n X_n(x) \right\| = \\ &\left\| \sum_{\sigma_n^2 < M/m} [(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma - 1] (\tilde{g}_n - \tilde{g}_n^\delta) X_n(x) + \right. \\ &\left. \sum_{\sigma_n^2 < M/m} [(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma - 1] \tilde{g}_n^\delta X_n(x) \right\| \leq \\ &\|\tilde{g}(x) - \tilde{g}^\delta(x)\| + \|Kf^{m,\delta}(x) - \tilde{g}^\delta(x)\| < \delta + \omega\delta. \end{aligned}$$

由式(7)可知

$$\|f^m(x) - f(x)\|_p = \left(\sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{[(1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m)^\gamma - 1]^2}{\sigma_n^2} \tilde{g}_n^2 \sigma_n^{-2p} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\sigma_n^2 < M/m} \frac{1}{\sigma_n^2} (\sigma_n f_n)^2 \sigma_n^{-2p} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f(x)\|_p \leq E.$$

应用定理 1 可知

$$\begin{aligned} \|f^m(x) - f(x)\| &\leq \|f^m(x) - f(x)\|_p^{\frac{1}{p+1}} \|K(f^m(x) - f(x))\|_p^{\frac{p}{p+1}} \leq \\ &E^{\frac{1}{p+1}} (\omega + 1)^{\frac{p}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned} \tag{12}$$

结合式(11)和(12), 证毕.

3 数值算例

在这一节中, 我们将给出数值算例来验证迭代型正则化方法的有效性. 由于正问题(1)的精确解很难获得, 我们使用有限差分法求解正问题(即假定 $F(x, t) = r(t)f(x) + Z(x, t)$ 、初值条件 $\phi(x)$ 以及 Robin 边界条件 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 已知)来获得终值数据 $g(x)$.

在数值实验中, 空间和时间离散点数分别为 $H + 1, N + 1$, 相应的步长分别为 $h = L/H, \tau = T/N$, 并记 $x_i = ih (i = 0, 1, \dots, H), t_n = n\tau (n = 0, 1, \dots, N)$, 令 $u_i^n = u(x_i, t_n), F_i^n = F(x_i, t_n)$ 为网格点处的值.

正问题(1)中的时间项导数可以通过 Caputo 分数阶导数的 L_1 插值逼近^[19] 来近似得到:

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[u_i^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)}) u_i^k - a_{n-1}^{(\alpha)} \phi(x_i) \right] = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + F_i^n,$$

其中 $a_k^{(\alpha)} = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}, k > 0$. 定义 $\theta = \frac{h^2}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}$, 结合初值条件和边界条件有

$$\begin{cases} -2u_0^n = -\left(\theta + 2 + \frac{2h}{b}\right)u_0^n + \frac{2h}{b}\mu_1(t) + \theta \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)})u_0^k + \theta a_{n-1}^{(\alpha)}\phi(x_0) + h^2 F_0^n, \\ -u_{i+1}^n + (\theta + 2)u_i^n - u_{i-1}^n = \theta \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)})u_i^k + \theta a_{n-1}^{(\alpha)}\phi(x_i) + h^2 F_i^n, \\ \left(\theta + 2 + \frac{2h}{b}\right)u_H^n - 2u_{H-1}^n = \frac{2h}{b}\mu_2(t) + \theta \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)})u_H^k + \theta a_{n-1}^{(\alpha)}\phi(x_H) + h^2 F_H^n, \end{cases}$$

从而得到如下矩阵方程:

$$A U^n = h^2 A_1 + A_2 + \theta a_{n-1}^{(\alpha)} A_3 + A_4,$$

其中 A 是三对角矩阵

$$A_{(H+1) \times (H+1)} = \begin{pmatrix} \theta + 2 + \frac{2h}{b} & -2 & 0 & 0 & & \\ -1 & \theta + 2 & -1 & 0 & & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & 0 & -1 & \theta + 2 & -1 & \\ & 0 & 0 & -2 & \theta + 2 + \frac{2h}{b} & \end{pmatrix},$$

$$U^n = (u_0^n, \dots, u_H^n)^T, A_1 = (F_0^n, \dots, F_H^n)^T, A_2 = \left(\frac{2h}{b}\mu_1(t), 0, \dots, 0, \frac{2h}{b}\mu_2(t)\right)^T, A_3 = (\phi(x_0), \dots, \phi(x_H))^T,$$

$$A_4 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)})u_0^k, \dots, \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)})u_H^k\right)^T.$$

噪声数据是通过添加一个随机干扰产生的, 即

$$g^\delta(x) = g(x) + \varepsilon g(x) \cdot (2\text{rand}(\text{size}(g(x))) - 1),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 反映噪声水平且相应的噪声水平为 $\delta = \|g^\delta(x) - g(x)\|$.

正则近似解与精确解之间的绝对误差 $e(f, \varepsilon)$ 和相对误差 $e_r(f, \varepsilon)$ 分别是

$$e(f, \varepsilon) = \|f^{m, \delta}(x) - f(x)\|, \quad e_r(f, \varepsilon) = \frac{\|f^{m, \delta}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}.$$

在数值实验中, 取 $b = 1, L = 1, T = 1, H = 50, N = 100, M = 1, \beta = \frac{1}{\sigma_n^2 + 1}, \gamma = 0.75, \gamma = 0.75$. 正则近似解由式(5)计算得到, 先验正则化参数 $m = \lceil (E/\delta)^{2/(p+1)} \rceil$, 其中 $E = \|f(x)\|_p, p$ 在算例 1~3 中分别取 0.5, 0.3 和 0.3, 后验正则化参数 m 由式(10)给出, 其中 $\omega = 1.1$.

算例 1 取源项

$$f(x) = e^x, \quad r(t) = t^2, \quad Z(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} e^{-x},$$

初值 $\phi(x) = x$, Robin 边值 $\mu_1(t) = -2(t^2 + 1)$, $\mu_2(t) = t^2 + 1$.

算例 2 取源项

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0.5, \\ 2-2x, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad r(t) = t^2, \quad Z(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} x,$$

初值 $\phi(x) = x$, Robin 边值 $\mu_1(t) = -2(t^2 + 1)$, $\mu_2(t) = t^2 + 1$.

算例 3 取源项

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25, \\ 1, & 0.25 < x \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 < x \leq 1, \end{cases} \quad r(t) = t^2, \quad Z(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} x,$$

初值 $\phi(x) = x$, Robin 边值 $\mu_1(t) = -2(t^2 + 1)$, $\mu_2(t) = t^2 + 1$.

图 1~3 中图(a)采用先验参数选取规则计算正则近似解;图 1~3 中图(b)采用后验参数选取规则计算正则近似解.表 1~3 给出了在不同误差水平下精确解和正则近似解的绝对误差和相对误差.

从图 1~3 可以看出,先验和后验正则化参数选取规则下计算的源项正则近似解与精确解之间的逼近效果都较好,而且当解的光滑性变好时,数值结果也会变好.从表 1~3 可以看出,随着 ε 的增大,绝对误差和相对误差都会增大,这与理论结果相符合.还可以看出,后验正则化参数选取规则下的数值结果几乎可以媲美先验正则化参数选取规则下的数值结果,这说明了本文的方法是有效的.

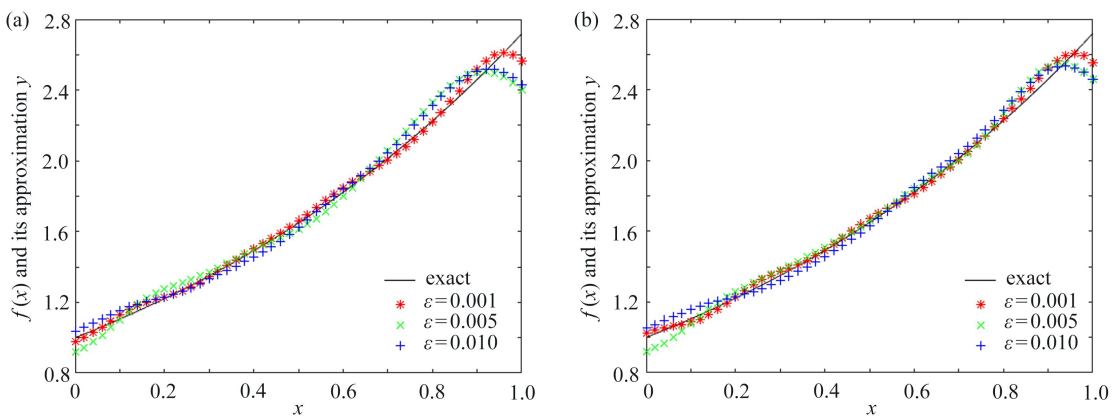


图 1 算例 1 的精确解及其正则近似解: (a) 先验规则; (b) 后验规则

Fig. 1 The exact solution and its regularized approximate solution of example 1: (a) the priori rule; (b) the posteriori rule

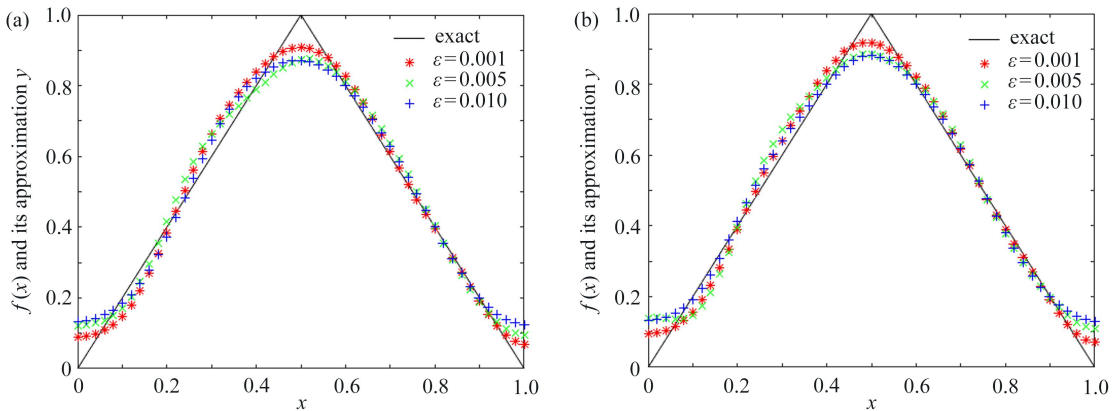


图 2 算例 2 的精确解及其正则近似解: (a) 先验规则; (b) 后验规则

Fig. 2 The exact solution and its regularized approximate solution of example 2: (a) the priori rule; (b) the posteriori rule

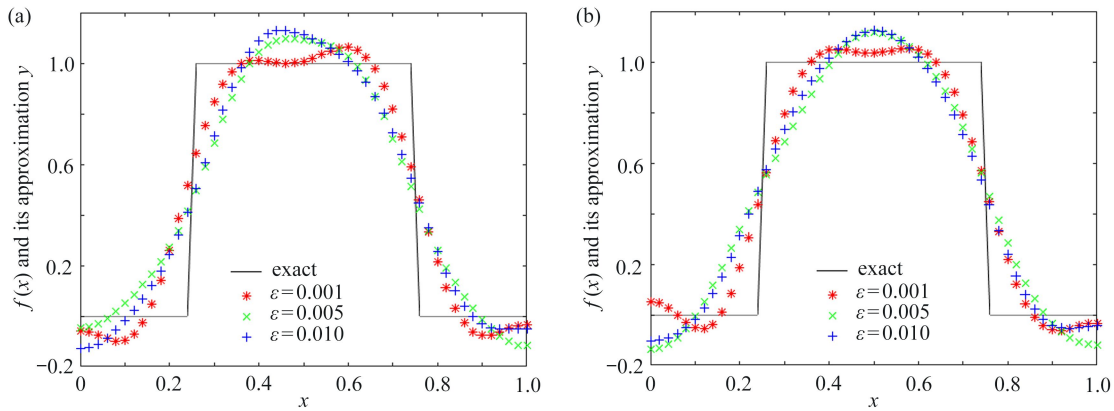


图 3 算例 3 的精确解及其正则近似解: (a) 先验规则; (b) 后验规则

Fig. 3 The exact solution and its regularized approximate solution of example 3: (a) the priori rule; (b) the posteriori rule

表 1 算例 1 在不同误差水平下的绝对误差和相对误差

Table 1 Absolute errors and relative errors under different error levels of example 1

ε	0.001	0.005	0.010
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.344 4	0.649 1	0.729 8
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.026 9	0.050 7	0.057 0
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.294 5	0.557 0	0.681 2
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.023 0	0.043 5	0.053 2

表 2 算例 2 在不同误差水平下的绝对误差和相对误差

Table 2 Absolute errors and relative errors under different error levels of example 2

ε	0.001	0.005	0.010
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.200 9	0.343 5	0.531 3
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.049 2	0.084 1	0.130 1
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.197 7	0.299 0	0.368 4
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.048 4	0.073 2	0.090 2

表 3 算例 3 在不同误差水平下的绝对误差和相对误差

Table 3 Absolute errors and relative errors under different error levels of example 3

ε	0.001	0.005	0.010
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	1.245 0	1.400 0	1.536 5
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.249 0	0.280 1	0.307 3
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	1.191 0	1.369 5	1.467 0
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.238 2	0.273 9	0.293 4

4 结 论

本文考虑了 Robin 边界条件下的时分数阶扩散方程源项辨识问题, 给出了三种 Landweber 型正则化方法, 以 TSVD 正则化与分数阶 Landweber 迭代方法相结合的方法为例, 给出了正则近似解和精确解在不同参数选取规则下的误差估计, 数值部分验证了方法的有效性. 此外该方法还可以推广到其他反问题, 如多项分数阶反问题和高维方程反问题等, 还有待于进一步研究.

参考文献 (References):

[1] LUCHKO Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2011, 14(1): 110-124.

[2] YAMAMOTO M. Weak solutions to non-homogeneous boundary value problems for time-fractional diffusion equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, 460(1): 365-381.

- [3] LANGLANDS T A M, HENRY B I. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **205**(2): 719-736.
- [4] ZHUANG P, LIU F. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2006, **22**(3): 87-99.
- [5] DENG W H. Finite element method for the space and time fractional Fokker-Planck equation[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, **47**(1): 204-226.
- [6] SONG F Y, XU C J. Spectral direction splitting methods for two-dimensional space fractional diffusion equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, **299**: 196-214.
- [7] ZHANG Y, XU X. Inverse source problem for a fractional diffusion equation[J]. *Inverse Problems*, 2011, **27**(3): 035010.
- [8] TUAN N H, LONG L D, THINH N V. Regularized solution of an inverse source problem for a time fractional diffusion equation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, **40**(19/20): 8244-8264.
- [9] WEI T, WANG J G. A modified quasi-boundary value method for an inverse source problem of the time-fractional diffusion equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2014, **78**: 95-111.
- [10] YANG F, LIU X, LI X X, et al. Landweber iterative regularization method for identifying the unknown source of the time-fractional diffusion equation[J]. *Advances in Difference Equations*, 2017, **2017**: 388-403.
- [11] WANG W, YAMAMOTO M, HAN B. Numerical method in reproducing kernel space for an inverse source problem for the fractional diffusion equation[J]. *Inverse Problems*, 2013, **29**(9): 095009.
- [12] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [13] 顾樵. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (GU Qiao. *Mathematical Methods for Physics*[M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))
- [14] MA Y K, PRAKASH P, DEIVEEGAN A. Generalized Tikhonov methods for an inverse source problem of the time-fractional diffusion equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, **108**: 39-48.
- [15] KLANN E, RAMLAU R. Regularization by fractional filter methods and data smoothing[J]. *Inverse Problems*, 2008, **24**(2): 025018.
- [16] DENG Y, LIU Z. Iteration methods on sideways parabolic equations[J]. *Inverse Problem*, 2009, **25**(9): 095004.
- [17] KIRSCH A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problem*[M]. New York: Springer, 1996.
- [18] 于宁. 求解时间分数阶扩散方程反源问题的分数阶Landweber正则化方法[D]. 硕士学位论文. 济南: 山东大学, 2020. (YU Ning. The fractional Landweber regularization method for solving inverse source problem of time-fractional diffusion equation[D]. Master Thesis. Jinan: Shandong University, 2020. (in Chinese))
- [19] 孙志忠, 高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (SUN Zhizhong, GAO Guanghua. *Finite Difference Method for Fractional Differential Equation*[M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese))