

控制棒下落与流体流动的耦合状态方程及其保辛算法

赵珂, 陈昌义, 席炎炎, 黄东威, 吴锋, 钟万毅

The Coupling State Equations and the Symplectic Algorithm for Control Rod Drop and Fluid Flow

ZHAO Ke, CHEN Changyi, XI Yanyan, HUANG Dongwei, WU Feng, and ZHONG Wanxie

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430001>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

峡谷、垭口地貌下导线流固耦合风偏振动分析

Fluid-Structure Coupling Wind-Induced Vibration Analysis of Transmission Lines Across 2 Close Hills

应用数学和力学. 2020, 41(7): 747-759 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400241>

圆筒流体域内管束振动与碰撞接触的流固耦合动力学方法研究

A Method of Fluid-Solid Coupling Dynamics for Tube Bundle Vibration and Collision in a Cylinder Fluid Domain

应用数学和力学. 2018, 39(5): 568-583 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380265>

实际气体的幂律状态方程

A Power Law Equation of State for Actual Gases

应用数学和力学. 2017, 38(2): 200-205 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370140>

电液位置伺服系统的鲁棒自适应控制

A Robust Adaptive Backstepping Control Method for ElectroHydraulic Position Servo Systems

应用数学和力学. 2017, 38(6): 676-684 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370272>

线性Hamilton系统边值问题的保辛数值方法

A Symplectic Approach for Boundary-Value Problems of Linear Hamiltonian Systems

应用数学和力学. 2017, 38(9): 988-998 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370365>

奇异摄动反应扩散方程的后验误差估计及自适应算法

A Posteriori Error Estimation and Adaptive Algorithm for Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Equations

应用数学和力学. 2021, 42(3): 323-330 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410103>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

控制棒下落与流体流动的耦合状态方程 及其保辛算法*

赵珂¹, 陈昌义², 席炎炎², 黄东威¹, 吴锋¹, 钟万勰¹

(1. 大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 中广核研究院有限公司, 广东 深圳 518000)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 针对核反应堆内控制棒下落问题, 提出了描述控制棒下落与流体流动的耦合非线性状态方程. 该状态方程对于落棒过程内不同的流体状态, 具有统一的表达形式, 可以很方便地处理不同工况下的落棒问题. 为高效分析落棒过程, 准确捕捉落棒过程内流动状态的突变, 并保证时程积分的数值稳定, 提出了一种基于时间步长自适应的保辛算法. 数值算例表明, 提出的数值模型可以采用较大的时间步长精确计算控制棒在下落过程中的位移、速度、加速度、落棒时间等关键数据, 计算结果与商业软件所得结果高度吻合.

关键词: 落棒分析; 流固耦合; 保辛算法; 时间步长自适应; 状态方程

中图分类号: O352; TP391.9 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430001

The Coupling State Equations and the Symplectic Algorithm for Control Rod Drop and Fluid Flow

ZHAO Ke¹, CHEN Changyi², XI Yanyan², HUANG Dongwei¹,
WU Feng¹, ZHONG Wanxie¹

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;

2. China Nuclear Power Technology Research Institute Co. Ltd., Shenzhen, Guangdong 518000, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wanxie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The nonlinear state equations describing the coupling between control rod drop and fluid flow were proposed to solve the problem of control rod drop in nuclear reactors. The state equations have a uniform format for different fluid states in the process of control rod drop, which can conveniently deal with the problem for different working conditions. To efficiently analyze the falling process, accurately capture the sudden change of flow state and ensure the numerical stability of time integral, an adaptive time step-based symplecticity-preserving algorithm was proposed. Numerical examples show that, the proposed numerical model can accurately calculate the key data such as the displacement, the velocity, the acceleration and the falling time of the control rod in the falling process with a large time step, and the calculated results are

* 收稿日期: 2022-01-04; 修订日期: 2022-01-19

基金项目: 国家自然科学基金(11472067; 51609034); 辽宁省自然科学基金(2021-MS-119); 中央高校基本科研业务费(DUT20RC(5)009; DUT20GJ216)

作者简介: 赵珂(1993—), 男, 博士生(E-mail: zhaoke_93@163.com);

吴锋(1985—), 男, 副教授(通讯作者. E-mail: vonwu@dlut.edu.com.cn).

引用格式: 赵珂, 陈昌义, 席炎炎, 黄东威, 吴锋, 钟万勰. 控制棒下落与流体流动的耦合状态方程及其保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(9): 935-943.

in good agreement with those obtained the by the commercial software.

Key words: control rod drop analysis; fluid-structure interaction; symplecticity-preserving algorithm; adaptive time step; state equation

引 言

控制棒是核反应堆在发生紧急情况时控制停堆的重要部件,控制棒的下落时间是保证核反应安全的关键指标.近年来,国内外许多学者对控制棒下落时间的问题做了大量研究:文献[1]通过商业软件 ADINA 建立了单根控制棒二维流-固仿真模型,并将 ADINA 得到的计算结果与未公开的企业内部代码得到的结果进行比较,落棒时间误差在 7% 以内;文献[2]基于 FLUENT 动网格算法,建立了单根控制棒三维流体仿真模型,将得到的控制棒落棒时间与试验结果进行比较,误差小于 6%.采用二维、三维动力学模型的缺点是自由度多、计算量大,因此计算效率较低,往往只能分析单根控制棒,不能分析整个控制棒组件.考虑到控制棒和导向管均具有长细比大的特点,且控制棒的直径与导向管的直径相近,文献[3]基于一维 Navier-Stokes 方程建立了控制棒下落的数学模型,得到的结果能够很好地匹配试验结果;文献[4-5]构建了基于一维 Navier-Stokes 方程的落棒动力学模型,通过编译 C++ 程序进行计算.这些研究中常将流体与固体分开进行分析^[4-5]:首先,假定控制棒的运动状态恒定不变,计算流体流动的流量和压强分布,得到流体阻力;然后,假定流体为拟稳态流动,其速度和压强状态不变,根据流体阻力计算控制棒的速度等变量.这种算法本质上是动力学求解算法中的算子分裂法^[6],因此只有一阶精度,计算精度较低,需要取非常小的时间步长^[3]才能保证“拟稳态流动”近似的精度.此外,控制棒下落过程中,流场中的流速、压强等会发生非线性突变,采用单一的时间步长,算子分裂算法还存在不收敛问题,本文的研究将致力于解决这些问题.

在控制棒下落过程中,控制棒的下落与流体流动是同时发生的,因此应该采用流固耦合方法,以真实地描述控制棒的下落过程.基于流固耦合思想,本文首先建立了控制棒运动方程和导向管内流体压降平衡的非线性微分方程组;然后引入关键恒等变换 $\dot{w} = v$,得到非线性微分方程组的状态方程.为精确求解该非线性状态方程,本文建立了一种时间步长自适应保辛算法.该方法可以根据流动的实际状态实时调整时间步长,精确捕捉流动状态的突变,避免数值发散,并可以在流动变化平稳的时间段采用较大的时间步长,提高计算效率.

1 理论模型

1.1 物理模型

控制棒和导向管的纵剖面图如图 1 所示,其中阴影部分表示控制棒,控制棒下面是导向管,控制棒的直径小于导向管的直径,且控制棒的长度大于导向管的长度.导向管和控制棒全部竖直放置,导向管管壁和底部中心处均有流水孔,分别记为侧孔和底部流水孔.导向管和控制棒完全浸在水中,底部流水孔保持进水状态,而侧孔存在流进和流出两种状态的突变.在控制棒下落过程中,导向管固定不动.初始时刻,控制棒在导向管侧孔上方,如图 1(a) 所示.控制棒由静止释放后,在重力、流体作用力等不同力的作用下开始下落,经过一段时间,控制棒底部下落至导向管侧孔下方,如图 1(b) 所示.

对图 1 中的结构建立坐标,以导向管底部截面圆心为坐标原点 o ,以导向管中心轴为 z 轴,向上为正.图 1 中,导向管底部 Z_0 的坐标为 0,对应的压强为 P_{Z_0} ;导向管侧孔的坐标为 Z_1 ,对应的压强为 P_{Z_1} ;控制棒底部的坐标为 Z ,对应的压强为 P_Z , Z 在下落过程中会随时间而变化;导向管顶部的坐标为 Z_2 ,对应的压强为 P_{Z_2} .

图 1(a) 中,控制棒底部在导向管侧孔上方.根据导向管内流量的不同可将导向管分成三个区间,分别为 $[Z, Z_2]$, $[Z_1, Z]$, $[Z_0, Z_1]$,对应的流量分别记为 Q_2 , Q_{1-Z} , Q_0 .从导向管侧孔流进或流出的流量记为 Q_1 ,以流出为正.同样地,图 1(b) 中也根据导向管内流量的不同,将导向管分成三个区间,分别为 $[Z_1, Z_2]$, $[Z, Z_1]$, $[Z_0, Z]$,对应的流量记为 Q_2 , Q_{1-Z} , Q_0 .而导向管侧孔处的流量仍记为 Q_1 ,以流出为正.

为方便论述,导向管顶部以上的控制棒部分所受的力暂不考虑;且假定控制棒在下落过程中保持竖直状态,即控制棒没有横向偏移和横向振动;反应堆内的流体满足不可压缩条件.

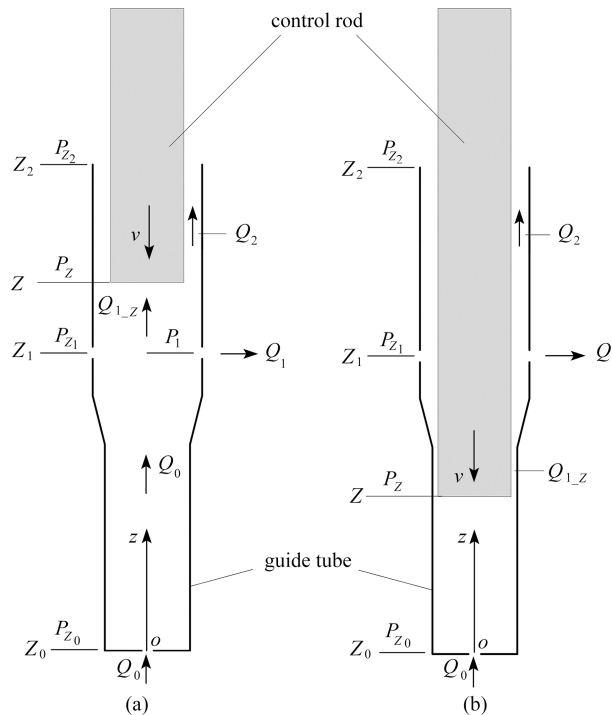


图 1 控制棒在导向管内的下落示意图
Fig. 1 The falling diagram of the control rod in the guide tube

1.2 控制棒的运动方程

控制棒的运动受 Newton 第二定律控制, 其控制方程可以写成

$$M \times \ddot{w} = F, \tag{1}$$

其中, M 是控制棒的质量; w 是控制棒的位移; \ddot{w} 表示控制棒的加速度; F 是控制棒受到的合力, 可表示为

$$F = F_g + F_b + f_{rod} + F_r + F_c + F_s. \tag{2}$$

式 (2) 中, F_g 为控制棒的重力; F_b 为控制棒受到的浮力; f_{rod} 为控制棒受到的流体摩擦阻力; F_r 为控制棒受到的流体压差阻力; F_c 为控制棒受到的机械摩擦力, 由实验拟合得到; F_s 为控制棒受到的弹簧阻力, 此力在控制棒快要到导向管底部时产生, 防止由于控制棒速度过大从而与导向管产生强烈碰撞, 可表示为

$$F_s = \begin{cases} 0, & w \leq h_s, \\ F_{prl} + K_s \times (w - h_s), & w > h_s, \end{cases} \tag{3}$$

其中, F_{prl} 表示弹簧预紧力, K_s 表示弹簧刚度, h_s 表示控制棒接触弹簧时的位移.

在某区间段 $[Z_a, Z_b]$ 内, 摩擦力 f_{rod} 可表示为^[7]

$$f_{rod} = \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \text{sgn}(v_f - v) C_2 (v_f - v)^2 l_2 dz, \tag{4}$$

其中, ρ 为流体密度, v_f 为流体流速, v 为控制棒的下落速度, C_2 为控制棒的摩擦因数, l_2 为控制棒的湿周长, sgn 为符号函数.

在式 (2) 所示控制棒受到的几种合力中, 重力和浮力很容易计算, 摩擦阻力可通过式 (4) 来计算, 而压差阻力 F_r 的计算涉及到流体的非正常流动, 计算相对复杂, 将在下一小节详细阐述.

1.3 压降和压差阻力计算

导向管内的流体流动可分为两种情况, 一种为图 1 所示 Q_0 对应的区间, 流体在变截面的圆形导向管内流动; 第二种为图 1 所示 Q_2 对应的区间, 流体在变截面的导向管和控制棒之间的环形通道内流动. 由于通道的长细比很大, 流动可模拟为一维 N-S 方程^[1]:

$$\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \text{sgn}(v_f) C_1 \frac{v_f^2 l_1}{2 S_1} - \text{sgn}(v_f - v) C_2 \frac{(v_f - v)^2 l_2}{2 S_1} - \text{sgn}(v_f) \times \frac{1}{2} \times (v_f \times S_1)^2 \times K_c, \tag{5}$$

其中, t 为时间, P 为压强, C_1 为导向管的摩擦因数, l_1 为导向管的湿周长, S_1 为控制棒与导向管之间的环形面积, K_c 为局部形阻系数, 由实验测定, 令环形面积之间的流量为 $Q = v_f S_1$. 将上式在区间 $[Z_a, Z_b]$ 上积分, 可得压降方程:

$$P(Z_b) - P(Z_a) = -\rho \int_{Z_a}^{Z_b} \frac{\dot{Q}}{S_1} dz - Q^2 \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{S_1(Z_b)^2} - \frac{1}{S_1(Z_a)^2} \right) - \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{Q}{S_1} - v \right) C_2 \left(\frac{Q}{S_1} - v \right)^2 \frac{l_2}{S_1} \right] dz - \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \operatorname{sgn}(Q) C_1 \left(\frac{Q}{S_1} \right)^2 \frac{l_1}{S_1} dz - Q^2 \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \operatorname{sgn}(v_f) K_c dz. \quad (6)$$

引入如下变量:

$$\begin{cases} I_1(Z_a, Z_b) = \rho \int_{Z_a}^{Z_b} \frac{dz}{S_1}, \\ I_2(Z_a, Z_b) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{S_1(Z_b)^2} - \frac{1}{S_1(Z_a)^2} \right), \\ I_3(Z_a, Z_b) = \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \operatorname{sgn}(Q) C_1 \left(\frac{Q}{S_1} \right)^2 \frac{l_1}{S_1} dz, \\ I_4(Z_a, Z_b) = \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{Q}{S_1} - v \right) C_2 \left(\frac{Q}{S_1} - v \right)^2 \frac{l_2}{S_1} \right] dz, \\ I_5(Z_a, Z_b) = Q^2 \frac{\rho}{2} \int_{Z_a}^{Z_b} \operatorname{sgn}(v_f) K_c dz, \end{cases} \quad (7)$$

则压降方程 (6) 化简为

$$P(Z_a) - P(Z_b) = \dot{Q} I_1(Z_a, Z_b) + Q^2 I_2(Z_a, Z_b) + I_3(Z_a, Z_b) + I_4(Z_a, Z_b) + I_5(Z_a, Z_b). \quad (8)$$

式 (7) 中的 $I_1 \sim I_5$ 均有特定的物理意义: I_1 表示由于局部加速度导致的压降变化系数, 称为惯性压降系数; I_2 表示对流加速度产生的压降系数, 称为对流压降系数; I_3 表示导向管受到的流体摩擦力产生的压降; I_4 表示控制棒受到的流体摩擦力产生的压降; I_5 表示由于导向管形状改变产生的形阻压降. 根据求得的压降, 可进一步求出控制棒在区间 $[Z_a, Z_b]$ 受到的压差阻力^[5]:

$$F_r = [P(Z_a) - P(Z_b)] S_{\text{rod}}, \quad (9)$$

其中, S_{rod} 表示控制棒的横截面积.

以上分析讨论的是导向管内存在控制棒时的压降和压差阻力计算. 当导向管内没有控制棒时, 式 (8) 压降的计算要减去控制棒摩擦力产生的压降部分, 即减去 $I_4(Z_a, Z_b)$, 则压降方程为

$$P(Z_a) - P(Z_b) = \dot{Q} I_1(Z_a, Z_b) + Q^2 I_2(Z_a, Z_b) + I_3(Z_a, Z_b) + I_5(Z_a, Z_b). \quad (10)$$

2 控制棒与流体耦合运动状态方程

当控制棒底部在导向管侧孔上部或者下部时, 流场分布是不同的, 压降方程的建立以及控制棒所受压差阻力的计算也是不同的, 因此需分别讨论.

2.1 控制棒底部在导向管侧孔之上

首先讨论控制棒底部在导向管侧孔上部的情况. 如 1.1 小节论述, 当控制棒底部在导向管侧孔之上时, 将导向管分成三个区间, 分别为 $[Z, Z_2]$, $[Z_1, Z]$, $[Z_0, Z_1]$. 在区间 $[Z, Z_2]$ 内, 由于流体在圆环内流动, 其两端压降计算采用式 (8), 可表示为

$$P_Z - P_{Z_2} = \dot{Q} I_1(Z, Z_2) + Q^2 I_2(Z, Z_2) + I_3(Z, Z_2) + I_4(Z, Z_2) + I_5(Z, Z_2) + \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{S_1^2}. \quad (11)$$

式 (11) 中的最后一项表示由于局部损失产生的压降. 为方便表示, 记 $I_{11} = I_1(Z, Z_2)$, I_{11} 的第一个下标表示压降类型, 此处为惯性压降系数; 第二个下标表示导向管的区间, 此处为区间 $[Z, Z_2]$. 其他压降类型和其他导向管区间也类似表示, 所以上式变为

$$P_Z - P_{Z_2} = \dot{Q}_2 I_{11} + Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} + \frac{\rho}{2} \frac{Q_2^2}{S_1^2}. \quad (12)$$

在 $[Z_1, Z]$ 和 $[Z_0, Z_1]$ 两段, 流体在圆管内流动, 因此可利用式 (10) 计算两端压强, 分别表示为

$$P_1 - P_Z = \dot{Q}_1 I_{12} + Q_1^2 I_{22} + I_{32} + I_{52}, \quad (13)$$

$$P_{Z_0} - P_1 = \dot{Q}_0 I_{13} + Q_0^2 I_{23} + I_{33} + I_{53} + \frac{\rho \text{sgn}(Q_0) K Q_0^2}{2}. \quad (14)$$

式 (14) 中最后一项表示流体从导向管底部流水孔流进导向管时产生的局部突变压降, 其中 $K = \frac{0.5}{S_k^2}$, 表示局部压降损失系数, S_k 表示导向管底部流水孔的面积. 在导向管侧孔内外存在局部突变的压降^[4] 可表示为

$$P_1 - P_{Z_1} = \text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2, \quad C_3 = \frac{\zeta_{C_3}}{(n_{C_3} S_{C_3})^2}, \quad (15)$$

其中, C_3 为局部压降损失系数^[7]; ζ_{C_3} 是开孔的局部水头损失系数, 一般取 1; n_{C_3} 为导向管侧孔的数目; S_{C_3} 为侧孔的面积. 根据式 (12)、(13)、(15) 可得

$$P_{Z_1} - P_{Z_2} = -\text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2 + \dot{Q}_1 I_{12} + Q_1^2 I_{22} + I_{32} + I_{52} + \dot{Q}_2 I_{11} + Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} + \frac{\rho}{2} \frac{Q_2^2}{S_1^2}. \quad (16)$$

根据式 (14)、(15) 可得

$$P_{Z_0} - P_{Z_1} = \dot{Q}_0 I_{13} + Q_0^2 I_{23} + I_{33} + I_{53} + \frac{\rho \text{sgn}(Q_0) K Q_0^2}{2} + \text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2. \quad (17)$$

式 (16) 中的 $P_{Z_1} - P_{Z_2}$ 表示导向管侧孔外与导向管顶部外侧之间的压降; 式 (17) 中的 $P_{Z_0} - P_{Z_1}$ 为导向管底部外侧与导向管侧孔外之间的压降. 这两个压降的计算通常通过实验求得.

式 (16) 与式 (17) 可以组成一个非线性方程组, 其中的未知量有 Q_0, Q_1, Q_2 . 观察图 1(a) 中的四个流量及控制棒的运动速度 v , 根据不可压缩条件, 可以得出如下关系:

$$Q_{1,Z} = Q_2 + v \cdot S_2, \quad Q_1 = Q_0 - Q_{1,Z}. \quad (18)$$

式 (16)、(17) 与式 (1) 可以组成三个方程和三个未知量的非线性微分方程组. 此时可以使用将控制棒的运动和流体的流动解耦的方法求解. 首先, 假定控制棒运动状态不变, 计算流体流动的流量和压强, 从而得到流体阻力; 然后, 假定流体的流动状态不变, 根据流体阻力计算控制棒的速度和位移. 计算控制棒的运动状态时, 文献 [3] 采用了向前差分的方法, 文献 [4-5] 采用了 Taylor 展开的方法. 然而, 这些传统方法违背了控制棒下落运动的真实情况, 只能通过不断缩小迭代时间步长来提高精度, 从而导致计算效率较低.

本文将控制棒的运动和流体的流动同时分析, 即通过流-固耦合对控制棒下落进行求解. 此时引入关键恒等变换 $\dot{w} = v$, 将微分方程的个数升级为四个, 非线性微分方程组变为

$$\begin{cases} v = \dot{w}, \\ f_1 = M\dot{v} - \dot{Q}_2 I_{11} S_{\text{rod}}, \\ f_2 = \dot{Q}_2 I_{11} + (\dot{Q}_2 + \dot{v} \times S_{\text{rod}}) I_{12}, \\ f_3 = \dot{Q}_0 I_{13}, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\begin{cases} f_1 = F_g + F_b + f_{\text{rod}} + (Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51}) S_{\text{rod}}, \\ f_2 = P_{Z_1} - P_{Z_2} - \left[-\text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2 + Q_1^2 I_{22} + I_{32} + I_{52} + Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} + \frac{\rho}{2} \frac{Q_2^2}{S_1^2} \right], \\ f_3 = P_{Z_0} - P_{Z_1} - \left[Q_0^2 I_{23} + I_{33} + I_{53} + \frac{\rho \text{sgn}(Q_0) K Q_0^2}{2} + \text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2 \right]. \end{cases} \quad (20)$$

将式 (19) 写成状态方程的形式:

$$f(\mathbf{U}) = \mathbf{H}(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}, \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_0 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & -I_{11}S_{\text{rod}} & 0 \\ I_{11}S_{\text{rod}}^2 & 0 & I_{11} + I_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{13} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

式(21)即为描述控制棒运动与导向管内流体流动的流-固耦合状态方程,其中 \mathbf{U} 为状态向量,是待求解的未知量.当给定初始时刻的状态向量,即可直接对上述非线性微分状态方程进行时程积分,得到各个时间节点的状态向量,同时得到控制棒的位移、速度、流体的流量等所有未知量.对于该方程有许多成熟算法,其中保辛算法^[8-11]具有精度高和稳定性好的优点,在解决动力学^[12]问题上有着独特的优势,并在动力学的最优控制问题^[13-14]、水波问题^[15-16]等领域得到广泛运用.本论文选择辛 Euler 中点格式,此部分将在后续介绍.

2.2 控制棒底部在导向管侧孔之下

同理,如 1.1 小节中所述,当控制棒底部在导向管侧孔下方时,将导向管分成三个区间,分别为 $[Z_1, Z_2]$, $[Z, Z_1]$, $[Z_0, Z]$.

类似于上一小节的方法,可以得到如下非线性微分方程组:

$$\begin{cases} v = \dot{w}, \\ f_1 = M\dot{v} - \dot{Q}_2 I_{11} S_{\text{rod}} - (\dot{Q}_0 - \dot{v} \times S_{\text{rod}}) I_{12} S_{\text{rod}}, \\ f_2 = \dot{Q}_2 I_{11}, \\ f_3 = (\dot{Q}_0 - \dot{v} \times S_{\text{rod}}) I_{12} + \dot{Q}_0 I_{13}, \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\begin{cases} f_1 = F_g + F_b + f_{\text{rod}} + (Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} + Q_{1Z}^2 I_{22} + I_{32} + I_{42} + I_{52}) S_{\text{rod}}, \\ f_2 = P_{Z_1} - P_{Z_2} - \left[Q_2^2 I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} + \frac{\rho}{2} \frac{Q_2^2}{S_1^2} - \text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2 \right], \\ f_3 = P_{Z_0} - P_{Z_1} - \left[Q_{1Z}^2 I_{22} + I_{32} + I_{42} + I_{52} + Q_0^2 I_{23} + I_{33} + I_{53} + \frac{\rho \text{sgn}(Q_0) K Q_0^2}{2} + \text{sgn}(Q_1) \frac{\rho}{2} C_3 Q_1^2 \right]. \end{cases} \quad (25)$$

本小节与上一小节的不同主要体现在计算导向管内压降和控制棒所受压差阻力上.本小节中控制棒所在区间为 $[Z_1, Z_2]$, $[Z, Z_1]$, 在计算区间 $[Z, Z_1]$ 内导向管的压降时,需考虑控制棒所受摩擦阻力产生的压降;同时,本小节中控制棒受到的压差阻力需将这两个区间上控制棒受到的压差阻力相加.

同理,将式(24)写成与式(21)完全相同的状态方程,其中 f_1 , f_2 和 f_3 的表达式见式(25),而 $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ 的表达式如下:

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ M + I_{12} S_{\text{rod}}^2 & 0 & -I_{11} S_{\text{rod}} & -I_{12} S_{\text{rod}} \\ 0 & 0 & I_{11} & 0 \\ -I_{12} S_{\text{rod}} & 0 & 0 & I_{12} + I_{13} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

至此,我们给出了描述控制棒下落与流体流动统一的耦合状态方程,无论控制棒在导向管侧孔上方还是下方,耦合方程的形式是相同的,即为 $f(\mathbf{U}) = \mathbf{H}(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}$,不同之处在于 $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ 和 $f(\mathbf{U})$ 的表达形式.如果考虑控制棒上部分驱动杆结构和流场分析,也可表示为如式(21)所示的统一的状态方程求解.

3 时间步长自适应保辛算法

求解式(21)所示状态方程,本文选择辛 Euler 中点格式,在此详细介绍.假设状态方程(21)中 t_0 时刻 \mathbf{U}_0 已

知, 要计算 U_1 , 将状态方程变形为

$$\dot{U} = A(U)f(U), \quad A(U) = H^{-1}(U), \quad (27)$$

则根据辛 Euler 中点格式^[9] 有

$$U_1 = U_0 + \Delta t[A(\bar{U})f(\bar{U})], \quad (28)$$

其中

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(U_0 + U_1). \quad (29)$$

式 (28) 是一组非线性微分方程, 可以迭代求解, 首先假设 $U_1^{(0)} = U_0$, 然后按 $n = 0, 1, 2, \dots$ 开始循环:

$$\begin{cases} \bar{U}^{(n)} = \frac{1}{2}(U_0 + U_1^{(n)}), \\ U_1^{(n+1)} = U_0 + \Delta t(A(\bar{U}^{(n)})f(\bar{U}^{(n)})), \end{cases} \quad (30)$$

直到 $U_1^{(n)}$ 与 $U_1^{(n+1)}$ 之间的相对误差小于允许值, 则停止计算, 此时 $U_1 = U_1^{(n+1)}$. 再以 U_1 为初值, 计算 U_2, U_3, \dots . 计算到临界边界条件的值时, 结束计算.

在整个落棒过程中, 导向管内的流场是非定常的, 甚至出现突变, 因此状态向量的时程曲线并非光滑变化, 将导致数值计算的不稳定. 具体体现为迭代格式 (30) 在实际计算时不收敛. 一般需要将时间步长取得足够小才能保证数值计算收敛. 然而在大部分时程积分区间, 状态向量的时程曲线是光滑的, 时间步长并不需要取很小就可以保证收敛. 综合以上两方面考虑, 在保证整个时程分析收敛的同时, 尽可能地提高计算效率, 本文引入时间步长自适应算法. 该方法将采用一个稳定的、较大的时间步长, 记为 Δt_0 (比如 0.01 s). 因为在大部分时间段内, 流场没有突变, 状态向量变化是光滑的, 因此取较大的时间步长 Δt_0 , 可以保证迭代的收敛. 当流场发生突变时, 仍然取 Δt_0 会出现迭代格式不收敛的情况, 据此可以根据迭代步数来判断流场是否发生突变. 在实际计算时, 以给定的允许迭代步数 N_i 为依据, 如果某次计算时, 迭代步数大于 N_i , 则判断该时间步长内, 流场发生了突变, 这时将时间步长减半为 $0.5\Delta t_0$, 重新迭代. 重新迭代后, 如果迭代步数仍然超过 N_i , 则将时间步长再次减半为 $(0.5)^2\Delta t_0$, 重新迭代; 如果迭代步数没有超过 N_i 就收敛, 则结束本次迭代, 进入下一个时间步计算. 当给定 $\Delta t = \Delta t_0$ 时, 在每个时间步的具体计算流程为:

- 1) 令 $U_1^{(0)} = U_0, n = 0$.
- 2) 判断 $n < N_i$ 是否成立, 如果是, 计算式 (30), 得到 $U_1^{(n+1)}$, 进入步骤 3); 如果不是, $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta t$, 进入步骤 1).
- 3) 判断 $\frac{\|U_1^{(n+1)} - U_1^{(n)}\|}{\|U_1^{(n)}\|}$ 是否小于给定的允许误差 ε_{tol} , 如果是, 进入步骤 4); 否则, $n = n + 1$, 返回步骤 2).
- 4) $U_1 = U_1^{(n+1)}$, 进入下一个时间步进行计算.

4 算 例

以本文建立的落棒分析模型分析某小型反应堆的控制棒下落过程, 并将计算结果与在核工业长期使用的某商业软件计算结果进行对比. 整个控制棒下落组件分为上下两个部分, 这两部分由星型架连接. 其中下部分主要是 24 根控制棒插入到 24 根导向管中, 上部分是驱动杆和驱动机构, 驱动机构包括: 热套管、调节器、钩爪、行程套筒等. 小堆的主要输入参数如表 1 所示.

图 2 所示为采用本文模型和商业软件计算得到的控制棒在下落过程中的位移、速度和加速度的时程曲线对比图, 其中实线为本文方法的计算结果, 虚线为商业软件的计算结果. 本文模型采用自适应时间步长计算, 时间步长为 $\Delta t_0 = 0.01$ s; 商业软件的时间步长为 0.001 s. 从图 2 可以看出, 本文模型采用时间步长 0.01 s 计算得到的位移、速度和加速度时程曲线与商业软件采用时间步长为 0.001 s 计算得到的位移、速度和加速度时程曲线高度吻合. 计算结果不仅验证了本文建立的状态方程的正确性, 且说明了本文方法的高效性.

以小堆为例, 本文模型的初始时间步长 Δt_0 分别取为 0.001 s, 0.005 s, 0.01 s, 0.015 s, 商业软件的初始时间步长取为 0.001 s. 将本文模型得到两个关键参数 T_5 和 $T_5 + T_6$ (T_5 为进入缓冲段时间, $T_5 + T_6$ 为控制棒整体落棒时间) 与商业软件得到 T_5 和 $T_5 + T_6$ 进行比较, 结果如表 2 所示.

表1 小堆的主要输入参数
Table 1 Main input parameters for a small reactor

parameter	value	unit
reactor in-core temperature	312.22	°C
reactor in-core pressure	15.5	MPa
control rod length	2.5756	m
control rod diameter	0.009675	m
control rod mass	11.407	kg
control rod absolute roughness	3.0×10^{-8}	m
guide tube average diameter	0.01124	m
guide tube absolute roughness	4.0×10^{-7}	m
control rod initial insertion depth	0.2874	m
spring preload	1876.4	N
spring stiffness	123200	N/m

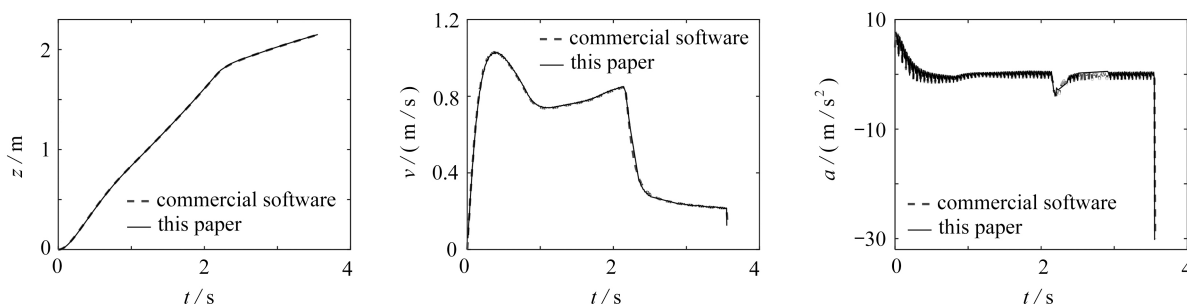


图2 小型反应堆下本文模型与商业软件关于位移、速度、加速度随时间的变化对比

Fig. 2 The comparison of time-varying displacements, velocities and accelerations, between the proposed model and the commercial software for the case of a small reactor

表2 本文模型在不同时间步长下与商业软件关于 T_5 和 $T_5 + T_6$ 的比较

Table 2 The comparison of T_5 and $T_5 + T_6$ between the commercial software and the proposed model for different initial time steps

	commercial software	initial time steps of this paper $\Delta t_0/s$			
		0.001	0.005	0.01	0.015
T_5/s	2.140	2.140 (0%)	2.1506 (0.50%)	2.1469 (0.32%)	2.1488 (0.41%)
$(T_5 + T_6)/s$	3.560	3.5575 (0.07%)	3.5675 (0.21%)	3.5706 (0.30%)	3.5559 (0.12%)

表2中, 括号内的百分数表示本文模型的计算结果与商业软件的计算结果的相对误差. 从表中可以看到, 本文使用的4个时间步长所得结果与商业软件对比, 相对误差均小于1%. 本文使用的最大时间步长 $\Delta t_0 = 0.015$ s, 是商业软件时间步长的15倍. 而当商业软件的时间步长取为0.002 s时, 计算结果发散.

5 总 结

针对反应堆内控制棒下落问题, 本文建立了导向管内控制棒下落和流体流动的理论模型, 重点分析了控制棒受到的摩擦阻力、压降阻力等作用力. 在此基础上, 建立了描述控制棒下落与流体流动的耦合非线性方程组, 再通过引入关键恒等变换 $v = \dot{w}$, 得到了流固耦合的非线性状态方程, 进一步通过高精度的辛 Euler 中点格式对得到的状态方程进行了时程分析. 考虑到在不同时程分析段内导向管中流动状态的突变, 本文将时间步长自适应算法引入到时程分析中. 最后以某小型反应堆控制棒下落为例进行模型和算法的验证. 算例中本文模型选取的最大时间步长 Δt_0 是商业软件时间步长的15倍, 关于落棒时间 T_5 和 $T_5 + T_6$ 的相对误差小于1%, 从而证明了本文模型和算法的正确性和高效性. 本文建立的流固耦合非线性状态方程和时间步长自适应算法不仅为控制棒下落分析提供更符合实际的计算思路, 还为更加复杂的圆管内流动模型或者圆环内流动模型提供了高精度、高效率的解决方案.

致谢 本文作者衷心感谢大连市“青年科技之星”项目(2018RQ06)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] YOON K H, KIM J Y, LEE K H, et al. Control rod drop analysis by finite element method using fluid-structure interaction for a pressurized water reactor power plant[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2009, **239**(10): 1857-1861.
- [2] 肖聪, 罗英, 杜华, 等. 基于动网格技术的单根控制棒落棒行为仿真分析[J]. *核动力工程*, 2017, **38**(2): 103-107. (XIAO Cong, LUO Ying, DU Hua, et al. Simulation and analysis of single control rod dropping behavior based on dynamic grid technique[J]. *Nuclear Power Engineering*, 2017, **38**(2): 103-107.(in Chinese))
- [3] RAJAN BABU V, THANIGAIYARASU G, CHELLAPANDI P. Mathematical modelling of performance of safety rod and its drive mechanism in sodium cooled fast reactor during scram action[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, **278**: 601-617.
- [4] 刘新, 陈先龙, 张修, 等. 控制棒下落时间计算模型[J]. *核技术*, 2014, **37**(11): 68-74. (LIU Xin, CHEN Xianlong, ZHANG Xiu, et al. Calculation model of controlling rod drop time[J]. *Nuclear Technology*, 2014, **37**(11): 68-74.(in Chinese))
- [5] 刘言午, 黄炳臣, 冉小兵, 等. 反应堆控制棒落棒时间计算方法分析[J]. *核动力工程*, 2014, **35**(6): 106-110. (LIU Yanwu, HUANG Bingchen, RAN Xiaobing, et al. Analysis of calculation method of reactor control rod drop time[J]. *Nuclear Power Engineering*, 2014, **35**(6): 106-110.(in Chinese))
- [6] 王栋. 算子分裂法及其在解抛物型方程中的应用[D]. 硕士学位论文. 长春: 吉林大学, 2009. (WANG Dong. Operator-splitting method and its application for solving parabolic equations[D]. Master Thesis. Changchun: Jilin University, 2009. (in Chinese))
- [7] 孔珑. 工程流体力学[M]. 北京: 中国电力出版社, 2001. (KONG Long. *Engineering Fluid Mechanics*[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2001. (in Chinese))
- [8] WU F, GAO Q, ZHONG W X. Fast precise integration method for hyperbolic heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2013, **34**(7): 791-800.
- [9] 邢誉峰, 杨蓉. 动力学平衡方程的Euler中点辛差分求解格式[J]. *力学学报*, 2007, **39**(1): 100-105. (XING Yufeng, YANG Rong. Application of Euler midpoint symplectic integration method for the solution of dynamic equilibrium equations[J]. *Acta mechanica Sinica*, 2007, **39**(1): 100-105.(in Chinese))
- [10] 吴锋, 姚征, 孙雁, 等. 位移浅水内孤立波[J]. *计算力学学报*, 2016, **36**(3): 297-303. (WU Feng, YAO Zheng, SUN Yan, et al. Displacement shallow water internal solitary wave[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **36**(3): 297-303. (in Chinese))
- [11] 钟万勰. 离散动力学数值积分应该保辛近似[J]. *北京工业大学学报*, 2016, **42**(12): 12-14. (ZHONG Wanxie. Symplectic conservative approximation for discrete dynamics integration[J]. *Journal of Beijing University of Technology*, 2016, **42**(12): 12-14. (in Chinese))
- [12] 钟万勰. 离散动力学只能说保辛[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 775-777. (ZHONG Wanxie. Only symplectic conservation is characteristic of discrete dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 775-777.(in Chinese))
- [13] 高强, 彭海军, 吴志刚, 等. 非线性动力学系统最优控制问题的保辛求解方法[J]. *动力学与控制学报*, 2010, **8**(1): 1-7. (GAO Qiang, PENG Haijun, WU Zhigang, et al. Symplectic method for solving optimal control problem of nonlinear dynamical systems[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, **8**(1): 1-7. (in Chinese))
- [14] 王昕炜, 彭海军, 钟万勰. 具有潜伏期时滞的时变SEIR模型的最优疫苗接种策略[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(7): 701-712. (WANG Xinwei, PENG Haijun, ZHONG Wanxie. Optimal vaccination strategies of time-varying SEIR epidemic model with latent delay[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(7): 701-712.(in Chinese))
- [15] 钟万勰, 吴锋, 孙雁, 等. 保辛水波动力学[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(8): 855-874. (ZHONG Wanxie, WU Feng, SUN Yan, et al. Symplectic water wave dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(8): 855-874.(in Chinese))
- [16] 吴锋, 钟万勰. 浅水问题的约束Hamilton变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(1): 1-13. (WU Feng, ZHONG Wanxie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 1-13.(in Chinese))