

### 主动冷却点阵夹层隔热结构温度响应计算模型

彭世彬, 郭 瑞, 冯上升, 金 峰

### A Calculation Model for Temperature Responses of Active Cooling Lattice Sandwich Structures for Thermal Protection

PENG Shibin, GUO Rui, FENG Shangsheng, and JIN Feng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420405>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 磁流变弹性体的力-磁耦合模型

A Theoretical Model for MagnetoMechanical Coupling Behaviors of Magnetorheological Elastomers

应用数学和力学. 2018, 39(1): 92-103 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380021>

#### 非均匀温度影响下格栅夹芯结构微极梁等效方法

An Equivalent Micropolar Beam Method for Grid Sandwich Structures Under Inhomogeneous Temperature Conditions

应用数学和力学. 2018, 39(6): 672-680 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390086>

#### 星载高精度反射器工程模型在轨热变形分析及结构优化

Thermal Deformation Analysis and Structural Optimization of HighPrecision Reflector Engineering Models on Satellites

应用数学和力学. 2018, 39(6): 657-664 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390089>

#### 热防护服-空气-皮肤热传导模型及其解析解

A Thermal Protective Clothing-Air-Skin Heat Conduction Model and Its Analytical Solution

应用数学和力学. 2021, 42(2): 162-169 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400290>

#### 二维周期性单胞网格结构的等效热弹性分析

Equivalent ThermoElasticity Analysis of 2D Lattice Structures With Periodic Unit Cells

应用数学和力学. 2018, 39(6): 714-727 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390025>

#### 火场-结构联合分析简化模型及其应用研究

A Simplified Model for Coupled Fire-Structure Analysis and Its Application

应用数学和力学. 2017, 38(8): 888-898 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370351>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 主动冷却点阵夹层防热结构温度响应计算模型\*

彭世彬<sup>1</sup>, 郭瑞<sup>1</sup>, 冯上升<sup>2,3</sup>, 金峰<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049;

2. 西安交通大学 仿生工程与生物力学研究所, 西安 710049;

3. 西安交通大学 生物医学信息工程教育部重点实验室, 西安 710049)

**摘要:** 针对点阵夹层结构主动热防护问题, 建立了夹层结构面板和芯体导热与冷却剂对流耦合的非稳态传热理论模型, 利用有限体积法离散控制方程并在 MATLAB 中进行了迭代求解. 模型首次考虑了面板与夹芯杆之间的收缩热阻, 并利用分离变量法得到了收缩热阻的近似解析解. 基于单胞模型和周期性边界条件, 模拟得到了模型所需的表面对流传热系数  $h_b$  和  $h_{in}$ . 最后, 选取多单胞计算工况进行数值模拟和理论模型对比, 并讨论了收缩热阻对模型预测精度的影响. 结果表明: 理论模型能够准确预测夹层结构及内部流体的温度变化, 理论与仿真之间的最大误差不超过 1%; 随着外加热流密度不断增大, 忽略收缩热阻使得计算结果造成的误差不断增大; 与数值模拟相比, 理论模型可显著地减少计算时间并节省计算资源, 尤其适用于非均匀、非稳态复杂热载荷下点阵夹层结构的温度响应计算.

**关键词:** 点阵结构; 主动冷却; 温度响应; 防热结构; 收缩热阻; 理论模型

**中图分类号:** TK124; O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420405

## A Calculation Model for Temperature Responses of Active Cooling Lattice Sandwich Structures for Thermal Protection

PENG Shibin<sup>1</sup>, GUO Rui<sup>1</sup>, FENG Shangsheng<sup>2,3</sup>, JIN Feng<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, P.R.China;

2. Bioinspired Engineering and Biomechanics Center, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China;

3. Key Laboratory of Biomedical Information Engineering of Ministry of Education, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, P.R.China)

**Abstract:** Aimed at the active thermal protection with lattice sandwich structures, an unsteady heat transfer theoretical model coupling facesheet and core heat conduction with coolant convection in the sandwich structure, was established. The model equations were discretized with the finite volume method and solved iteratively in MATLAB; the constriction thermal resistance between the facesheet and the lattice struts was considered for the first time in the model, and the approximate analytical solution of the constriction thermal resistance was obtained with the variable separation method;

\* 收稿日期: 2021-12-24; 修订日期: 2022-02-25

基金项目: 国家自然科学基金 (51676156); 国家重点研发计划 (2017YFB1102801)

作者简介: 彭世彬(1997—), 男, 硕士(E-mail: [psb315@stu.xjtu.edu.cn](mailto:psb315@stu.xjtu.edu.cn));

冯上升(1984—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: [shangshengfeng@xjtu.edu.cn](mailto:shangshengfeng@xjtu.edu.cn));

金峰(1968—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: [jinzhaof@mail.xjtu.edu.cn](mailto:jinzhaof@mail.xjtu.edu.cn)).

引用格式: 彭世彬, 郭瑞, 冯上升, 金峰. 主动冷却点阵夹层防热结构温度响应计算模型[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(5): 477-489.

based on the unit-cell model and periodic boundary conditions, heat transfer coefficients  $h_b$  and  $h_{fin}$  required by the model were first obtained through numerical simulation. Finally, a case study with a multi-cell structure was carried out to compare the numerical and theoretical results, and the influence of the constriction thermal resistance on the prediction accuracy was discussed. The results show that, the theoretical model can accurately predict the temperature variations of the sandwich structure and the internal fluid, and the maximum deviation between theory and simulation is less than 1%. As the external heat flux increases, the error of theoretical prediction rises with the constriction thermal resistance ignored. Compared with the numerical simulation, the theoretical model can significantly reduce the calculation time and save calculation resources, thus it is especially suitable for active cooling lattice sandwich structures subjected to complex, non-uniform and unsteady thermal loads.

**Key words:** lattice sandwich structure; active cooling; temperature response; thermal protection; constriction thermal resistance; theoretical model

## 引 言

点阵夹层结构由于同时具备承受机械载荷和热载荷的双重功能而在航空航天领域具有广阔的应用前景<sup>[1-3]</sup>,如超高音速飞行器的热防护部件<sup>[4]</sup>,火箭发动机的燃烧室<sup>[5]</sup>,以及航空母舰上的偏流板<sup>[6]</sup>等.现有关于点阵夹层结构热学特性的研究主要集中在稳态传热,然而在上述应用中,结构表面的热载荷通常是随时间急剧变化的,因此,探究点阵夹层结构在非稳态热载荷作用下的温度响应十分必要.

相比于孔结构随机排列的开孔金属泡沫,具有周期性单胞的点阵夹层结构在力学载荷作用下芯体变形以杆件拉伸为主导,因此在相同的孔隙率下具有更优异的比强度/刚度<sup>[7]</sup>.在传热方面,点阵结构既增加了散热面积,又可在芯体通道内产生流动漩涡并促进流体扰动,从而增大表面对流换热系数;而且其内部流动更加有序,比随机开孔金属泡沫具有更低的压降<sup>[7]</sup>.因此,点阵夹层结构在承载-散热多功能应用场合更具综合优势. Kim 等发现四面体夹芯板的散热效率是空通道的 6 倍左右<sup>[8]</sup>. Lu 等利用 PIV 粒子成像技术揭示了四面体点阵夹芯板中的流场分布,证明夹芯杆与面板之间形成的涡流是引起传热强化的主要原因<sup>[9]</sup>. Yan 等通过冲压金属薄板制作了一种轻质 X 型点阵结构并研究了其对流换热性能,研究发现 X 型点阵独特的结构形态导致大规模的螺旋主流,它与二次流相互作用提高了换热能力<sup>[10-11]</sup>.截至到目前,大部分研究集中在对点阵结构内部流动换热机理的探究方面,而对其在非稳态热载荷作用下的温度响应鲜有研究.此外,在理论模拟方面,过去的研究主要针对均匀热边界条件,采用 CFD 数值方法模拟一个或者一排单胞内的流动传热<sup>[12]</sup>,然而对于工程中的非均匀热边界条件问题,需要的计算区域更大,计算非常耗时.现有理论建模一般是基于翅片理论,将点阵夹芯杆中的热传导简化为表面对流的一维翅片导热<sup>[8]</sup>,翅片根部的温度认为等于连接面板表面的平均温度;实际上,由于芯体杆件根部的面积较小,热量在透过面板的过程中逐渐向杆件根部聚集,导致杆件根部的温度要低于连接面板表面的单元平均温度,而现有的研究都忽略了这一重要影响因素.

综上,本文以金字塔点阵结构为研究对象,研究了主动冷却下承受非稳态热载荷的点阵夹层结构及内部流体的温度响应问题,建立了夹层结构导热与冷却剂对流耦合的理论模型,利用分离变量法推导了夹芯杆根部与连接面板之间收缩热阻的近似解析解,并开展数值模拟验证了理论模型.

## 1 理论模型

### 1.1 模型介绍

图 1 为本文研究的金字塔型点阵金属夹芯结构的对流换热示意图.考虑该金字塔型点阵夹芯结构在主动冷却作用下承受非稳态热流密度时的温度响应问题.外界热量由上面板输入,下面板底部处于绝热状态,冷却

液以初始温度  $T_{\text{cool}} = 300 \text{ K}$  流入夹芯板带走热量. 上、下面板厚度为  $t_b = 0.8 \text{ mm}$ , 夹芯高度为  $H = 5 \text{ mm}$ , 夹芯杆直径为  $d = 1 \text{ mm}$ , 夹芯杆与下面板的夹角为  $\theta = 45^\circ$ .

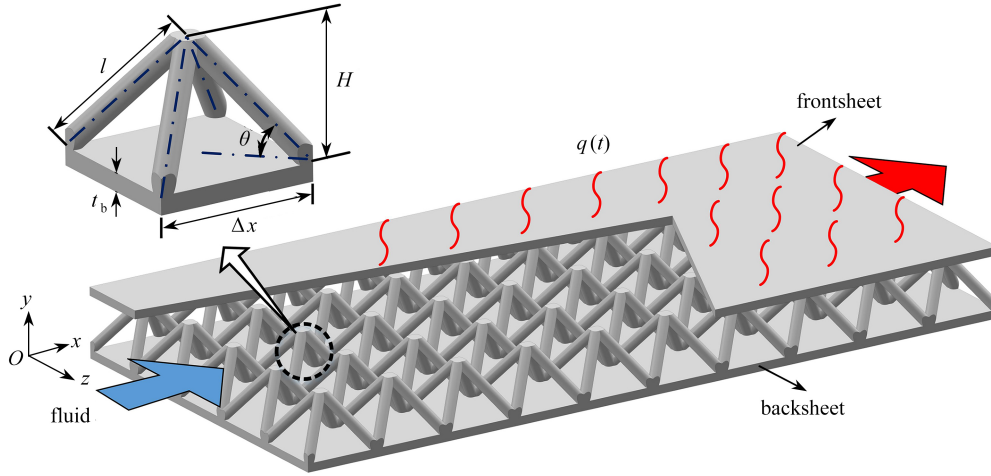


图 1 金字塔型点阵金属夹芯结构的强制对流换热示意图

Fig. 1 Schematic of forced convection heat transfer through the pyramidal lattice metal sandwich structure

### 1.2 非稳态传热控制方程

由于点阵夹芯结构内部的流动在  $z$  方向上具有周期重复性和对称性, 因此只在  $z$  方向上选取一个单胞对应的流动通道进行分析. 在进行理论建模时做以下假设: 点阵单胞对应上下面板的平均温度等于面板中心的温度; 夹芯杆横截面内的温度均匀; 冷却流体为常物性; 单胞内流体温度分布均匀, 且仅沿着  $x$  方向变化.

基于以上假设, 由能量守恒定律可得到基于单胞层面的上面板的非稳态传热方程:

$$(\rho c_p)_s \frac{\partial \bar{T}_{\text{ft}}(x, t)}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{ft}}(x, t)}{\partial x^2} + \dot{q}_{\text{ft}}, \quad (1)$$

式中,  $(\rho c_p)_s$  是固体的密度与定压比热容的乘积;  $\bar{T}_{\text{ft}}(x, t)$  是  $t$  时刻坐标  $x$  处的单胞对应上面板的平均温度;  $k_s$  是固体热导率;  $\dot{q}_{\text{ft}}$  是由外加热流密度和夹芯杆导热及流体对流引起的上面板的附加热源项, 表示为

$$\dot{q}_{\text{ft}} = \frac{Aq(t) - 4Sq_{\text{fin,ft}}(x, t) - A_w h_b (\bar{T}_{\text{ft,inner}}(x, t) - T_f(x, t))}{A t_b}, \quad (2)$$

$$A_w = A - A_{\text{cy}}, \quad A_{\text{cy}} = 4ab \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right), \quad a = \frac{d}{2 \sin \theta}, \quad b = \frac{d}{2}, \quad (3)$$

其中,  $q(t)$  是  $t$  时刻施加于上面板外表面的非稳态热流密度,  $A$  是上、下面板在  $xOz$  平面内的单胞投影面积,  $S$  是夹芯杆的横截面积,  $q_{\text{fin,ft}}(x, t)$  是上面板传递到其中一个夹芯杆中的热流密度,  $A_w$  是单胞内上下面板与流体直接接触的面积,  $A_{\text{cy}}$  是单胞内夹芯杆与上下面板的接触面积,  $h_b$  是上面板与流体之间的对流换热系数,  $T_f(x, t)$  是  $t$  时刻坐标  $x$  处的单胞内流体的平均温度, 将在后文中定义,  $\bar{T}_{\text{ft,inner}}(x, t)$  是单胞上面板内表面的平均温度. 由于上面板直接暴露在高热流密度中, 所以上面板沿厚度方向存在很大的温度梯度, 由 Fourier 定律, 单胞上面板内外表面的平均温度分别为

$$\bar{T}_{\text{ft,inner}}(x, t) = \bar{T}_{\text{ft}}(x, t) - \frac{q(t)t_b}{2k_s}, \quad \bar{T}_{\text{ft,outer}}(x, t) = \bar{T}_{\text{ft}}(x, t) + \frac{q(t)t_b}{2k_s}. \quad (4)$$

式 (1) 对应的边界条件为

$$\begin{cases} x = 0: \frac{\partial \bar{T}_{\text{ft}}}{\partial x} = 0, \\ x = n\Delta x: \frac{\partial \bar{T}_{\text{ft}}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $n$  为沿流动方向的单胞数量.

将式 (1) 和式 (5) 中的温度下标 ft 改为 bk, 即可表示点阵结构下面板的非稳态传热方程和边界条件. 对于

下面板, 由于一侧绝热, 沿厚度方向的温度梯度可以忽略, 即认为每个单胞对应下面板的温度均匀一致, 因此, 下面板的附加热源项可表示为

$$\dot{q}_{bk} = \frac{4Sq_{fin,bk}(x,t) - A_w h_b (\bar{T}_{bk}(x,t) - T_f(x,t))}{At_b}, \tag{6}$$

式中,  $\bar{T}_{bk}(x,t)$  是  $t$  时刻坐标  $x$  处的单胞对应下面板的平均温度,  $q_{fin,bk}(x,t)$  是  $t$  时刻坐标  $x$  处的单胞内每根夹芯杆传递到下面板的热流密度.

采用一维翅片传热模型, 可得单胞内每根夹芯杆的非稳态传热方程和边界条件为

$$(\rho c_p)_s \frac{\partial T_{fin}(\eta, x)}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T_{fin}(\eta, x)}{\partial \eta^2} - \frac{h_{fin} P}{S} (T_{fin}(\eta, x) - T_f(x, t)), \tag{7}$$

$$\begin{cases} \eta = 0: T_{fin}(x) = \bar{T}_{fi,inner}(x) - R_c A q(t), \\ \eta = l: T_{fin}(x) = \bar{T}_{bk}(x), \end{cases} \tag{8}$$

式中,  $T_{fin}(\eta, x)$  是夹芯杆沿杆长在局部坐标  $\eta$  处的温度,  $h_{fin}$  是夹芯杆表面流体的对流换热系数,  $P$  是夹芯杆横截面的周长,  $S$  是夹芯杆横截面的面积,  $R_c$  是收缩热阻, 将在后文中定义.

由上面板进入每根夹芯杆的热流密度为

$$q_{fin,ft}(x) = -k_s \left. \frac{\partial T_{fin}(x, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}. \tag{9}$$

由每根夹芯杆传递到下面板的热流密度为

$$q_{fin,bk}(x) = -k_s \left. \frac{\partial T_{fin}(x, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=l}. \tag{10}$$

由能量平衡, 单胞内流体的非稳态传热控制方程为

$$(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f(x, t)}{\partial t} + (\rho c_p)_f u_0 \frac{\partial T_f(x, t)}{\partial x} = k_f \frac{\partial^2 T_f(x, t)}{\partial x^2} + \dot{q}_f, \tag{11}$$

$$\dot{q}_f = \frac{4h_{fin} Pl(\bar{T}_{fin}(x, t) - T_f(x, t)) + A_w h_b (\bar{T}_{fi,inner}(x, t) - T_f(x, t)) + A_w h_b (\bar{T}_{bk}(x, t) - T_f(x, t))}{AH - \pi d^2 l}, \tag{12}$$

$$\bar{T}_{fin}(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l T_{fin}(\eta, x) d\eta, \tag{13}$$

式中,  $(\rho c_p)_f$  是流体的密度与定压比热容的乘积,  $u_0$  是流体的进口平均速度,  $k_f$  是流体的热导率.

流体域的边界条件为

$$\begin{cases} x = 0: T_f = 300 \text{ K}, \\ x = n\Delta x: \frac{\partial T_f}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

### 1.3 控制方程离散化

#### 1.3.1 结构体控制方程离散化

针对点阵结构周期排列的特点, 以流动方向上每个单胞的上、下面板为面板离散的最小单元, 以单胞内流体区域为流体域的最小离散单元, 每个单胞内的夹芯杆沿着长度方向进行区域离散, 点阵夹层结构及内部流体的离散示意图如图 2 所示.

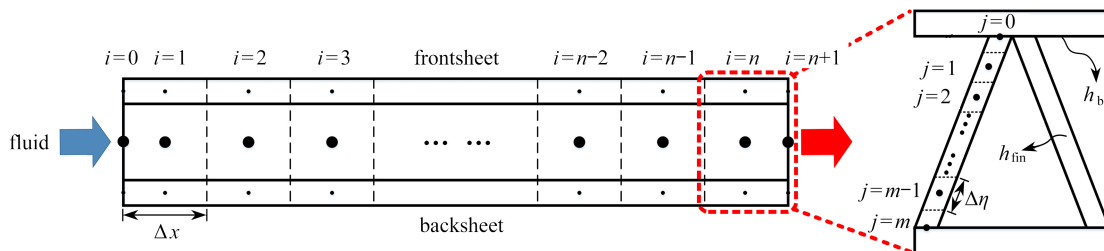


图 2 点阵夹层结构及内部流体的离散示意图  
Fig. 2 Discretization of the lattice sandwich structure with internal fluid



采用有限容积方法<sup>[13]</sup>, 将式 (1) 两边在一个单胞长度  $\Delta x$  及时间间隔  $\Delta t$  内分别对空间和时间积分, 得到单胞上面板传热控制方程的显式离散形式为

$$\bar{T}_{ft,i}^{k+1} = (ar)_{ft} \bar{T}_{ft,i+1}^k + (1 + (br)_{ft}) \bar{T}_{ft,i}^k + (cr)_{ft} \bar{T}_{ft,i-1}^k + \frac{\dot{q}_{ft,i}^k \Delta t}{(\rho c_p)_s}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$\bar{T}_{ft,0}^{k+1} = \bar{T}_{ft,1}^{k+1}, \quad \bar{T}_{ft,n+1}^{k+1} = \bar{T}_{ft,n}^{k+1}, \quad (16)$$

其中

$$r_{ft} = \left( \frac{k}{\rho c_p} \right)_s \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (17)$$

$$\dot{q}_{ft,i}^k = \frac{Aq^k - 4Sq_{fin,ft,i}^k - A_w h_b (\bar{T}_{ft,inner,i}^k - T_{f,i}^k)}{At_b}, \quad (18)$$

$$q_{fin,ft,i}^k = k_s \frac{T_{fin,i,0}^k - T_{fin,i,1}^k}{\Delta \eta}. \quad (19)$$

每一时刻单胞上面板内外表面的平均温度为

$$\begin{cases} \bar{T}_{ft,inner,i}^{k+1} = \bar{T}_{ft,i}^{k+1} - \frac{q^{k+1} t_b}{2k_s}, \\ \bar{T}_{ft,outer,i}^{k+1} = \bar{T}_{ft,i}^{k+1} + \frac{q^{k+1} t_b}{2k_s}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

式 (15)~(20) 中,  $a_{ft}, b_{ft}, c_{ft}$  的值与  $i$  有关, 当  $i = 2, 3, \dots, n-1$  时,  $a_{ft} = 1, b_{ft} = -2, c_{ft} = 1$ ; 当  $i = 1$  时,  $a_{ft} = 1, b_{ft} = -3, c_{ft} = 2$ ; 当  $i = n$  时,  $a_{ft} = 2, b_{ft} = -3, c_{ft} = 1$ .  $T_{fin,i,0}^k$  是  $k$  时刻第  $i$  个单胞中夹芯杆边界点  $j = 0$  的温度,  $T_{fin,i,1}^k$  是  $k$  时刻第  $i$  个单胞中芯体杆内  $j = 1$  代表单元的温度.

类似地, 将式 (15)~(17) 中的所有下标  $ft$  换成  $bk$ , 即可表示对下面板非稳态传热方程进行显式离散得到的代数方程, 其中

$$\dot{q}_{bk,i}^k = \frac{4Sq_{fin,bk,i}^k - A_w h_b (\bar{T}_{bk,i}^k - T_{f,i}^k)}{At_b}, \quad (21)$$

$$q_{fin,bk,i}^k = k_s \frac{T_{fin,i,m-1}^k - T_{fin,i,m}^k}{\Delta \eta}. \quad (22)$$

将第  $i$  个单胞中芯体杆件的非稳态传热方程进行显式离散得到的代数方程为

$$T_{fin,i,j}^{k+1} = r_{fin} T_{fin,i,j+1}^k + (1 - 2r_{fin}) T_{fin,i,j}^k + r_{fin} T_{fin,i,j-1}^k + \frac{\dot{q}_{fin,i,j}^k \Delta t}{(\rho c_p)_s}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (23)$$

$$T_{fin,i,0}^{k+1} = \bar{T}_{ft,inner,i}^{k+1} - R_c A q^{k+1}, \quad T_{fin,i,m}^{k+1} = \bar{T}_{bk,i}^{k+1}, \quad (24)$$

其中

$$r_{fin} = \left( \frac{k}{\rho c_p} \right)_s \frac{\Delta t}{\Delta \eta^2}, \quad (25)$$

$$\dot{q}_{fin,i,j}^k = -\frac{h_{fin} P}{S} (T_{fin,i,j}^k - T_{f,i}^k). \quad (26)$$

### 1.3.2 流体控制方程离散化

对单胞内流体的非稳态传热方程进行时间和空间上的积分, 其中对流项的离散采用二阶迎风格式, 边界内点的离散采用二次插值, 得到

$$T_{f,i}^{k+1} = (ar)_f T_{f,i+1}^k + (1 + b_{fc} + (cr)_f) T_{f,i}^k + (dc + er)_f T_{f,i-1}^k + fc T_{f,i-2}^k + \frac{\dot{q}_{f,i}^k \Delta t}{(\rho c_p)_f}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

$$T_{f,0}^{k+1} = 300 \text{ K}, T_{f,n+1}^{k+1} = T_{f,n}^{k+1}, \quad (28)$$

其中

$$r_f = \left( \frac{k}{\rho c_p} \right)_f \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, c = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (29)$$

$$\dot{q}_{f,i}^k = \frac{4h_{fin}Pl(\bar{T}_{fin,i}^k - T_{f,i}^k) + A_w h_b (\bar{T}_{ft,inner,i}^k - T_{f,i}^k) + A_w h_b (\bar{T}_{bk,i}^k - T_{f,i}^k)}{AH - \pi d^2 l}, \quad (30)$$

$$\bar{T}_{fin,i}^k = \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^{m-1} T_{fin,i,j}^k + \frac{T_{fin,i,0}^k + T_{fin,i,m}^k}{2} \right). \quad (31)$$

式(27)中,当 $i=1$ 时, $a_f=1, b_f=-2, c_f=-3, d=2, e=2, f=0$ ;当 $i=2$ 时, $a_f=1, b_f=-3/2, c_f=-2, d=5/2, e=1, f=-1$ ;当 $i=3, 4, \dots, n-1$ 时, $a_f=1, b_f=-3/2, c_f=-2, d=2, e=1, f=-1/2$ ;当 $i=n$ 时, $a_f=2, b_f=-3/2, c_f=-3, d=2, e=1, f=-1/2$ .

为了保证数值计算的收敛性,对以上所有离散后的代数方程,显式格式在求解时必须同时满足以下稳定条件<sup>[13]</sup>:

$$r_{ft} \leq 0.5, r_{bk} \leq 0.5, r_{fin} \leq 0.5, r_f \leq 0.5. \quad (32)$$

在MATLAB中对结构和流体的非稳态传热代数方程进行迭代求解,具体的过程如下:

- 1) 选取合适的时间步长 $\Delta t$ 和空间步长 $\Delta \eta$ ;
- 2) 为结构域和流体域赋予初始温度(300 K);
- 3) 计算下一时刻上、下面板和夹芯杆及流体域离散方程中的附加热源项;
- 4) 计算下一时刻结构域和流体域中离散单元内的温度;
- 5) 将下一时刻结构域和流体域的温度作为初始温度,重复步骤3)~5),直至整个非稳态过程结束.

计算在满足收敛条件的情况下,取 $\Delta t=0.004 \text{ s}$ , $\Delta \eta=0.35 \text{ mm}$ 足够满足计算精度.

#### 1.4 确定对流换热系数

上述离散后的代数方程中出现的两个对流换热系数 $h_b$ 和 $h_{fin}$ 是未知的,因此理论模型并不完整.为此,采取基于单胞的周期性流动传热模型进行仿真求解,具体做法如下.

首先根据结构对称性建立只有半个单胞的周期性流动传热模型.将流体进出口设置为周期性边界条件,流体进口的平均速度在 $u_0=0.2\sim 1.0 \text{ m/s}$ 范围内变化,固体域及流体域左右侧均设置为对称边界,流固交界面设为无滑移耦合传热边界条件,单胞上面板给定恒定的热流密度 $128500 \text{ W/m}^2$ ,其他壁面设置为绝热边界.在Fluent Meshing中对当前模型进行网格划分,网格类型采用多面体型,对壁面边界层处进行加密处理确保 $y^+ < 1$ ,湍流模型选用 $k-\omega \text{ SST}$ ,该模型在计算复杂分离流时具有优越性,能够很好地预测剪切流动中的流动分离现象<sup>[14]</sup>,因此非常适用于当前流动模型中漩涡流的模拟.采用SIMPLE算法耦合压力和速度进行数值分析,对流项的离散采用二阶迎风格式,动量方程的迭代收敛准则为 $10^{-3}$ ,能量方程的迭代收敛准则为 $10^{-7}$ .图3中展示了模型的计算域、边界条件和网格.

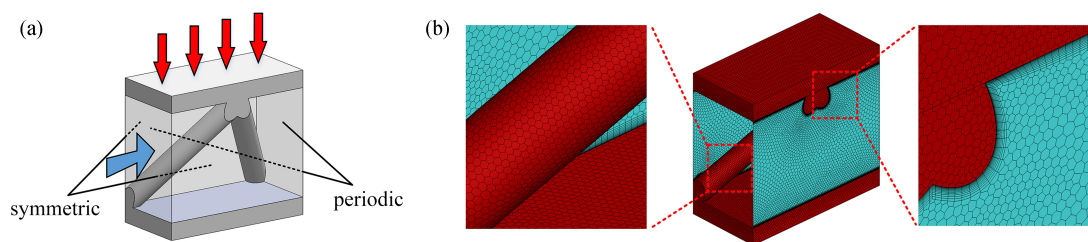


图3 周期性流动传热数值模拟:(a)计算域及边界条件;(b)网格

Fig. 3 Numerical simulation of periodic flow and heat transfer: (a) the computational domain and boundary conditions; (b) the mesh

定义 $Re_d, h_b$ 和 $h_{fin}$ 为<sup>[9]</sup>

$$Re_d = \frac{\rho u_0 d}{\mu_f}, h_b = \frac{q_b}{\bar{T}_{ft,inner} - \bar{T}_f}, h_{fin} = \frac{q_{fin}}{\bar{T}_{fin} - \bar{T}_f}, \bar{T}_f = \frac{\int_{mid, cross-section} u T_f dA}{\int_{mid, cross-section} u dA}, \quad (33)$$

式中,  $q_b$  是从单胞上面板内表面传递到流体中的平均热流密度, 积分下标 “mid, cross-section” 表示沿流动方向单胞的中心截面。

为了验证当前模拟的准确性, 将计算的不同  $Re_d$  下夹芯杆表面的对流换热系数与 Žukauskas<sup>[15]</sup> 得到的流体横掠交错圆柱的经验关系式修正后的结果进行了比较, 如图 4 所示, 在当前考虑的 Reynolds 数范围内, 整体计算误差不超过 ±15%。流体横掠交错圆柱的经验关系式如下<sup>[15]</sup>:

$$h_{fin} = \begin{cases} 1.04 Re_d^{0.4} Pr^{0.36} k_f / d, & 1 \leq Re_d < 500, \\ 0.71 Re_d^{0.5} Pr^{0.36} k_f / d, & 500 \leq Re_d < 10^3, \\ 0.35 Re_d^{0.6} Pr^{0.36} k_f / d, & 10^3 \leq Re_d \leq 10^5. \end{cases} \quad (34)$$

圆柱体相对于流动方向的倾斜度会减小局部对流换热系数, 对于当前的金字塔点阵夹芯杆 ( $\theta=45^\circ$ ), 式 (34) 的计算结果应当乘以 0.8 进行修正<sup>[15]</sup>。

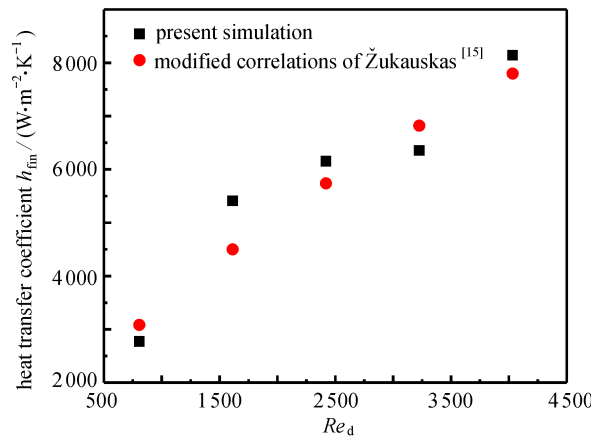


图 4 不同  $Re_d$  下, 夹芯杆表面的对流换热系数  
Fig. 4 Heat transfer coefficients on the surface of lattice struts under different  $Re_d$  values

### 1.5 求解收缩热阻

如果热量沿传导方向的传热面积缩小, 则在变截面处存在收缩热阻, 可定义为<sup>[16]</sup>

$$R_c = \frac{\bar{T}_{ft,inner} - \bar{T}_{ft,fin}}{Q}, \quad (35)$$

式中,  $\bar{T}_{ft,inner}$  是单胞上面板内表面的平均温度,  $\bar{T}_{ft,fin}$  是单胞上面板与夹芯杆连接部分的平均温度,  $Q$  是施加在上面板的总热量。收缩热阻是扩散热阻的反过程, 在电子器件散热中得到了广泛应用。

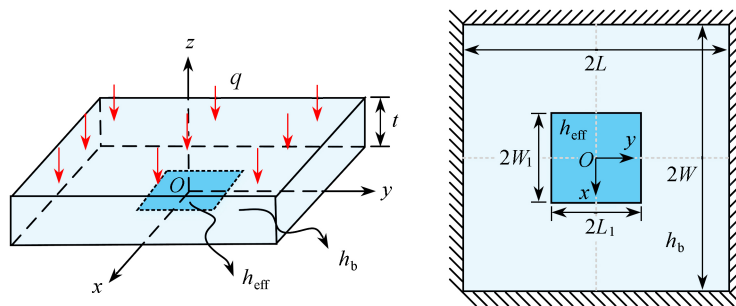


图 5 求解收缩热阻的等效模型  
Fig. 5 The equivalent model for solving the constriction thermal resistance

面板-点阵之间的收缩热阻的求解可以等效为以下问题: 如图 5 所示, 一块矩形板顶部承受均匀热流, 四



周绝热, 底部分别受到不同程度的对流冷却作用, 即在面板内表面的中间与翅片连接界面上的等效对流换热系数为  $h_{\text{eff}}$ , 而其他直接接触冷却流体区域的表面对流换热系数为  $h_b$ , 由于模型的对称性, 可取图 5 中模型的 1/4 进行求解, 因此该问题的控制方程和边界条件可表示为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad (36)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=t} = q, \quad (37)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(x, y) \theta. \quad (38)$$

式 (36)~(38) 中,  $\theta$  是相对于冷却流体温度的过剩温度;  $q$  是施加在上表面的均匀热流密度;  $h(x, y)$  是对流换热系数, 其大小和坐标位置有关, 表示为

$$h(x, y) = \begin{cases} h_{\text{eff}}, & (x, y) \in (0, L_1) \times (0, W_1), \\ h_b, & (x, y) \in (0, L) \times (0, W) - (0, L_1) \times (0, W_1), \end{cases} \quad (39)$$

式中,  $h_{\text{eff}}$  为翅片传热造成的等效对流换热系数, 表示为

$$h_{\text{eff}} = \frac{h_{\text{fin}} P \eta_f}{L_1 W_1}, \quad \eta_f = \frac{\tanh(ml)}{ml}, \quad m = \sqrt{\frac{h_{\text{fin}} P}{k_s S}}. \quad (40)$$

等效模型的尺寸与点阵结构单胞上面板的尺寸之间的关系为

$$t = t_b, \quad L_1 = W_1 = \frac{1}{2} \sqrt{A_{\text{cy}}}, \quad L = W = \frac{1}{2} \Delta x. \quad (41)$$

通过分离变量法可得到该方程的通解为<sup>[17]</sup>

$$\theta = A \left( 1 + \frac{Bz}{t} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [c_{mn} \sinh(\lambda_{mn} z) + d_{mn} \cosh(\lambda_{mn} z)] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right), \quad (42)$$

其中,  $c_{00} = d_{00} = 0$ ,

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2. \quad (43)$$

施加在  $z = t$  平面上的总热量为

$$\int_0^W \int_0^L k_s \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=t} dx dy = qLW \equiv \frac{Q}{4}. \quad (44)$$

将式 (42) 代入式 (44), 得到

$$AB = \frac{qt}{k_s}. \quad (45)$$

为求解系数  $A$ ,  $c_{mn}$  和  $d_{mn}$  的值, 对式 (37) 和 (38) 两边分别乘  $\cos(m'\pi x/L)\cos(n'\pi y/W)$ , 并在整个平面上对  $x$  和  $y$  进行积分, 可得

$$c_{m'n'} \cosh(\lambda_{m'n'} t) + d_{m'n'} \sinh(\lambda_{m'n'} t) = 0, \quad (46)$$

式中,  $m', n'$  为任意整数,

$$AH_{m'n',00} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{m'n',mn} d_{mn} = \begin{cases} \frac{qt}{k_s}, & m' = n' = 0, \\ \frac{\lambda_{m'0} t}{2} c_{m'0}, & m' \neq 0, n' = 0, \\ \frac{\lambda_{0n'} t}{2} c_{0n'}, & m' = 0, n' \neq 0, \\ \frac{\lambda_{m'n'} t}{4} c_{m'n'}, & m' \neq 0, n' \neq 0, \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
 H'_{m'n',mn} = & \frac{Bi_{\text{eff}}}{LW} \int_0^{W_1} \int_0^{L_1} \cos\left(\frac{m'\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{W}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{W}\right) dx dy + \\
 & \frac{Bi_b}{LW} \int_0^{W_1} \int_{L_1}^L \cos\left(\frac{m'\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{W}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{W}\right) dx dy + \\
 & \frac{Bi_b}{LW} \int_{W_1}^W \int_0^L \cos\left(\frac{m'\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{W}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{W}\right) dx dy,
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$Bi_{\text{eff}} = \frac{h_{\text{eff}}t}{k_s}, \quad Bi_b = \frac{h_b t}{k_s}. \tag{49}$$

根据定义, 收缩热阻可计算为

$$R_c = \frac{\bar{T}_{\text{ft,inner}} - \bar{T}_{\text{ft,fin}}}{Q} = \frac{A - \int_0^{W_1} \int_0^{L_1} \theta(x,y,0) dx dy}{4qLW}. \tag{50}$$

该问题的一个特殊情况是矩形板下表面换热均匀, 即  $h_{\text{eff}}=h_b=\bar{h}$ , 此时易求出

$$A = \frac{q}{\bar{h}}, \quad B = \frac{\bar{h}t}{k_s}, \quad c_{m'n'} = d_{m'n'} = 0, \quad \theta = q \left( \frac{1}{\bar{h}} + \frac{z}{k_s} \right). \tag{51}$$

对于一般的情况, 由于方程的复杂性, 可在 MATLAB 中进行迭代求解, 具体过程如下:

- 1) 选择所需的扩展项数量 ( $N \times N$ );
- 2) 令  $c_{mn} = d_{mn} = 0$  (下表面均匀换热) 作为初始值;
- 3) 将  $d_{mn}$  代入式 (45) 和 (47) 计算新的  $A, B$  和  $c_{mn}$ ;
- 4) 将  $c_{mn}$  代入式 (46) 得到新的  $d_{mn}$ ;
- 5) 检查旧值和新值之间的差值是否小于规定的公差, 如果没有, 返回步骤 3)。

经过验证,  $N = 30$  足够满足求解精度, 并设置两次迭代之间  $d_{mn}$  的变化小于 0.001。

## 2 数值模型

为验证当前理论模型的准确性, 对所示的点阵结构进行数值模拟, 考虑到计算资源的限制, 沿流动方向的单胞数量取  $n = 10$ , 但对理论计算模型  $n$  可以远大于 10。结构材料设为钢, 其密度  $\rho_s = 8\,030 \text{ kg/m}^3$ , 热导率  $k_s = 16.27 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , 定压比热容  $c_{ps} = 502.48 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ 。冷却剂为航空煤油 JP-7<sup>[18]</sup>, 密度  $\rho_f = 800 \text{ kg/m}^3$ , 定压比热容  $c_{pf} = 2\,575 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , 热导率  $k_f = 0.11 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , 黏度  $\mu_f = 1.984 \times 10^{-4} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ 。

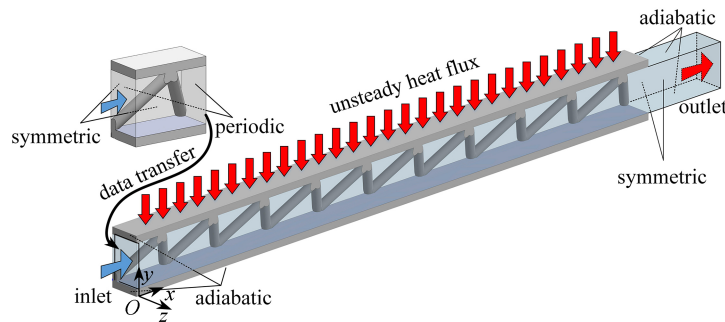


图 6 含多个单胞点阵夹层结构数值模拟计算域及边界条件

Fig. 6 The numerical simulation domain and boundary conditions for the multi-cell lattice sandwich structure

图 6 展示了模型的计算域及边界条件: 本文中首先按照 1.4 小节中的方法对单胞进行周期性流动传热模拟, 为避免入口效应, 入口边界上的速度直接读取周期性流动传热模拟得到的周期边界上的速度分布, 出口采用压力边界, 上面板外表面采用非稳态热流边界, 时间步长设置为 1 s, 两侧为对称边界, 流固交界面采用无滑移耦合传热边界条件, 其余面均为绝热边界。网格类型、划分方式及湍流模型均与单胞周期性模拟一致。为确

保计算结果与网格数量无关,取加热表面平均温度 $\bar{T}_{\text{flux}}$ 为监测值进行网格独立性验证,测试网格数从120万增加到400万,发现在网格数量超过340万时计算结果已无明显变化,如图7所示,因此最终采取的网格数为340万。

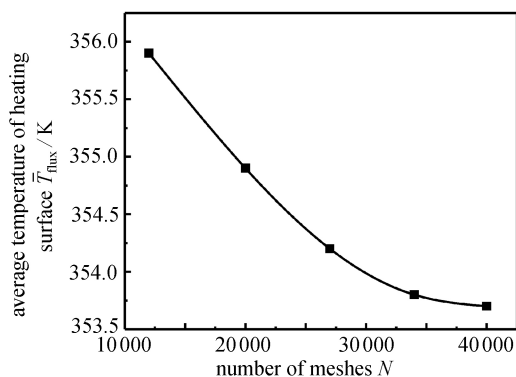


图7 加热面平均温度随网格数量的变化曲线

Fig. 7 The variation of the average temperature of heating surface with the number of meshes

### 3 结果与讨论

#### 3.1 理论与仿真对比

本文算例中采用可重复使用运载器(RLV)进入大气时表面产生的瞬时热通量作为外加热源,以确定理论模型的适用性.RLV表面的气动加热曲线如图8所示,瞬时热通量从0 s变化到2200 s,其中 $q_{\text{max}} = 128500 \text{ W/m}^2$ 是热通量的最大强度,2200 s是再入过程的最后时间.RLV表面的热通量分布假定为分段多项式,各阶段具体的表达式见文献[19]中的表1。

将整个点阵结构的最大温度 $T_{s,\text{max}}$ (沿流动方向最后一个单胞的上面板外表面平均温度)以及流体出口的温度 $T_{f,\text{out}}$ 作为考核目标并进行理论与仿真结果对比.图9(a)为不同流体平均进口速度( $u_0 = 0.2 \sim 1.0 \text{ m/s}$ )下点阵结构的最大温度随时间的变化曲线,从图中可以看出,理论结果与CFD仿真结果吻合良好,最大误差低于1%.图9(b)为流体出口温度随时间的变化曲线,在当前的验证模型中,由于总尺寸较小,同时冷却剂流速较大,导致与入口温度相比,出口温度并无明显上升,但在整个非稳态过程中理论结果与CFD结果高度吻合。

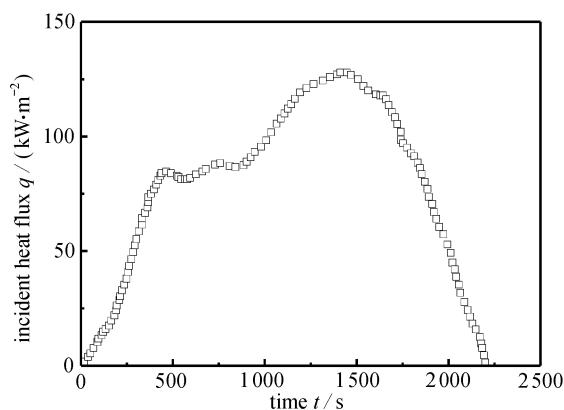


图8 RLV再入过程中表面的入射热通量随时间的变化曲线

Fig. 8 The incident heat flux profile vs. the re-entry time on the RLV surface

#### 3.2 收缩热阻对模型精度的影响

图10给出了 $u_0 = 0.2 \text{ m/s}$ 时,不同的恒定热流密度下点阵结构所能达到的最大温度,从图中可以看出,忽略收缩热阻使得计算结果偏低,并且随着热流密度不断增大,忽略收缩热阻使得计算结果造成的误差呈放大趋势,因此在外界热载荷较高时不能忽略收缩热阻的影响。

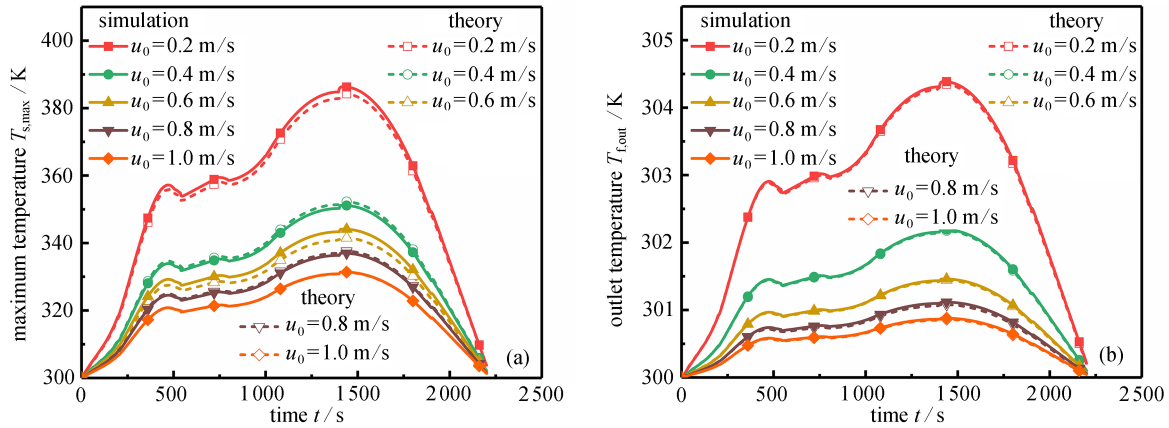


图 9 结构最大温度与流体出口温度的变化曲线: (a) 结构最大温度; (b) 流体出口温度

Fig. 9 Variations of the maximum temperature of the sandwich structure and the outlet fluid temperature with time: (a) the maximum temperature of the sandwich structure; (b) the outlet fluid temperature

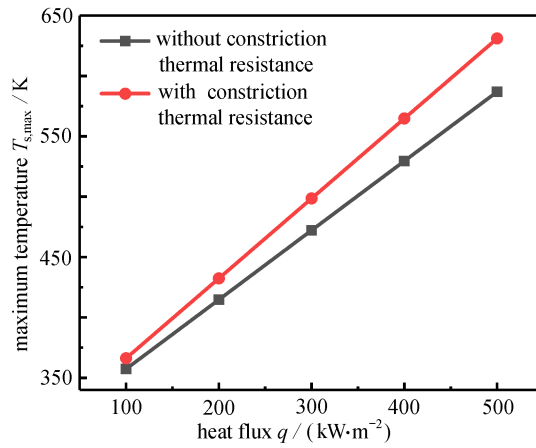


图 10 不同热流密度下结构的最大温度

Fig. 10 The maximum temperature of the structure under different heat flux densities

### 3.3 导热率和面板厚度对收缩热阻的影响

图 11 和 12 分别给出了在不同流体进口速度下收缩热阻随导热率和面板厚度的变化曲线. 结果表明, 在不同的流速下, 收缩热阻随着导热率以及面板厚度的减小而增大, 并且随着流速增大而减小, 因此在冷却剂流速比较小时, 忽略收缩热阻会造成较大的误差.

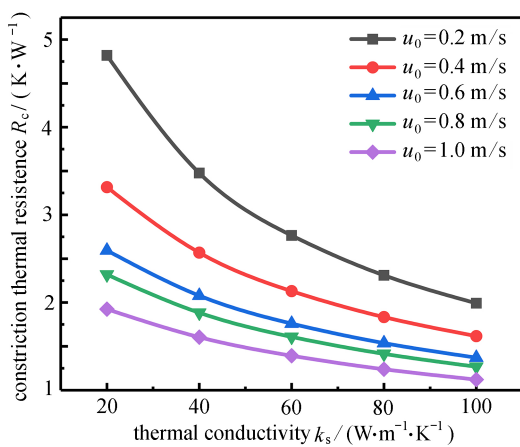


图 11 不同流体进口速度下收缩热阻随导热率的变化曲线

Fig. 11 Variations of the constriction thermal resistance with the thermal conductivity under different inlet fluid velocities

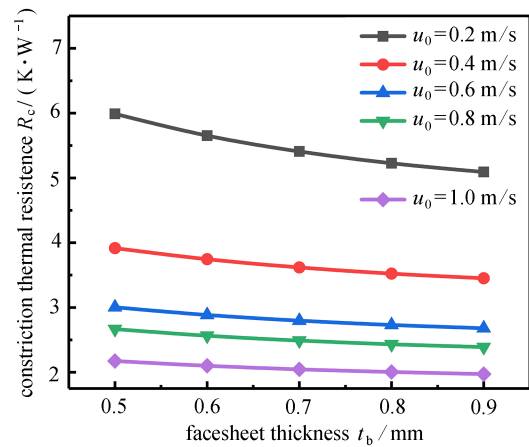


图 12 不同流体进口速度下收缩热阻随面板厚度的变化曲线

Fig. 12 Variations of the constriction thermal resistance with the facesheet thickness under different inlet fluid velocities

## 4 结 论

本文建立了可用于非均匀、非稳态复杂热载荷下快速预测点阵夹层结构温度响应的非稳态传热理论模型,首次考虑了夹芯杆根部与连接面板之间收缩热阻对点阵夹层结构传热的影响,并用数值方法进行了验证.得到的结论如下:

1) 理论模型能够准确预测金字塔点阵结构以及内部流体的温度场变化,理论结果与模拟结果吻合良好,最大误差不超过 1%,在考核算例下计算耗时仅为 CFD 模拟的 4%.

2) 随着外加热流密度不断增大,忽略收缩热阻使得计算结果造成的误差不断增大.

3) 收缩热阻随着导热率以及面板厚度的减小而增大,随着冷却流体进口流速增大而减小.因此,在高热流密度、薄面板厚度以及低冷却剂流速条件下预测点阵夹层结构传热特性,必须考虑面板与点阵芯体之间的收缩热阻.

### 参考文献(References):

- [1] 卢天健,何德坪,陈常青,等.超轻多孔金属材料的多功能特性及应用[J].*力学进展*,2006,**36**(4):517-535.(LU Tianjian, HE Deping, CHEN Changqing, et al. The multi-functionality of ultra-light porous metals and their applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2006, **36**(4): 517-535.(in Chinese))
- [2] 陈东,吴永鹏,李忠盛,等.轻质高强多功能点阵夹层结构研究进展[J].*装备环境工程*,2020,**17**(4):77-84.(CHEN Dong, WU Yongpeng, LI Zhongsheng, et al. Research progress of light weight, high strength and multi-function lattice sandwich structure[J]. *Equipment Environmental Engineering*, 2020, **17**(4): 77-84.(in Chinese))
- [3] PAN C, HAN Y, LU J. Design and optimization of lattice structures: a review[J]. *Applied Sciences*, 2020, **10**(18): 6374.
- [4] FERRARI L, BARBATO M, ESSER B, et al. Sandwich structured ceramic matrix composites with periodic cellular ceramic cores: an active cooled thermal protection for space vehicles[J]. *Composite Structures*, 2016, **154**: 61-68.
- [5] SONG J, SUN B. Coupled numerical simulation of combustion and regenerative cooling in LOX/methane rocket engines[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2016, **106**: 762-773.
- [6] FENG S S, LI M Z, JOO J H, et al. Thermomechanical properties of brazed wire-woven bulk Kagome cellular metals for multifunctional applications[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2012, **26**(1): 66-74.
- [7] WADLEY H N G. Multifunctional periodic cellular metals[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2006, **364**(1838): 31-68.
- [8] KIM T, ZHAO C Y, LU T J, et al. Convective heat dissipation with lattice-frame materials[J]. *Mechanics of Materials*, 2004, **36**(8): 767-780.
- [9] LU T J, VALDEVIT L, EVANS A G. Active cooling by metallic sandwich structures with periodic cores[J]. *Progress in Materials Science*, 2005, **50**(7): 789-815.
- [10] YAN H, ZHANG Q, CHEN W, et al. An X-lattice cored rectangular honeycomb with enhanced convective heat transfer performance[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2020, **166**: 114687.
- [11] YAN H B, ZHANG Q C, LU T J, et al. A lightweight X-type metallic lattice in single-phase forced convection[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **83**: 273-283.
- [12] TAKARAZAWA S, USHIJIMA K, FLEISCHHAUER R, et al. Heat-transfer and pressure drop characteristics of micro-lattice materials fabricated by selective laser metal melting technology[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2022, **58**: 125-141.



- [13] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. (TAO Wenquan. *Numerical Heat Transfer*[M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001.(in Chinese))
- [14] MENTER F R, KUNTZ M, LANGTRY R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model[J]. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 2003, **4**(1): 625-632.
- [15] ŽUKAUSKAS A. Heat transfer from tubes in crossflow[J]. *Advances in Heat Transfer*, 1972, **8**: 93-160.
- [16] MUZYCHKA Y S, SRIDHAR M R, YOVANOVICH M M, et al. Thermal spreading resistance in multilayered contacts: applications in thermal contact resistance[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1999, **13**(4): 489-494.
- [17] HUANG M J, SHAW Y R, CHIEN H C. Thermal spreading resistance of heat sources on rectangular flux channel under non-uniform convective cooling[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2019, **145**: 105979.
- [18] HE Y R, WANG X Z, HAN J C, et al. Numerical investigation on actively cooled thermal protection systems with Ni-based alloys[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2014, **30**(3): 604-616.
- [19] KUMAR S, MAHULIKAR S P. Reconstruction of aero-thermal heating and thermal protection material response of a reusable launch vehicle using inverse method[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2016, **103**: 344-355.