应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

求解非单调变分不等式的一种二次投影算法

王霄婷，龙宪军，彭再云

A Double Projection Algorithm for Solving Non-Monotone Variational Inequalities

WANG Xiaoting, LONG Xianjun, and PENG Zaiyun

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420414

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非单调变分不等式黄金分割算法研究
A Golden Ratio Algorithm for Solving Nonmonotone Variational Inequalities
应用数学和力学. 2021, 42(7): 764-770 https://doi.org/10.21656/1000-0887.410359

混合向量变分不等式标量化及间隙函数误差界
Scalarization of Mixed Vector Variational Inequalities and Error Bounds of Gap Functions
应用数学和力学. 2017, 38(6): 715-726 https://doi.org/10.21656/1000-0887.370292

Hilbert空间中求解分裂可行问题CQ算法的强收敛性
Strong Convergence of CQ Algorithms for Split Feasibility Problems in the Hilbert Spaces
应用数学和力学. 2019, 40(1): 108-114 https://doi.org/10.21656/1000-0887.390012

Riemann流形上ρ-(η,d)-B不变凸的向量变分不等式及向量优化问题
Vector Variational-Like Inequalities and Vector Optimization Problems Involving ρ-(η,d)-B Invexity on Riemannian Manifolds
应用数学和力学. 2020, 41(4): 458-466 https://doi.org/10.21656/1000-0887.400227

基于CUDA-GPU架构的超二次曲面离散单元并行算法
A Parallel Algorithm for Super-Quadric Discrete Elements Based on the CUDA-GPU Architecture
应用数学和力学. 2019, 40(7): 751-767 https://doi.org/10.21656/1000-0887.390267

单调迭代结合虚拟区域法求解非线性障碍问题
Monotone Iterations Combined With Fictitious Domain Methods for Numerical Solution of Nonlinear Obstacle Problems
应用数学和力学. 2018, 39(4): 485-492 https://doi.org/10.21656/1000-0887.380109

关注微信公众号，获得更多资讯信息

ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887　http://www.applmathmech.cn

求解非单调变分不等式的一种二次投影算法*

王霄婷[1]，　龙宪军[1]，　彭再云[2]

（1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；
2. 重庆交通大学 数学与统计学院，重庆 400074）

摘要： 投影算法是求解变分不等式问题的主要方法之一. 目前, 有关投影算法的研究通常需要假设映射是单调且 Lipschitz 连续的, 然而在实际问题中, 往往不满足这些假设条件. 该文利用线搜索方法, 提出了一种新的求解非单调变分不等式问题的二次投影算法. 在一致连续假设下, 证明了算法产生的迭代序列强收敛到变分不等式问题的解. 数值实验结果表明了该文所提算法的有效性和优越性.

关　键　词： 变分不等式；　二次投影算法；　一致连续；　非单调；　强收敛

中图分类号： O224　　　**文献标志码：** A　　　DOI：10.21656/1000-0887.420414

A Double Projection Algorithm for Solving Non-Monotone Variational Inequalities

WANG Xiaoting[1]，　LONG Xianjun[1]，　PENG Zaiyun[2]

（1. *School of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *P.R.China*；
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*）

Abstract: The projection algorithm is one of the main methods to solve variational inequality problems. At present, the research on projection algorithms usually requires the assumptions that the mapping is monotone and Lipschitz continuous, but in practical problems, these assumptions are often unsatisfied. A new double projection algorithm for solving non-monotone variational inequality problems was proposed with the line search method. Under the assumption that the mapping is uniformly continuous, the sequence generated by the algorithm was proved to strongly converge to the solution of the variational inequality. The numerical experiments illustrate the effectiveness and superiority of the proposed algorithm.

Key words: variational inequality; double projection algorithm; uniformly continuous; non-monotone; strong convergence

引　　言

设H是具有内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$和范数$\|\cdot\|$的实Hilbert空间, $C \subseteq H$是一个非空闭凸子集, $F: H \to H$是一个非线性算

* **收稿日期：** 2021-12-31; **修订日期：** 2022-03-23

基金项目： 国家自然科学基金 (11471059); 重庆市自然科学基金 (cstc2021jcyj-msxmX0721); 重庆市教育委员会科学技术研究重点项目 (KJZD-K201900801)

作者简介： 王霄婷 (1999—), 女, 硕士生 (E-mail: xiaotingwn@163.com);
彭再云 (1980—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: pengzaiyun@126.com).

引用格式： 王霄婷, 龙宪军, 彭再云. 求解非单调变分不等式的一种二次投影算法[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(8): 927-934.

子. 本文考虑的变分不等式问题是: 寻找$x^* \in C$, 满足

$$\langle F(x^*), x - x^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in C. \tag{1}$$

记问题 (1) 的解集为$\mathrm{Sol}(C, F)$.

变分不等式作为非线性分析中的重要分支, 在交通、运输、博弈论、机器学习和网络规划等领域都有着广泛的应用[1-10]. 投影算法是求解变分不等式问题的一种主要方法, 最早的投影算法由 Goldstein[11] 提出, 在 F 是强单调且Lipschitz连续的条件下, Goldstein 证明了算法的收敛性. 由于 F 的强单调性, 算法的使用受到了限制. 1976 年, Korpelevich[12] 提出了外梯度算法, 在单调和Lipschitz连续的假设下证明了算法的收敛性. 1999 年, Solodov 和 Svaiter[13] 在有限维空间中提出了一种新的二次投影算法, 在非单调和连续的假设下证明了算法的收敛性. 在Hilbert空间中, Vuong 和 Shehu[14] 提出了 Halpern 型二次投影算法, 在伪单调和一致连续的假设下证明了算法的收敛性. 最近, Reich 等[15] 通过构造一类新的严格分离当前迭代和变分不等式解集的超平面, 对文献 [14] 中的算法进行改进, 提出了两种新的算法, 并在伪单调和一致连续的假设下证明了其算法的收敛性.

本文受文献 [13-15] 的启发, 提出了一种新的二次投影算法. 在没有单调性的假设下, 证明了算法强收敛到变分不等式问题的解.

1 预 备 知 识

设H是实Hilbert空间, $C \subseteq H$是非空闭凸子集. 记$x_n \to x$为$\{x_n\}$强收敛于x, $x_n \rightharpoonup x$为$\{x_n\}$弱收敛于x. 对任意的$u, v \in H$, $\alpha \in (0,1)$, 有

$$\|u+v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\langle v, u+v\rangle,$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle,$$

$$\|\alpha u + (1-\alpha)v\|^2 = \alpha\|u\|^2 + (1-\alpha)\|v\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2.$$

任给$x \in H$, 则存在C中唯一的最近点$P_C(x)$满足

$$\|x - P_C(x)\| \leqslant \|x - y\|, \qquad \forall y \in C,$$

P_C叫做 H 到C上的投影, 易知P_C为 H 到C上的非扩张映射.

定义 1 设$F: H \to H$是一映射.

(ⅰ) 称 F 是伪单调的, 如果$\langle F(x), y-x\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle F(y), y-x\rangle \geqslant 0$, $\forall x, y \in H$.

(ⅱ) 称 F 是Lipschitz连续的, 如果$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x-y\|$, $\forall x, y \in H$, 这里 L 为Lipschitz常数且$L > 0$.

引理 1[2] 设$C \subseteq H$是非空闭凸子集, 对任意的$x \in H$, 有

(ⅰ) $\langle x-y, P_C(x) - P_C(y)\rangle \geqslant \|P_C x - P_C y\|^2$, $\forall y \in H$.

(ⅱ) $\|P_C(x) - y\|^2 \leqslant \|x-y\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2$, $\forall y \in C$.

引理 2[2] 设$C \subseteq H$是非空闭凸子集. 给定$x \in H, z \in C$, 则$z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x-z, z-y\rangle \geqslant 0$, $\forall y \in C$.

引理 3[3] 设$C \subseteq H$是非空闭凸子集, $h(x)$是 H 上的实值函数, 定义集合$K := \{x \in C : h(x) \leqslant 0\}$. 如果 K 非空且$h(x)$在C上是Lipschitz连续的, 则

$$\mathrm{dist}(x, K) \geqslant \theta^{-1}\max\{h(x), 0\}, \qquad \forall x \in C,$$

其中$\mathrm{dist}(x, K)$表示x到 K 的距离, θ为Lipschitz常数, 且$\theta > 0$.

引理 4[4] 设$\{a_n\}$是非负实数序列, 满足以下关系:

$$a_{n+1} \leqslant (1-\eta_n)a_n + \eta_n s_n.$$

若$\{\eta_n\}$, $\{s_n\}$满足: (ⅰ) $\{\eta_n\} \subset (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n = \infty$; (ⅱ) $\limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant 0$, 则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 5[2] $x^* \in \mathrm{Vol}(C, F)$, 当且仅当$x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*))$.

本文假设

(C1) 映射$F: H \to H$在C中的有界集上是一致连续的.

(C2) 变分不等式解集$\mathrm{Sol}(C, F)$非空.

(C3) 对于$x^* \in \mathrm{Sol}(C, F)$都有

$$\langle F(x), x-x^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x\in C. \tag{2}$$

(C4) $f: C\to C$是一个压缩映射且压缩系数为$\rho\in[0,1)$.

(C5) 序列$\{\alpha_n\}\subseteq(0,1)$, 且满足$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$.

2 算法与收敛性证明

本文提出如下算法:

算法 1 选取$\sigma\in(0,1)$, $\gamma\in(0,1)$, $\lambda\in\left(\frac{1}{2\sigma},\frac{1}{\sigma}\right)$, 选取初始点$x_1\in C$.

步骤 1 计算

$$z_n=P_C(x_n-\lambda F(x_n)). \tag{3}$$

如果$r(x_n):=x_n-z_n=0$, 则算法停止, x_n是变分不等式的解. 否则, 转到步骤 2.

步骤 2 计算

$$y_n=x_n-\tau_n r(x_n),$$

其中$\tau_n:=\gamma^{m_n}$, m_n是满足下式的最小非负整数m:

$$\langle F(x_n-\gamma^m r(x_n)), r(x_n)\rangle \geqslant \frac{\sigma}{2}\|r(x_n)\|^2. \tag{4}$$

步骤 3 计算

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)P_{C_n}(x_n),$$

其中

$$C_n:=\{x\in C: h_n(x)\leqslant 0\},$$

$$h_n(x):=\langle F(y_n), x-x_n\rangle+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2. \tag{5}$$

令$n=n+1$, 并回到步骤 1.

注 1 (ⅰ) 显然由算法 1 产生的序列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$都属于C.

(ⅱ) 假设(C1)~(C4)成立, 由引理 5 可知, 若$r(x_n)=0$, 则x_n是变分不等式的解, 算法停止. 否则根据映射 F 在C上的一致连续性以及引理 1, 可得

$$\|r(x_n)\|^2=\|x_n-z_n\|^2=\|x_n-P_C(x_n-\lambda F(x_n))\|^2\leqslant\lambda\langle F(x_n), x_n-z_n\rangle,$$

即$\langle F(x_n), r(x_n)\rangle\geqslant\lambda^{-1}\|r(x_n)\|^2$. 又因为$\lambda\in\left(\frac{1}{2\sigma},\frac{1}{\sigma}\right)$, 从而

$$\langle F(x_n), r(x_n)\rangle\geqslant\sigma\|r(x_n)\|^2\geqslant\frac{\sigma}{2}\|r(x_n)\|^2.$$

另一方面, $\lim_{m\to\infty}\langle F(x_n-\gamma^m r(x_n)), r(x_n)\rangle=\langle F(x_n), r(x_n)\rangle\geqslant\frac{\sigma}{2}\|r(x_n)\|^2$. 所以线搜索规则 (4) 合理.

(ⅲ) 如果 F 是伪单调的, 则式 (2) 成立, 反之则不成立, 具体例子可参见文献 [16] 中的例 3.1. 由此说明假设(C3)比伪单调性更弱.

引理 6 假设(C1) ~ (C4)成立, 且函数$h_n(x)$由式 (5) 定义. (ⅰ) 如果$r(x_n)\neq 0$, 则$h_n(x_n)>0$; (ⅱ) 如果$x^*\in\mathrm{Sol}(C,F)$, 则$h_n(x^*)\leqslant 0$.

证明 由$h_n(x)$定义知$h_n(x_n)=\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2$. 若$r(x_n)\neq 0$, 有$h_n(x_n)>0$. 另一方面,

$$h_n(x^*)=\langle F(y_n), x^*-x_n\rangle+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2=-\langle F(y_n), x_n-y_n\rangle-\langle F(y_n), y_n-x^*\rangle+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2.$$

结合式 (2) 和 (4) 可得

$$h_n(x^*)\leqslant-\langle F(y_n), x_n-y_n\rangle+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2=$$

$$-\tau_n\langle F(y_n), r(x_n)\rangle+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2\leqslant-\tau_n\frac{\sigma}{2}\|r(x_n)\|^2+\frac{\tau_n}{4\lambda}\|r(x_n)\|^2=\frac{\tau_n}{2}\left(\frac{1}{2\lambda}-\sigma\right)\|r(x_n)\|^2\leqslant 0.$$

从而引理 6 得证.

引理 7 假设(C1) ~ (C5)成立，则由算法 1 产生的序列$\{x_n\}$有界.

证明 设$p\in \mathrm{Sol}(C,F)$，由引理 1(ⅱ) 可得$\|P_{C_n}(x_n)-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|^2$. 故$\|P_{C_n}(x_n)-p\|\leqslant\|x_n-p\|$. 结合$\{x_{n+1}\}$的定义知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|&=\|\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)P_{C_n}(x_n)-p\|\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-p\|+(1-\alpha_n)\|P_{C_n}(x_n)-p\|\leqslant\\&\alpha_n\|f(x_n)-f(p)\|+\alpha_n\|f(p)-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|\leqslant\\&\alpha_n\rho\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|=[1-\alpha_n(1-\rho)]\|x_n-p\|+\alpha_n(1-\rho)\frac{\|f(p)-p\|}{1-\rho}\leqslant\\&\max\left\{\|x_n-p\|,\frac{\|f(p)-p\|}{1-\rho}\right\}\leqslant\cdots\leqslant\max\left\{\|x_1-p\|,\frac{\|f(p)-p\|}{1-\rho}\right\}.\end{aligned}$$

这表明$\{x_n\}$有界. □

引理 8 假设(C1) ~ (C4)成立，$\{x_n\}$为算法 1 产生的序列. 如果$\lim_{n\to\infty}\tau_n\|x_n-z_n\|^2=0$，则$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$.

证明 我们考虑以下两种情形.

情形 1 若$\liminf_{n\to\infty}\tau_n>0$，则$0\leqslant\|r(x_n)\|^2=\dfrac{\tau_n\|r(x_n)\|^2}{\tau_n}$. 从而

$$\limsup_{n\to\infty}\|r(x_n)\|^2\leqslant\limsup_{n\to\infty}(\tau_n\|r(x_n)\|^2)\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\tau_n}=\limsup_{n\to\infty}(\tau_n\|r(x_n)\|^2)\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty}\tau_n}=0.$$

因此$\limsup_{n\to\infty}\|r(x_n)\|=0$，即$\lim_{n\to\infty}\|r(x_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$.

情形 2 若$\liminf_{n\to\infty}\tau_n=0$. 不妨设$\lim_{k\to\infty}\tau_{n_k}=0$，$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-z_{n_k}\|=a>0$. 令

$$u_{n_k}=\frac{1}{\gamma}\tau_{n_k}z_{n_k}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\tau_{n_k}\right)x_{n_k},$$

则

$$u_{n_k}-x_{n_k}=\frac{1}{\gamma}\tau_{n_k}(z_{n_k}-x_{n_k}).$$

因为$\{x_{n_k}\}$有界，所以$\{z_{n_k}\}$有界，则$\{z_{n_k}-x_{n_k}\}$有界且$\lim_{n\to\infty}\tau_{n_k}=0$. 由此可得$\lim_{n\to\infty}(u_{n_k}-x_{n_k})=0$. 根据线搜索规则 (4) 和$\{u_{n_k}\}$的定义可得

$$\langle F(u_{n_k}),x_{n_k}-z_{n_k}\rangle<\frac{\sigma}{2}\|x_{n_k}-z_{n_k}\|^2.$$

上式等价于

$$2\lambda\langle F(x_{n_k}),x_{n_k}-z_{n_k}\rangle+2\lambda\langle F(u_{n_k})-F(x_{n_k}),x_{n_k}-z_{n_k}\rangle<\sigma\lambda\|x_{n_k}-z_{n_k}\|^2.$$

令$\delta_{n_k}:=x_{n_k}-\lambda F(x_{n_k})$，则

$$2\langle x_{n_k}-\delta_{n_k},x_{n_k}-z_{n_k}\rangle+2\lambda\langle F(u_{n_k})-F(x_{n_k}),x_{n_k}-z_{n_k}\rangle<\sigma\lambda\|x_{n_k}-z_{n_k}\|^2. \tag{6}$$

又因为

$$2\langle x_{n_k}-\delta_{n_k},x_{n_k}-z_{n_k}\rangle=\|x_{n_k}-z_{n_k}\|^2+\|x_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2-\|z_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2, \tag{7}$$

联立式 (6) 和 (7) 有

$$\|x_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2-\|z_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2<(\sigma\lambda-1)\|x_{n_k}-z_{n_k}\|^2-2\lambda\langle F(u_{n_k})-F(x_{n_k}),\ x_{n_k}-z_{n_k}\rangle. \tag{8}$$

又由 F 的一致连续性可得$\lim_{k\to\infty}\|F(u_{n_k})-F(x_{n_k})\|=0$. 所以当$k\to\infty$时不等式 (8) 右边会趋近于$(\sigma\lambda-1)a^2<0$，从而有

$$\limsup_{n\to\infty}(\|x_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2-\|z_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2)\leqslant(\sigma\lambda-1)a^2<0.$$

对于$\epsilon=-(\sigma\lambda-1)a^2/2>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N$时有

$$\|x_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2-\|z_{n_k}-\delta_{n_k}\|^2\leqslant(\sigma\lambda-1)a^2+\epsilon=(\sigma\lambda-1)a^2/2<0.$$

故$\|x_{n_k}-\delta_{n_k}\|<\|z_{n_k}-\delta_{n_k}\|$，这与$\{z_n\}$的定义矛盾. 因此$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$. 证毕. □

定理 1 假设(C1) ~ (C5)成立，则由算法 1 产生的序列$\{x_n\}$强收敛于$p\in\mathrm{Sol}(C,F)$，这里$p:=P_{\mathrm{Sol}(C,F)}\circ f(p)$.

证明 先证$\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p,x_{n+1}-p\rangle$. 事实上

$$\|x_{n+1}-p\|^2=\|\alpha_n(f(x_n)-p)+(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)\|^2\leqslant \\ \|(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p,x_{n+1}-p\rangle\leqslant\|P_{C_n}(x_n)-p\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p,x_{n+1}-p\rangle.$$

由引理 1(ⅱ) 得

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p,x_{n+1}-p\rangle.$$

由此可得

$$\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p,x_{n+1}-p\rangle. \tag{9}$$

下证$(1-\alpha_n)\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+\alpha_n\|f(x_n)-p\|^2$. 由引理 7 知$\{x_n\}$有界, 所以序列$\{f(x_n)\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$以及$\{F(y_n)\}$都有界. 因此存在常数$M>0$, 使得对任意的$n\geqslant1$, 都有$\|F(y_n)\|\leqslant M$. 故

$$|h_n(x)-h_n(y)|=|\langle F(y_n),x-x_n\rangle-\langle F(y_n),y-x_n\rangle|=|\langle F(y_n),x-y\rangle|\leqslant\|F(y_n)\|\,\|x-y\|\leqslant M\|x-y\|.$$

这表明$h_n(x)$是Lipschitz连续的, 且Lipschitz常数为 M. 由引理 1、3 和 6 可得

$$\|P_{C_n}(x_n)-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|^2=\|x_n-p\|^2-\mathrm{dist}^2(x_n,C_n)\leqslant \\ \|x_n-p\|^2-\left[\frac{1}{M}h_n(x_n)\right]^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2.$$

结合$\{x_{n+1}\}$的定义知

$$\|x_{n+1}-p\|^2=\|\alpha_n(f(x_n)-p)+(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)\|^2\leqslant \\ \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+(1-\alpha_n)\|P_{C_n}(x_n)-p\|^2\leqslant \\ \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2-(1-\alpha_n)\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2\leqslant \\ \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+\|x_n-p\|^2-(1-\alpha_n)\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2.$$

所以

$$(1-\alpha_n)\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+\alpha_n\|f(x_n)-p\|^2. \tag{10}$$

下证$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant(1-(1-\rho)\alpha_n)\|x_n-p\|^2+(1-\rho)\alpha_n\frac{2}{1-\rho}\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle$. 事实上

$$\|x_{n+1}-p\|^2=\|\alpha_n(f(x_n)-p)+(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)\|^2= \\ \|\alpha_n(f(x_n)-f(p))+(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)+\alpha_n(f(p)-p)\|^2\leqslant \\ \|\alpha_n(f(x_n)-f(p))+(1-\alpha_n)(P_{C_n}(x_n)-p)\|^2+2\alpha_n\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle\leqslant \\ \alpha_n\|f(x_n)-f(p)\|^2+(1-\alpha_n)\|P_{C_n}(x_n)-p\|^2+2\alpha_n\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle\leqslant \\ \alpha_n\rho\|x_n-p\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle= \\ (1-(1-\rho)\alpha_n)\|x_n-p\|^2+(1-\rho)\alpha_n\frac{2}{1-\rho}\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle. \tag{11}$$

下面分两种情形进行讨论.

情形 3　若存在正整数N, 当$n\geqslant N$时有$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2$, 这表明$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|^2$存在. 由式 (10) 可得 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\tau_n}{4\lambda M}\|r(x_n)\|^2\right]^2=0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n\|r(x_n)\|^2=0.$$

由引理 8 知

$$\lim_{n\to\infty}\|r(x_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0.$$

又因为$\{x_n\}$有界, 所以对$\{x_n\}$的任一聚点z都存在子列$\{x_{n_k}\}$, 有$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=z$. 结合$P_C$和 F 的一致连续性可得

$$\lim_{n\to\infty}\|r(x_{n_k})\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-P_C(x_{n_k}-\lambda F(x_{n_k}))\|=\|z-P_C(z-\lambda F(z))\|=0,$$

故$r(z)=0$. 又由引理 5 得$z\in\mathrm{Sol}(C,F)$. 另一方面

$$\|x_{n+1}-P_{C_n}(x_n)\|=\alpha_n\|f(x_n)-P_{C_n}(x_n)\|\to0\qquad(n\to\infty).$$

通过式 (9) 可得$\lim_{n\to\infty}\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|=0$. 因此

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\|x_{n+1}-P_{C_n}(x_n)\|+\|P_{C_n}(x_n)-x_n\|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

结合引理 2 及$p:=P_{\mathrm{Sol}(C,F)}\circ f(p)$有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(p)-p,x_n-p\rangle=\langle f(p)-p,z-p\rangle\leqslant 0.$$

所以有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(p)-p,x_{n+1}-p\rangle=\limsup_{n\to\infty}\langle f(p)-p,x_{n+1}-x_n\rangle+\limsup_{n\to\infty}\langle f(p)-p,x_n-p\rangle\leqslant 0.$$

则依据式 (11) 和引理 4 有$x_n\to p(n\to\infty)$.

情形 4 假设不存在$n_0\in\mathbf{N}$使得$\{\|x_n-p\|\}_{n=n_0}^{\infty}$是单调递减序列. 令$\varGamma_n=\|x_n-p\|^2$且有映射$t:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$满足对所有的$n\geqslant n_0$ (n_0足够大) 都有

$$t(n):=\max\{k\in\mathbf{N}:k\leqslant n,\varGamma_k\leqslant\varGamma_{k+1}\}.$$

即$t(n)$是$1,2,\cdots,n$中使得$\varGamma_k$为递增序列的最大值k. 显然t是一个非递减序列, 且满足$\lim_{n\to\infty}t(n)=\infty$, 以及

$$0\leqslant\varGamma_{t(n)}\leqslant\varGamma_{t(n)+1},\qquad\forall n\geqslant n_0.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式以及式 (9) 可得

$$\begin{aligned}&\|P_{C_n}(x_{t(n)})-x_n\|^2\leqslant\|x_{t(n)}-p\|^2-\|x_{t(n)+1}-p\|^2+2\alpha_{t(n)}\langle f(x_{t(n)})-p,x_{t(n)+1}-p\rangle\leqslant\\&\quad 2\alpha_{t(n)}\|f(x_{t(n)})-p\|\,\|x_{t(n)+1}-p\|\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

由式 (10) 可得

$$\begin{aligned}&(1-\alpha_{t(n)})\left[\frac{\tau_{t(n)}}{4\lambda M}\|r(x_{t(n)})\|^2\right]^2\leqslant\\&\quad\|x_{t(n)}-p\|^2-\|x_{t(n)+1}-p\|^2+\alpha_n\|f(x_{t(n)})-p\|^2\leqslant\\&\quad\alpha_{t(n)}\|f(x_{t(n)})-p\|^2\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

类似于情形 3 的证明可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{t(n)}-z_{t(n)}\|=0,\ \lim_{n\to\infty}\|x_{t(n)+1}-x_{t(n)}\|=0$$

以及

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(p)-p,x_{t(n)+1}-p\rangle\leqslant 0.\tag{12}$$

由式 (11) 可得

$$\begin{aligned}&\|x_{t(n)+1}-p\|^2\leqslant(1-(1-\rho)\alpha_{t(n)})\|x_{t(n)}-p\|^2+2\alpha_{t(n)}\langle f(p)-p,x_{t(n)+1}-p\rangle\leqslant\\&\quad(1-(1-\rho)\alpha_{t(n)})\|x_{t(n)+1}-p\|^2+2\alpha_{t(n)}\langle f(p)-p,x_{t(n)+1}-p\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$(1-\rho)\|x_{t(n)+1}-p\|^2\leqslant 2\langle f(p)-p,x_{t(n)+1}-p\rangle.$$

结合式 (12) 有$\limsup_{n\to\infty}\|x_{t(n)+1}-p\|^2\leqslant 0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{t(n)+1}-p\|^2=0.\tag{13}$$

接下来, 我们证明当$n\geqslant n_0$时 (n_0足够大), 有$0\leqslant\varGamma_n\leqslant\varGamma_{t(n)+1}$. 不难发现, 当$n\geqslant n_0$时有$t(n)\leqslant n$. 考虑三种情况: 当$t(n)=n$和$t(n)=n-1$时, 显然有$\varGamma_n\leqslant\varGamma_{t(n)+1}$. 现考虑$t(n)<n-1$. 对任意的正整数$n\geqslant n_0$, 由$t(n)$的定义知, 有$\varGamma_j\geqslant\varGamma_{j+1}$, 当$t(n)+1\leqslant j\leqslant n-1$时, 得到$\varGamma_{t(n)+1}\geqslant\varGamma_{t(n)+2}\geqslant\cdots\geqslant\varGamma_{n-1}\geqslant\varGamma_n$, 因此当$n$足够大时, $0\leqslant\varGamma_n\leqslant\varGamma_{t(n)+1}$恒成立. 联立式 (13) 可知$\lim_{n\to\infty}\varGamma_n=0$, 即算法 1 迭代产生的序列$x_n$强收敛于$p$. □

3 数 值 实 验

在本节中给出了算法 1 在一个简单例子中的计算机检验结果, 并与文献 [14] 中算法 3.3 及文献 [15] 中算法 4 进行比较. 本文中所有代码都是在 MATLAB R2020a 和 Windows10 系统下运行的. 计算机基本参数为 Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60 GHz. 此外, 用“iter”表示算法迭代次数, “CPU time”表示程序运

算的时间, 单位为 s. 参数选取如下:

算法 1: $f(x)=\frac{5}{6}x, \sigma=0.5, \lambda=\frac{1.1}{2\sigma}, \ \gamma=0.5, \alpha_n=\frac{1}{n+2}$.

文献 [14] 中算法 3.3: $\sigma=0.5, \ \gamma=0.5, \alpha_n=\frac{1}{n+2}$.

文献 [15] 中算法 4: $f(x)=\frac{5}{6}x, \mu=0.5, \lambda=\frac{0.9}{\mu}, \ \gamma=0.5, \alpha_n=\frac{1}{n+2}$.

例 1　设映射$F: R^m \to R^m$满足$F(x)=\boldsymbol{M}x+\boldsymbol{q}$, 这里$\boldsymbol{q}\in R^m$且$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}$, 其中$\boldsymbol{N},\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}\in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{S}$为反对称矩阵, $\boldsymbol{D}$为对角矩阵且对角元素非负. 取可行集

$$C:=\{x\in R^m: -5\leqslant x_i\leqslant 5, i=1,2,\cdots,m\}.$$

容易得到 F 是一个单调且Lipschitz连续的映射, 其中Lipschitz常数$L=\|\boldsymbol{M}\|$. 对于$q=0$, 相应的变分不等式的唯一解是$\{0\}$.

在本文的实验中, 矩阵$\boldsymbol{N},\boldsymbol{S}$中所有元素都在区间$(-2,2)$上随机产生, 矩阵$\boldsymbol{D}$中的对角元素在$(0,1)$上随机产生. 此外, 设置所有算法中最大迭代次数为10^5, 停机条件为$\|x_n-x^*\|\leqslant\varepsilon_{\mathrm{err}}$, 其中 $\varepsilon_{\mathrm{err}}$ 为给定的误差界. 在此情况下, 我们对比了不同的维数m、不同的初始点x_1以及不同的误差界 $\varepsilon_{\mathrm{err}}$ 三种算法的数值效果, 具体如表 1 ~ 3 所示. 通过观察表中的数据可以发现, 算法 1 在三个维度上的数值效果优势非常明显.

表 1　$\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-4}$时不同算法关于维数的比较

Table 1　For $\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-4}$, comparison of different algorithms about dimensions

$x_1=(1,1,\cdots,1)$	$m=10$		$m=50$		$m=100$	
	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s
alg. 1	70	0.0136	89	0.1686	110	1.0945
alg. 3.3 in ref. [14]	47802	4.0266	10^5	128.9551	10^5	755.4308
alg. 4 in ref. [15]	10^5	12.0259	7538	14.3675	1484	17.3564

表 2　$\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-4}$时不同算法关于初始点的比较

Table 2　For $\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-4}$, comparison of different algorithms about the initial point

$m=100$	$x_1=\mathrm{rand}(100,1)$		$x_1=2\times\mathrm{rand}(100,1)$		$x_1=5\times\mathrm{rand}(100,1)$	
	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s
alg. 1	93	0.6047	119	0.7330	195	1.0379
alg. 3.3 in ref. [14]	10^5	758.4269	10^5	757.2559	10^5	748.3109
alg. 4 in ref. [15]	489	5.4683	699	7.6306	924	9.3821

表 3　$m=100$时不同算法关于允许误差的比较

Table 3　For $m=100$, comparison of different algorithms about allowable errors

$x_1=(1,1,\cdots,1)$	$\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-3}$		$\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-5}$		$\varepsilon_{\mathrm{err}}=10^{-8}$	
	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s	iter N_i	CPU time t/s
alg. 1	59	0.0142	145	0.0215	166	1.1689
alg. 3.3 in ref. [14]	54460	407.0808	10^5	764.3791	10^5	751.3783
alg. 4 in ref. [15]	622	7.1918	1133	13.1318	1418	16.5836

4　结论与展望

本文利用线搜索方法, 提出了一种新的求解非单调变分不等式的二次投影算法, 在映射是一致连续的条件下证明了算法的收敛性. 本文所得结果改进了文献 [14-15] 中对应的结果. 数值实验展示了本文算法的优势. 本文主要对变分不等式问题的算法进行了研究, 如何将所得结果应用于图像处理以及网络规划等问题中, 有待进一步研究.

参考文献(References):

[1]　KINDERLEHRER D, STAMPACCHIA G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*

[M]. New York: Academic Press, 1980.

[2] FACHINEL F, PANG J S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*[M]. New York: Springer, 2003.

[3] HE Y R. A new double projection algorithm for variational inequalities[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, **185**(1): 166-173.

[4] XU H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2002, **66**(1): 240-256.

[5] HE X, HUANG N J, LI X S. Modified projection methods for solving multi-valued variational inequality without monotonicity[J]. *Networks and Spatial Economics*, 2022, **22**: 361-377.

[6] 贺月红, 龙宪军. 求解伪单调变分不等式问题的惯性收缩投影算法[J]. 数学物理学报, 2021, **41A**(6): 1897-1911. (HE Yuehong, LONG Xianjun. A inertial contraction and projection algorithm for pseudomonotone variational inequalities problems[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2021, **41A**(6): 1897-1911.(in Chinese))

[7] 万升联. 解变分不等式的一种二次投影算法[J]. 数学物理学报, 2021, **41A**(1): 237-244. (WAN Shenglian. A double projection algorithm for solving variational inequalities[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2021, **41A**(1): 237-244.(in Chinese))

[8] 杨军. 非单调变分不等式黄金分割算法研究[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(7): 764-770. (YANG Jun. A golden ratio algorithm for solving nonmonotone variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(7): 764-770.(in Chinese))

[9] YE M L, HE Y R. A double projection method for solving variational inequalities without monotonicity[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2015, **60**(1): 141-150.

[10] HE B S. A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1997, **35**: 69-76.

[11] GOLDSTEIN A. Convex programming in Hilbert space[J]. *Bulltin of the American Mathematical Society*, 1964, **70**(5): 709-710.

[12] KORPELEVICH G M. The extragradient method for finding saddle points and other problems[J]. *Ekonomika I Matematicheskie Metody*, 1976, **12**: 747-756.

[13] SOLODOV M V, SVAITER B F. A new projection method for variational inequality problems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, **37**(3): 765-776.

[14] VUONG P T, SHEHU Y. Convergence of an extragradient-type method for variational inequality with applications to optimal control problems[J]. *Numerical Algorithms*, 2019, **81**(1): 269-291.

[15] REICH S, THONG D V, DONG Q L, et al. New algorithms and convergence theorems for solving variational inequalities with non-Lipschitz mappings[J]. *Numerical Algorithms*, 2021, **87**(2): 527-549.

[16] HE Y R. Solvability of the minty variational inequality[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, **174**(3): 686-692.