

应用数学和力学

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS



小波方法及其力学应用研究进展

刘小靖, 周又和, 王记增

Research Progresses of Wavelet Methods and Their Applications in Mechanics

LIU Xiaojing, ZHOU Youhe, and WANG Jizeng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420388>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于改进自适应混沌控制的逆可靠度分析方法

An Improved Adaptive Chaos Control Method for Inverse Reliability Analysis

应用数学和力学. 2017, 38(9): 979–987

近似Bayes计算前沿研究进展及应用

Recent Progress of Approximate Bayesian Computation and Its Applications

应用数学和力学. 2019, 40(11): 1179–1203

小波Galerkin法在非线性的分岔问题求解中的应用

Application of the Wavelet Galerkin Method to Solution of Nonlinear Bifurcation Problems

应用数学和力学. 2021, 42(1): 27–35

细胞趋硬性迁移的研究进展

Research Advances in Cell Durotaxis

应用数学和力学. 2021, 42(10): 999–1007

一类非线性三阶微分方程边值问题解的存在唯一性

Existence and Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems of a Class of Nonlinear 3rd-Order Differential Equations

应用数学和力学. 2020, 41(2): 216–222

火场-结构联合分析简化模型及其应用研究

A Simplified Model for Coupled Fire-Structure Analysis and Its Application

应用数学和力学. 2017, 38(8): 888–898



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

“应用数学和力学·钱伟长讲座”特邀论文

小波方法及其力学应用研究进展*

刘小靖, 周又和, 王记增

(兰州大学土木工程与力学学院 西部灾害与环境力学教育部重点实验室, 兰州 730000)

(本刊编委周又和、王记增来稿)

摘要: 小波理论在进行信号处理与函数逼近时体现出非常独特的时频局部性与多分辨率分析能力,小波基函数则可兼具正交性、紧支性、低通滤波与插值性等优良的数学性质,这均使得小波分析理论在计算数学与计算力学领域具有很大的应用潜力,也进一步为这些领域的突破性发展带来了新的契机.自 20 世纪 90 年代以来,大量的研究已经证明,基于小波理论的数值方法在微分方程求解中具有非常明显的优势,但与此同时也暴露出了一些由小波基函数本身与其特有逼近方式所造成的数值计算应用局限.为了促进小波理论在计算数学与力学领域的创新性应用,给研究人员提供新的研究视角,该文简要梳理了小波分析的发展背景以及基于小波理论的数值方法的研究历史,并着重讨论分析了后者所面临的问题,以及近年来针对这些问题中的基础性难题所取得的研究进展.这些总结与评述有望为后续进一步发展并完善基于小波理论的定量数学求解方法,以及拓展其在力学乃至广泛工程问题求解中的应用提供有意义的参考.

关键词: 小波分析; 多分辨率分析; 力学问题; 非规则区域; 强非线性; 高阶微分方程

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420388

Research Progresses of Wavelet Methods and Their Applications in Mechanics

LIU Xiaojing, ZHOU Youhe, WANG Jizeng

(Key Laboratory of Mechanics on Disaster and Environment in Western China, the Ministry of Education of China, College of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P.R.China)

(Contributed by ZHOU Youhe, WANG Jizeng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The wavelet theory shows very unique time-frequency localization and multi-resolution analysis ability in signal processing and function approximation. The wavelet basis function has excellent mathematical properties such as orthogonality, compactness, low-pass filtering and interpolation, which endows the wavelet analysis theory with great application potential in the fields of computational mathematics and computational mechanics, and creates new opportunities for breakthrough development in these fields. Since the 1990s, a large number of studies have proved that the

* 收稿日期: 2021-12-09; 修订日期: 2021-12-29

基金项目: 国家自然科学基金(11925204; 12172154); 高等学校学科创新引智计划(B14044); 国家重大工程(GJXM92579)

作者简介: 刘小靖(1986—),男,副教授,博士(E-mail: liuxiaojing@lzu.edu.cn);

王记增(1974—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: jzwang@lzu.edu.cn).

引用格式: 刘小靖,周又和,王记增.小波方法及其力学应用研究进展[J].应用数学和力学,2022,43(1):1-13.

numerical method based on the wavelet theory has very obvious advantages in solving differential equations, but at the same time, have exposed some limitations of numerical calculation application caused by the wavelet basis function itself and its unique approximation method. In order to promote the innovative application of the wavelet theory in the fields of computational mathematics and mechanics and provide researchers with a new research perspective, the development background of the wavelet analysis and the research history of methods based on the wavelet theory were reviewed, and the numerical method problems were emphasized and the research progresses made in recent years discussed. The conclusions and comments may provide a meaningful reference for the further development and improvement of quantitative mathematical solution methods based on the wavelet theory and applications in mechanics as well as solutions of a wide range of engineering problems.

Key words: wavelet analysis; multiresolution analysis; mechanics problem; irregular domain; strong nonlinearity; high-order differential equation

引 言

小波分析发端于对地震波的分析研究. 对于频率随时间显著变化的地震波, 研究人员除希望知道其所包含有哪些频率的波外, 更期望能够具体掌握各频率波所出现的次序与持续时间等信息. Fourier 分析虽能非常精准地给出整个地震波的频谱成分, 但却完全无法识别各频率波所发生的时刻, 即 Fourier 分析具有理想的频率分辨率, 但却完全没有时间分辨率^[1]. 显然, 对于普遍存在于自然界与人类生产活动中的各类频率随时间 (或空间) 变化的非平稳信号而言, Fourier 分析是远远不足以满足需求的. 故而, 在 Fourier 分析的基础上, 研究人员进一步提出了窗口 Fourier 变换^[2]. 通过引入一个窗口函数, 每次截取一小段时间 (或空间) 内的信号来进行 Fourier 分析, 从而使得窗口 Fourier 变换能够同时获得一定的时间 (或空间) 分辨率与频率分辨率. 其中, 时-频分辨率取决于窗口函数, 一旦取定则窗口 Fourier 变换的时-频分辨率会随之确定, 在整个分析中不会再发生变化. 通常, 较小的窗口可以获得较高的时间 (或空间) 分辨率, 反之较大的窗口则可以获得较高的频率分辨率, 即时间 (或空间) 分辨率与频率分辨率无法兼得. 事实上, 根据测不准原理, 我们不可能同时精确地识别出一个信号的频率与发生时刻, 即无法同时获得理想的时间 (或空间) 分辨率与频率分辨率, 二者之间必须进行折中. 在现实应用中, 对于通常持续时间较长 (或空间较大) 的低频信号, 我们希望获得高的频率分辨率, 而对时间 (或空间) 的分辨率要求可以适当降低. 反之, 对于持续时间较短 (或空间较小) 的高频信号, 我们则希望有高的时间 (或空间) 分辨率, 而对频率分辨率可适当放松. 因为分辨率水平决定着绝对误差, 对于频率较低的信号, 为控制频率分析的相对误差, 需使其绝对误差处于较低的水平 (即要求高频率分辨率), 反过来由于其持续时间较长 (或空间较大), 则即使时间 (或空间) 分析的绝对误差相对大一些也仍可使其相对误差维持在较低的水平. 而针对高频信号的分析要求则刚好相反. 由前述介绍可知, 窗口 Fourier 变换的时-频窗口在一次分析中是固定的, 即其时-频分析的绝对误差保持不变. 因此对于我们通常更为关心的相对误差, 将会随着信号频率与持续时间的变化而改变, 这对于频率随时间 (或空间) 变化较为剧烈的非平稳信号是不够理想的, 甚至很多时候是无法接受的. 故而, 研究人员在窗口 Fourier 变换的基础上进一步发展出来了小波分析^[3]. 小波分析通过尺度伸缩与位置平移可以在整个时域 (或空间) 生成一系列时-频分辨率不一的窗口, 即多分辨分析, 从而自适应地识别分析信号中的不同频率成分.

从 Fourier 分析到小波分析是复杂信号分析处理技术的一个逐渐改进发展的过程. 简而概之, 窗口 Fourier 变换在一定程度上弥补了 Fourier 变换完全不具有时间 (或空间) 分辨率的缺陷, 而小波分析则进一步弥补了窗口 Fourier 变换的时-频分辨率无法随信号频率自适应调整的不足. 后者可以不是非常准确地理解为, 窗口 Fourier 变换控制的是时间 (或空间) 分析与频率分析的绝对误差, 而小波分析控制的则是实际应用中更为关心的相对误差. 因此, 小波分析被认为是在信号处理领域中继 Fourier 分析之后的里程碑式进展^[4].

从小波分析的发展背景可以看出, 其为目前分析处理频率随时间 (或空间) 变化的非平稳信号的有力工具, 甚至往往是最佳选择. 而计算力学中许多问题的挑战正是来自于对局部特征的特征与捕获. 如复杂几何体

的建模往往可归结为对局部几何细节的刻画, 断裂问题分析的关键在于有效地处理裂尖附近应力场的奇异性及裂纹面处的间断. 同时, 由于物理与几何强非线性的存在, 大量力学问题在定量求解时会存在高阶(高频)信息与低阶(低频)信息耦合影响引起的计算难题. 如在计算流体力学中如何有效地表征不同尺度的涡运动及其之间的相互作用^[5]. 因此, 小波分析的特点正好迎合了解决目前计算力学中这些挑战性问题的根本需求, 进而在数学适用性上相较于常规方法具有更明显的优势. 同时, 小波基函数还可兼具紧支性、正交性、高阶连续性、一致性、插值性等诸多在数值计算中所期望的优良数值性质. 故而, 在小波理论初步成熟的 20 世纪 90 年代初, 研究人员便将小波分析引入到微分方程的求解与计算力学中, 构建了多种小波基数值方法用于分析求解各类物理力学问题. 如早在 1991 年, Latto 等便成功构造了求解 Burgers 方程的小波 Galerkin 法^[6]. 随后, Xu 和 Shann^[7] 系统研究了两点边值问题的小波 Galerkin 解法, 并指出需进一步攻克紧支撑正交小波函数或尺度函数与其导数乘积积分(通常称之为连接系数)的高精度计算以及抑制边界附近因级数截断所导致的数值失稳这两个基本难题. Tanaka 等^[8] 在采用不具有正交性的 B 样条小波 Galerkin 方法求解固体力学问题时, 也同样发现级数展开在边界附近的截断会导致离散后的刚度矩阵奇异等最终引起数值失稳的问题. 针对这两个小波方法发展中所面临的基础性问题, 兰州大学学者^[9] 于 2000 年前后提出了紧支正交小波连接系数的精确计算方法, 以及可有效抑制边界数值失稳的延拓技术, 从而大幅改善了小波 Galerkin 方法的求解精度, 并在一系列数值测试中验证展示了小波方法相较于有限元等传统数值方法在精度上的明显优势. 随后, 学者们^[9-11] 还进一步将小波 Galerkin 法扩展应用于高阶偏微分方程的求解, 如梁板结构的弯曲问题. 之后, 小波方法引起了更为广泛的关注与重视, 相关研究也得到了快速发展. 研究人员通过结合不同的小波基函数与方程离散技术开发出了多种小波基数值方法以求解各类物理力学问题. 如 Nakagoshi 和 Noguchi^[12] 在 2001 年提出了一种改进的小波 Galerkin 法以求解 Mindlin 板的弯曲问题. Alqassab 和 Nair^[13] 运用小波 Galerkin 方法分析了弹性电缆的自由振动. Li 等^[14-15] 基于小波有限单元法求解了板的弯曲问题, 并开发了一种裂纹检测技术. 这一发展时期, 有关各类小波基方法的研究进展, 可进一步参考 Li 和 Chen 于 2014 年发表的综述性文献^[16].

从上述简短的介绍可以看出, 小波方法在 2000 年前后的十余年里得到了迅猛发展. 但这些研究工作大部分属于对各类小波基数值方法的原理性验证, 很多研究都是基于非常简单的模型问题来分析讨论各类小波方法的精度、效率与稳定性等数值特性, 而针对相对更为复杂的工程问题的应用研究则非常匮乏. 事实上, 研究人员一直都在持续努力推动小波方法的实用化, 但却长期受制于如下两个基本问题迟迟无法得到有效解决而进展缓慢. 其一是非规则求解域的有效处理技术. 初始小波分析是定义在开区间上的, 因此在有限域上运用时需要进行级数截断, 由此将在边界附近产生数值失稳^[9]. 虽然在小波方法发展的早期已经给出了处理一维问题的边界延拓技术^[9], 但却一直缺少直接适用于二维与三维复杂区域问题的边界延拓方法. 因此, 对于二维与三维问题, 相应的小波基往往只能由结合边界延拓后的一维小波基的张量积来生成, 导致只能处理高度规则的问题域. 虽然研究人员针对这一问题先后提出了虚拟区域法与小波有限元等处理技术, 但各自都面临着一些较为严峻的挑战. 如在虚拟区域法中, 求解域被扩大导致计算量增加, 同时往往会在虚拟区域与真实问题域的界面处产生不连续, 导致计算精度下降以及数值稳定性问题^[17-18]. 而小波有限元则需计算小波基函数及其导数与 Jacobi 矩阵之积的积分, 由于小波函数的导数往往高度振荡, 造成这一积分所需的计算量非常大而精度却不高. 同时, 在相邻单元界面处的连续性难以保证, 即通常为非协调元, 故而在使用时还需额外关注稳定性问题. 其二是非线性问题的求解. 在运用小波 Galerkin 法求解非线性问题时, 需要计算小波基函数与其导数多重乘积或与超越函数之积等复杂函数的积分, 而这些积分通常难以高效高精度的获得. 故而, 在非线性问题求解中, 往往采用小波配点法以避免这些复杂的积分运算. 但对于大多数物理力学问题, 如固体力学问题, 与变分原理对应的 Galerkin 法往往具有更为优良的精度与稳定性. 但小波 Galerkin 法由于自身存在的上述局限, 难以展现优势.

正是由于小波方法在非规则求解域与非线性问题的处理中面临着上述挑战, 导致其难以用于分析相对复杂的工程问题. 因此, 虽然小波方法在很多基准模型测试中展现出了非常诱人的优势, 但限于自身极为有限的适用范围, 造成近年来关于小波方法的研究逐步减少. 但应该看到, 虽然小波方法具有一些自身的弱点, 但在复杂问题处理中其所具有的独特优势依然是不可替代的. 因此, 如何在保持小波分析优势的同时克服小波基

数值方法在非规则求解域与非线性问题分析中的局限成为了近些年来研究的热点, 本文后续部分将逐一介绍近年来小波方法在非规则求解域与非线性问题以及高阶微分方程求解方面的最新研究进展.

1 复杂求解域的处理技术

复杂求解域及相应边界条件的处理是所有数值方法面临的基本难题之一, 也一直是制约各种方法进一步发展与应用的主要障碍之一^[19-20]. 即使是目前已非常成熟的有限元与有限体积法等网格基方法, 也依然面临着网格生成极为耗时且难以完全由计算机全自动生成等诸多严峻挑战^[21-22]. 相对于这些采用多项式为基底的方法, 对于针对开区间函数分析而构建的小波而言则面临着更大的困难.

根据小波多分辨分析理论, 在有限区域 Ω 上逼近 L^2 函数时, 有^[23-24]

$$f(\mathbf{x}) = S^j f(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} Q^n f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N+N_e} c_k \phi_k(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} \sum_k d_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

其中 $\phi_k(\mathbf{x})$ 和 $\psi_k(\mathbf{x})$ 分别为由紧支小波尺度函数 $\phi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 通过伸缩平移形成的基函数. 图 1 给出了消失矩 $\gamma=6$ 和尺度函数一阶矩 $M_1 = \int x\phi(x)dx = 7$ 的广义正交 Coiflet 小波^[9] 的尺度函数和小波函数及其频谱. 在式 (1) 中, 展开系数可具体表征为

$$c_k = \int_{\Omega_k^\phi} f(\mathbf{x}) \bar{\phi}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad d_k = \int_{\Omega_k^\psi} f(\mathbf{x}) \bar{\psi}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

式中 $\bar{\phi}_k(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\psi}_k(\mathbf{x})$ 为相应的对偶小波基, Ω_k^ϕ 和 Ω_k^ψ 分别为 $\phi_k(\mathbf{x})$ 和 $\psi_k(\mathbf{x})$ 的紧支域.

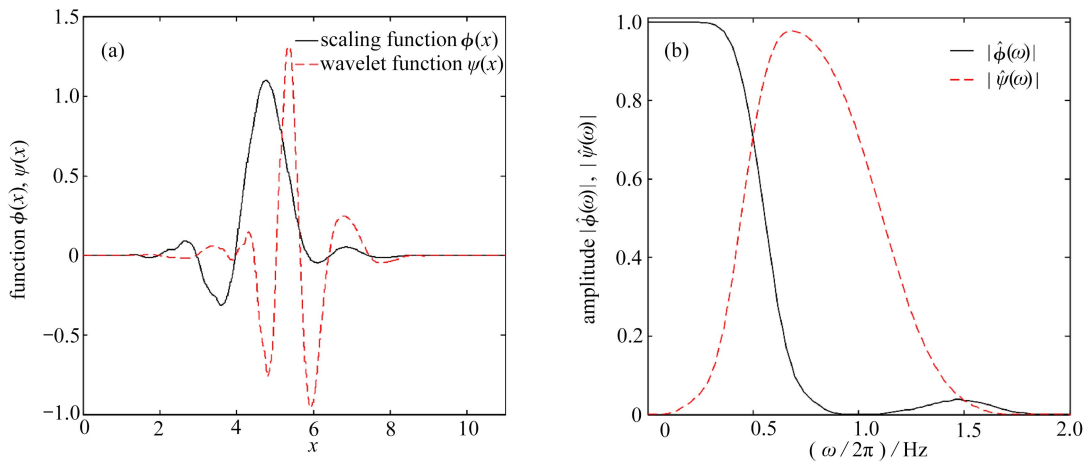


图 1 广义正交 Coiflet 小波 ($\gamma=6, M_1=7$): (a) 尺度函数 $\phi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$; (b) 频谱

Fig. 1 The generalized orthogonal Coiflet with $\gamma=6$ and $M_1=7$: (a) scaling function $\phi(x)$ and wavelet function $\psi(x)$; (b) frequency spectrum

基于小波多分辨理论, 在近似格式 (1) 中, 尺度级数 $S^j f(\mathbf{x})$ 表征着函数 $f(\mathbf{x})$ 的低频成分 (如图 1 所示), 并维持着式 (1) 精确重构低阶多项式的能力 (即一致性); 而小波级数部分 $Q^n f(\mathbf{x})$ 则代表着 $f(\mathbf{x})$ 的高频成分 (如图 1 所示), 通常用于描述局部细节, 作为对尺度级数的补充, 可根据实际需要进行增减. 因为尺度级数 $S^j f(\mathbf{x})$ 维持着式 (1) 的一致性, 故而必须完备, 即序列 $\{\phi_k(\mathbf{x}), k=1, 2, \dots, N+N_e\}$ 应当恰好刚刚是紧支域 Ω_k^ϕ 与区域 Ω 存在交集的所有尺度基函数的集合. 由此, 式 (1) 中必定会存在紧支域 Ω_k^ϕ 只有非常小的一部分位于区域 Ω 内的尺度基函数 $\{\phi_k(\mathbf{x}), k=N+1, N+2, \dots, N+N_e\}$, 如图 2 所示. 同时, 由图 1 可知对于紧支小波其函数值包含导数值在紧支域的边界处都非常小, 远小于其最大值. 因此, 若直接使用式 (1) 作为试函数, 则无论是用 Galerkin 法, 抑或是传统配点法, 还是其他离散方法, 在离散系统的系数矩阵中, 与这些基函数对应的行元素都会远小于其他行元素, 导致方程系数矩阵的条件数非常大甚至接近于奇异, 由此必须采用计算量非常大的特殊方法才能求解, 且解的精度往往非常不理想. 而另一方面, 如前所述这些项又不能直接舍掉, 否则式 (1) 在边界附近将会丧失精确重构低阶多项式的能力, 导致解的误差在边界附近急剧增大, 产生数值失稳^[4,25].

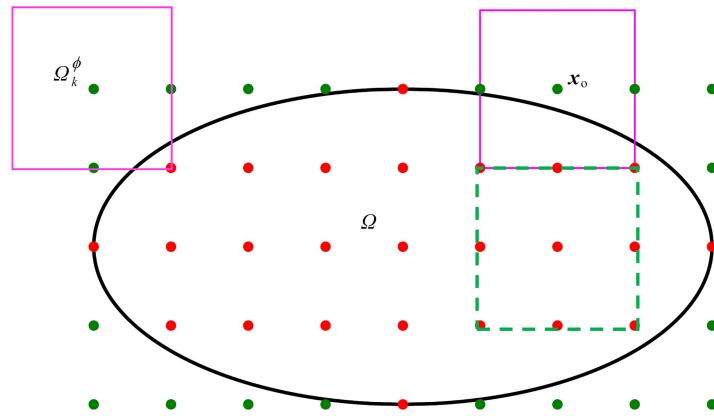


图 2 在有限区域上逼近函数所需的尺度基函数及边界延拓示意图
 Fig. 2 Diagrammatic drawing of the required scaling basis function and the corresponding boundary extension in the approximation of a function in a finite domain

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

鉴于在微分方程求解中, 既不能直接将式 (1) 中的展开系数 $c_k, k=N+1, N+2, \dots, N+N_e$ 作为基本求解量, 也不能直接赋为零 (即舍掉), 故而研究人员提出了边界延拓的思想^[26-27], 即用其余展开系数 $c_k, k=1, 2, \dots, N$ 将这部分系数表征出来. 但要通过初始定义式 (2) 建立二者之间的联系, 除非采用周期延拓否则几乎不可能. 但周期延拓, 即认为函数是以求解域为一个周期的周期函数的处理方式, 一方面只适用于高度规则的求解域, 同时并不能确保近似格式 (1) 的一致性, 只适用于极少数特定问题. 故而, 王记增与周又和^[17-18]进一步提出了计算尺度展开系数 c_k 的广义小波 Gauss 积分法, 同时国外学者也开发了插值小波^[25]. 二者的共同特征是用节点值来表征尺度展开系数 c_k , 即式 (1) 可改写为

$$f(\mathbf{x}) = S^j f(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} Q^n f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \theta_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=N+1}^{N+N_e} f(\mathbf{x}_k) \theta_k(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} \sum_k d_{n,k} \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

式中 $\theta_k(\mathbf{x})$ 为 (拟) 插值小波尺度基函数, $\mathbf{x}_k, k=1, 2, \dots, N$ 和 $k=N+1, N+2, \dots, N+N_e$ 则分别为位于域内和域外的节点.

基于近似格式 (3), 边界延拓转化为用域内节点值外推给出所需的域外节点值. 但由于在早期研究中缺少完善的理论分析, 往往根据尺度级数 $S^j f(\mathbf{x})$ 表征的是低频光滑部分, 因此边界延拓应该保证延拓后的域外函数与原域内函数也应该具有一定的光滑性这一定性原则进行. 但对于边界是曲线的一般二维区域与边界为曲面的一般三维区域, 要构建一个与域内函数在边界处具有高阶连续导数的域外函数非常困难, 故而只成功发展了针对一维问题的边界延拓技术, 如 Lagrange 插值延拓与 Taylor 展开延拓^[9,28]. 而对于二维与三维问题则只能采用延拓后的一维小波基的张量积来进行逼近, 导致只能适用于长方形与立方体等高度规则的求解域. 为了进一步处理非规则求解域, 研究人员一方面通过引入有限元的概念提出了小波有限元方法^[16], 但该方法在应用时其单元间的连续性往往难以保证, 且所需的小波基函数及其导数与 Jacobi 矩阵之积的积分难以高精度获得. 另一方面, 研究人员通过将求解域扩大为规则区域再结合 Lagrange 乘子法或罚函数法施加界面约束条件的方式构建了虚拟区域法^[12], 但这一方法一直面临着计算量大而精度低, 且数值稳定性不好的问题. 因此, 虽然经过了诸多尝试与努力, 但小波基数值方法一直未能有效地扩展应用于一般求解域问题, 难以处理各类实际问题, 适用范围与实用性极为有限, 造成近年来小波基方法的研究逐渐减少.

针对小波方法难以有效处理非规则求解域的问题, Liu 等^[29-31]经过长期探索于近期提出了一套针对一般区域的普适边界延拓技术. 基于完善的数学证明, 他们首先明确给出了边界延拓的实质是要补充一组适当的域外节点值, 从而使得近似格式 (3) 在全域内具有精确重构低阶多项式的能力这一定量原则. 继而通过理论证明, 用与距域外节点最近的域内节点通过 Lagrange 插值给出该域外节点值即可满足该要求. 如对于图 2 所示的域外节点 \mathbf{x}_0 , 可由离其最近的域内节点 (位于虚线框内) 通过 Lagrange 插值给出相应的值. 对于每一个域外节点, 这一插值都完全独立, 彼此之间不相互影响, 故而整个边界延拓过程非常简便易于实施. 由此, Liu

等^[29-31]给出了一种有效逼近定义在非规则区域上连续函数的小波格式,即

$$f(\mathbf{x}) = S^j f(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} Q^n f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \vartheta_k(\mathbf{x}) + \sum_{n \geq j} \sum_k d_{n,k} \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

其中 $\vartheta_k(\mathbf{x})$ 为结合边界延拓后的改进尺度基函数,其为标准尺度基函数 $\theta_k(\mathbf{x})$ 的线性组合.

但近似格式(4)通常不具有插值性,即使是对于插值小波也只在与尺度基函数对应的节点上(均匀分布的节点,如图3中的红色节点)才满足关系 $f(\mathbf{x}_k) = S^j f(\mathbf{x}_k)$.这一极为有限的插值性导致本质边界条件无法像有限元一样简便施加,只能采用目前无网格方法中所普遍使用的Lagrange乘法或罚函数法进行处理.但前者会扩大最后代数方程组的维数,并且造成刚度矩阵丧失正定性,而后者则无法精确施加边界条件,导致计算精度偏低.针对这一问题,Liu等^[29-31]通过重新定义多分辨分解关系(小波理论的核心关系)建立了一种能在任意指定局部节点上(与小波基函数对应)进行过点插值的小波近似格式,即

$$f(\mathbf{x}) \approx f^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathcal{R}} f(\mathbf{x}_k) \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{k \in Q} d_k \varphi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (5)$$

式中基函数 $\varphi_k(\mathbf{x})$ 为标准基函数 $\theta_k(\mathbf{x})$ 和 $\psi_k(\mathbf{x})$ 的线性组合.插值格式(5)满足性质 $f(\mathbf{x}_k) \equiv f^h(\mathbf{x}_k)$, $k \in \mathcal{R}$,其中节点组 $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathcal{R}\}$ 可为整体节点组的任意子集,如图3所示, Q 为 \mathcal{R} 的补集.

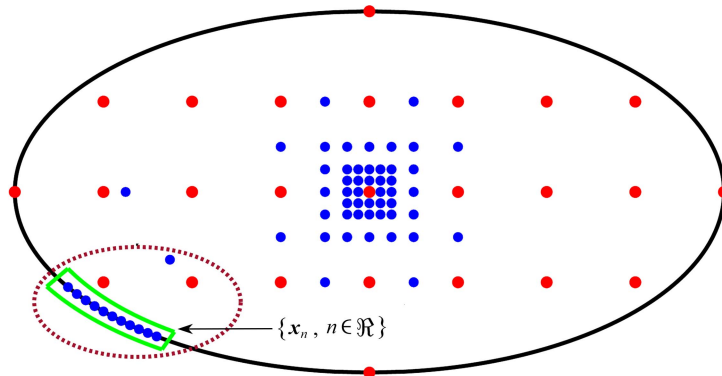


图3 小波多分辨定向插值的节点分布示意图

Fig. 3 Diagrammatic drawing of the distribution of nodes for targeted wavelet interpolation

结合小波多分辨定向插值格式(5)与变分原理,并通过开发非规则区域上小波连接系数的半解析积分方法,Liu等^[29-31]建立了小波多分辨插值 Galerkin 方法,并将其成功应用于线弹性力学与线弹性断裂力学问题的定量分析中.数值算例表明,这一方法可以非常高效地处理非规则求解域,如汽车连杆与轮毂等具有复杂几何形状的问题.同时在节点数量相同的情形下,其精度明显优于常用的线性有限元,而计算时间相当(有限元计算耗时中不包括网格划分)^[29-31].此外,该小波多分辨插值 Galerkin 方法还具有如下优点^[29-31]: 1) 不需要网格,包括背景网格,是一种真正的无网格法; 2) 所需节点分为均匀节点(可以都不位于边界上)与可任意添加的局部节点,如图3所示,生成规则明确易于实现,均可由计算机全自动高效生成; 3) 形函数生成过程中不存在任何矩阵求逆运算与任何经验参数; 4) 刚度矩阵积分可由半解析方法高效获得; 5) 位移边界条件的施加与有限元一样简便高效; 6) 得益于小波多分辨分析,具有强健稳定的局部细化能力,如对于裂尖应力场,只需在局部做多分辨细化即可准确地捕获到该奇异场.由国内学者近期所发展的这一小波多分辨插值 Galerkin 方法,为处理非规则域问题的求解这一小波基数值方法长期以来所面临的关键性基础难题,提供了一种可行的方案,展现出了发展成为科学研究与工程应用中各类物理与力学问题普适求解新型数值工具的潜力.

2 非线性问题的封闭求解技术

非线性广泛存在于各类科学和工程问题中,如弹塑性、大变形、接触、湍流等.这类问题的高效、高精度求解一直是计算数学与计算力学研究领域的前沿热点与难点问题之一.目前,针对非线性问题的求解总体上可分为两条基本途径.一是逐步追踪逼近,将原非线性问题转化为一系列线性问题进行求解^[32-35],典型的如分析大变形问题的增量有限元.但这一方法对于强非线性问题往往面临着精度难以满足需求,甚至无法获得收敛

解的难题. 同时, 各种线性化与收敛增强技术的有效性往往依赖于具体问题, 缺乏普适性^[32-37]. 另一种途径则是直接数值求解非线性微分方程, 通过将待求函数用级数展开并将其代入非线性项以获得非线性项的近似逼近格式, 继而再由 Galerkin 或配点方法等离散技术获得非线性离散系统以实现求解^[38-39]. 但现有采用这一途径的数值方法包括小波基方法均面临着一些局限.

如对于一般形式的偏微分方程:

$$L[u(x)] + N[u(x)] = 0, \quad (6)$$

其中 L 和 N 分别为线性和非线性微分算子. 在数值求解中不可避免地要对待求函数 $u(x)$ 的展开级数进行截断, 即将其表示为

$$u(x) = u^h(x) + \bar{u}(x) = \sum_{k=1}^N a_k h_k(x) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k h_k(x), \quad (7)$$

其中 $u^h(x)$ 为所保留的近似解, 而 $\bar{u}(x)$ 为舍掉的截断误差, a_k 和 $h_k(x)$ 分别为展开系数与基函数. 将式 (7) 代入式 (6) 可得

$$Q(x) = L[u^h(x)] + N[u^h(x)] = -L[\bar{u}(x)] - \{N[u^h(x) + \bar{u}(x)] - N[u^h(x)]\}, \quad (8)$$

式中 $Q(x)$ 为实际所求解的近似方程 $L[u^h(x)] + N[u^h(x)] = 0$ 的残差. 显然, 求解中必须将方程残差 $Q(x)$ 控制到足够小才能保证 $u^h(x)$ 为 $u(x)$ 的有效近似. 另一方面, 如果 $Q(x)$ 过大, 即近似方程与原方程存在较大区别, 则可能出现原方程有解但实际所求解的近似方程却并不存在解的情形, 由此导致求解过程不收敛. 但从式 (8) 可以看出, 方程残差 $Q(x)$ 不但依赖于截断误差 $\bar{u}(x)$, 同时还依赖于近似解 $u^h(x)$, 故而无法通过单独调控截断误差 $\bar{u}(x)$ 来确保方程残差 $Q(x)$ 处于相对极小的范围, 从而导致方法的有效性依赖于所求解的具体问题. 这一在非线性问题求解中所出现的近似解与截断误差相互耦合, 彼此相互影响的问题即为所谓的求解不封闭^[40]. 这是非线性问题求解显著区别于线性问题求解的基本特征. 例如, 若 N 也为一线性算子, 根据叠加原理则有方程残差 $Q(x) = -L[\bar{u}(x)] - \{N[u^h(x) + \bar{u}(x)] - N[u^h(x)]\} = -L[\bar{u}(x)] - N[\bar{u}(x)]$, 即对于线性问题, 方程的残差只依赖于截断误差 $\bar{u}(x)$ 而与近似解 $u^h(x)$ 无关, 所以求解是封闭的. 正是由于这一封闭性问题的存在, 导致非线性问题的求解难度远大于线性问题.

此外, 对于近似方程式 (8), 如采用 Galerkin 或有限元等方法求解, 则需计算 $\int h_l(x) N \left[\sum_{k=1}^N a_k h_k(x) \right] dx$ 等复杂积分, 这些积分通常是难以获得的. 尤其是当非线性算子 N 为一非整数幂次或超越函数关系时, 基本无法直接计算, 往往需先进行 Taylor 展开转化为一整数幂次非线性问题再进行求解^[40]. 由此, 在求解中又必须对这一 Taylor 展开的收敛性加以关注研究. 而对于利用性质优异的紧支撑正交小波为基底的小波 Galerkin 方法而言, 这一问题尤为突出, 因为目前只存在有关紧支撑正交小波基函数与其导数 3 重乘积积分的精确数值计算的有效方法^[4,9]. 因此即使是对于超过 2 次的整数幂次非线性问题, 也难以利用小波 Galerkin 方法进行处理, 造成其在非线性问题求解中的适用范围极为有限.

针对现有数值方法普遍存在的封闭性问题以及小波 Galerkin 法面临的复杂积分无法获得的难题, 周又和团队^[40] 在其所开发的广义小波 Gauss 积分法的基础上, 进一步提出了非线性问题的小波封闭解法. 在这一方法中, 假定非线性项是平方可积的, 这时其也可被视为一独立函数用式 (4) 进行展开, 即

$$N[u(x)] = \sum_{k=1}^N N[u(x_k)] \vartheta_k(x) + \sum_{n \geq j} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_{n,k} \psi_{n,k}(x), \quad (9)$$

其中非线性项的展开系数可用待求函数的展开系数加以显式表征, 从而避免了待求系数的增加. 这一处理方式明显区别于常规方法中所使用的将近似解直接代入非线性项的处理方式. 将式 (4) 和式 (9) 代入方程 (7), 可得实际所求解近似方程的残差为

$$Q(x) = \sum_{n \geq m} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_{n,k} L[\psi_{n,k}(x)] + \sum_{n \geq j} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_{n,k} \psi_{n,k}(x). \quad (10)$$

从式 (10) 中可以看出, 方程残差完全取决于决定截断误差的展开系数 $\tilde{d}_{n,k}$ 和 $\tilde{d}_{n,k}$, 而独立于表征近似解的展开

系数 $u(x_k)$,即实现了近似解与截断误差的解耦,因而其对于非线性问题的求解是封闭的^[40].

此外,从非线性项的展开格式(9)可以看出,非线性算子只作用在展开系数上,而不影响基函数.因此,对于一般的非线性问题,包括超越函数形式的非线性问题,这一小波封闭算法均只需用到已有方法即可实现精确计算的两项连接系数 $\int (d^n \vartheta_k(x)/dx^n) \vartheta_l(x) dx$ ^[40],从而完美解决了传统小波 Galerkin 法在非线性问题求解中所面临的复杂积分无法获得的难题.事实上,在使用这一小波封闭算法求解非线性微分方程时,其离散过程与线性问题的处理情形高度相似,同样的便捷.因此,相较于其他 Galerkin 类方法,由 Zhou 及其合作者所建立的小波封闭算法在求解普遍的非线性问题时也更为高效,易于实施^[40].

为测试上述小波封闭解法的实际性能,学者们^[10,11,40-52]已具体研究分析了大量物理力学非线性问题,如梁板结构的弯曲与屈曲问题、Burgers 方程和浅水波方程等.所得到的大量数值结果表明,这一小波封闭算法相较于有限元和有限差分法等常规数值方法具有更高的求解精度与计算效率,并且可以统一求解从弱到强的非常广泛的非线性问题,从而有效解决了常规方法的有效性依赖于具体问题非线性特征的难题^[10,11,40-52].最近, Ma 等^[53]直接运用这一小波封闭解法定量研究了大范围轴向运动绳的非线性耦合振动,评价其比有限元等常规方法计算精度更高且分析速度更快.美国与科威特学者则直接将该小波封闭解作为无法获得精确解的非线性问题的标准参考解,作为评估他们所提方法数值精度的标准^[54].此外, Yu 及其合作者^[55-56]通过将这一非线性小波封闭展开格式与传统同伦算法相结合,发展形成了所谓的小波同伦方法,在多类强非线性问题的定量求解^[57-60]中获得了良好的效果.他们认为这一小波逼近格式具有正交性、紧支集、插值性等数值计算中所期望的良好性质,并可非常方便地平衡效率与精度.同时,由于这一函数近似逼近格式对非线性形式不敏感,从而有效解决了传统同伦方法一直面临的对不同问题进行求解时需选择有效基函数的难题.

3 高阶微分方程的高精度求解

高阶微分方程广泛用于描述天体物理、流体运动与结构力学等学科中的诸多现象.如非对称载荷作用下,正交各向异性圆柱薄壳的变形可由 8 阶偏微分方程组描述^[61],均匀梁扭转振动的控制方程也为 8 阶偏微分方程^[62].而在流体力学中也存在许多需要由高阶微分方程来加以描述的问题^[63],甚至有些问题的数学模型为高达 24 阶的微分方程组^[3].

针对高阶微分方程的求解,目前有两条基本途径.一是将高阶微分方程的求解转化为低阶微分方程组,其实质就是利用逐步迭代的方式,通过多次使用低阶微分离散算子,来获得高阶微分的离散格式^[64-69].如 Liu 等^[67-69]通过反复使用低阶微分求积来离散算子,分别求解了 4 阶、6 阶和 8 阶微分方程.但在这类方法中,由于误差的急剧累加,导致解的精度将随着微分方程阶次的升高而急剧下降,难以获得高精度的近似解^[64-69].第二条途径是直接构造高阶微分算子的离散格式.如 Boutayeb 和 Twizell^[70]提出了离散 8 阶导数的有限差分格式,进而建立了求解 8 阶微分方程的有限差分法.但针对高阶导数的有限差分格式,一方面其构造过程异常繁琐,同时更重要的是在使用较小的网格尺寸时,其离散矩阵的条件数会非常高,从而引发数值稳定性问题^[70].因此,为保证求解的稳定性,不能使用过于细密的网格,求解精度受到限制,难以获得高精度解.而用有限元、配点法与 Galerkin 等方法求解高阶微分方程时,需要高阶连续的试函数与权函数.即使是对试函数连续性要求相对较低的弱形式,也要求试函数具有微分方程阶次一半阶次的弱导数.但通常具有高阶连续导数的试函数的构造极为繁琐,尤其是当求解域较为复杂时^[71-75].同时,这些方法在实际使用中还往往面临着稳定性问题.如 Siddiqi 和 Twizell^[73-74]在使用高次样条函数求解高阶线性边值问题时,便遇到了解在边界附近不收敛的问题.

事实上,上述求解格式的基本思想都是将待求函数作为基本未知量,然后通过数值微分将其导数用待求函数自身进行近似表征^[64-75].众所周知,数值微分随着导数阶次的升高其精度将会急剧下降,从而导致这些方法的求解精度都会随着微分方程阶次的升高而急剧衰减.特别是这些方法的收敛速度通常较低,一般很难超过 2 阶^[64-75],由此导致难以获得高阶微分方程的高精度近似解.这一问题即使是对于数值性质优良的小波基方法也无法避免^[46-54].如对于 2 阶微分方程,小波 Galerkin 法的收敛速度可达到 5 阶^[47],但用其求解 4 阶微分方程时则迅速衰减为 3 阶^[10].而且在小波方法求解高阶微分方程时还面临着自身特有的难题.由于大部分性质

优良的小波通常不具有解析表达式, 且其导数往往为高度振荡的函数, 因此计算其高阶导数以及与之相关的连接系数将是一项颇具挑战性的工作, 通常难以高精度地获得求解高阶微分方程中所需的这些导数和积分。

鉴于高阶微分方程求解所面临的难题, 学者们^[42,76-77]提出了一种高精度的小波积分配点法. 这一方法的基本思想是将非线性微分方程中的各阶导数分别看作未知函数, 从而将方程中复杂的导数与非线性耦合的关系转化为函数之间的直接关系, 并进一步通过配点方法将原方程离散为在节点上满足的一系列代数方程. 而代表各阶导数的未知函数之间, 则通过小波数值积分技术近似表征. 由于这一方法是采用数值积分来建立方程中各阶导数之间的联系, 而不是常规数值方法中所使用的数值微分思想, 因此这一小波积分配点法可有效地克服上述常规数值方法所面临的问题. 第一个优点是可以大幅放宽对试函数连续性的要求. 例如, Amin 等^[78-79]以只存在一阶弱导数的 Haar 小波为试函数便成功地获得了 8 阶与 10 阶微分方程的有效近似解. 第二个明显的优势是其收敛速度与精度对于微分方程的阶次不再十分敏感, 这得益于数值积分的精度通常要远高于数值微分. 如对于基于同一种小波所构造的数值微分与数值积分格式, 在近似逼近函数的 4 阶导数时, 数值精度较之逼近原函数会下降约 6 个数量级, 而相应的收敛速度会降低 4 阶. 但在逼近不同重数的积分时, 其精度与收敛速度则几乎保持不变^[40,76]. 具体的数值算例表明, 小波积分配点法在分别求解 4 阶、6 阶和 8 阶非线性微分方程时, 其收敛速度一直可保持 6 阶, 与直接利用小波基逼近函数的收敛阶数一致. 针对线性问题的误差分析表明, 在求解过程中小波积分配点法所涉及相关系数矩阵的条件数会随着未知量个数的增加而降低, 相较其他方法具有非常独特的数值稳定特性^[76]. 在一维与二维非线性波动问题的求解中^[77], 小波积分配点法的收敛阶数在空间上仍保持在了 6 阶, 而且这一收敛阶数几乎不依赖于问题中非线性的形式、时间的存在以及空间的维数.

4 总结与展望

本文对小波分析的提出背景、优点以及其在微分方程求解中的运用进行了简要梳理总结. 从中可以看出, 小波分析由于其独具的时频局部性与多分辨特性, 从而在复杂信号 (或函数) 的分析表征上具有明显的理论优势, 使得各类基于小波级数展开的数值方法也在微分方程的求解中体现出相应的优良性质. 但在将小波分析运用于计算数学与计算力学广泛问题的普适求解时, 也存在着一些必须克服的基础性难题, 如难以高效处理具有非规则求解域与复杂非线性的问题等. 这些难题的存在造成各类小波基方法的适用范围极为有限, 也因此导致近年来有关小波方法研究的关注度持续下降. 但近期, 国内学者通过开发提出小波多分辨插值 Galerkin 法、小波封闭解法以及小波积分配点法等, 给出了涉及非规则求解域、强非线性以及高阶导数等特征微分方程的高效处理技术, 有效地解决了小波基方法长期以来在这些问题求解中所面临的基础性难题. 由于这些方法在完整保留小波分析独特优势的同时有效地克服了小波方法自身的局限, 从而在相关问题的求解中表现出了相较于有限元与有限差分法等常规数值方法非常明显的优势, 并使得将小波方法直接用于复杂工程问题的求解成为可能, 也使得小波基数值方法再次展现出了良好的发展前景与潜力.

但是应当看到, 小波基方法虽然经过了 30 余年的发展, 但离发展成熟依然相距甚远, 还遗留着诸多问题有待进一步深入研究. 比如, 如何将小波多分辨插值 Galerkin 法与小波封闭算法融合起来, 从而形成一套对分析求解实际工程问题中所面临的各类具有复杂几何形态与局部大梯度的非线性问题广泛适用的新型数值方法? 以及如何运用小波多分辨插值 Galerkin 法的基本思想将求解高阶微分方程的小波积分配点法扩展至非规则求解域问题的研究中? 此外, 发展小波基数值方法与 CAD 的无缝数据交换技术, 以及将已有算法进一步软件化, 这在其进一步发展及实用化过程中也是必须要加以研究的课题. 最后, 小波分析在大规模数据的处理中具有非常独特的优势, 因此其与基于大数据驱动的计算数学和计算力学具有天然的契合点, 但目前只有极少数工作对此进行了初步的尝试, 故而将二者深度而有机地融合起来, 将有望成为小波基方法与计算力学领域新发展的下一个驱动点.

参考文献 (References):

- [1] CHAMPENEY D C. *A handbook of Fourier Theorems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [2] GABOR D. Theory of communication, part 1: the analysis of information[J]. *Journal of the Institution of Elec-*

- trical Engineers, Part III: Radio and Communication Engineering*, 1946, **93**(26): 429-441.
- [3] CRANDALL R E. *Projects in Scientific Computation*[M]. Springer, 1995.
- [4] 刘小靖, 王加群, 周又和, 等. 小波方法及其非线性力学问题应用分析[J]. 固体力学学报, 2017, **38**(4): 287-311. (LIU Xiaojing, WANG Jiaqun, ZHOU Youhe, et al. Wavelet methods and applications in nonlinear mechanics problems[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2017, **38**(4): 287-311.(in Chinese))
- [5] JAMESON L, ADACHI T, UKAI O, et al. Wavelet-based numerical methods[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 1998, **10**(4): 267-280.
- [6] LATTO A, RESNIKOFF H, TENENBAUM E. The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets[C]//*French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence*. Springer, 1991.
- [7] XU J C, SHANN W C. Galerkin-wavelet methods for two-point boundary value problem[J]. *Numerische Mathematik*, 1992, **63**(1): 123-142.
- [8] TANAKA S, OKADAD H, OKAZAWA S. A wavelet Galerkin method employing B-spline bases for solid mechanics problems without the use of a fictitious domain[J]. *Computational Mechanics*, 2012, **50**(1): 35-48.
- [9] 王记增. 正交小波统一理论与方法及其在压电智能结构等力学研究中的应用[D]. 博士学位论文. 兰州: 兰州大学, 2001. (WANG Jizeng. Generalized theory and arithmetic of orthogonal wavelets and applications to researches of mechanics including piezoelectric smart structures[D]. PhD Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 2001. (in Chinese))
- [10] ZHANG L, WANG J Z, ZHOU Y H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, **85**(3): 355-365.
- [11] ZHANG L, WANG J Z, ZHOU Y H. Large deflection and post-buckling analysis of non-linearly elastic rods by wavelet method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, **78**: 45-52.
- [12] NAKAGOSHI S, NOGUCHI H. A modified wavelet Galerkin method for analysis of Mindlin plates[J]. *JSME International Journal Series A: Solid Mechanics and Material Engineering*, 2001, **44**(4): 610-615.
- [13] ALQASSAB M, NAIR S. Wavelet-Galerkin method for free vibrations of elastic cable[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, **129**(3): 350-357.
- [14] LI B, CHEN X F, MA J X. Detection of crack location and size in structures using wavelet finite element methods[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **285**(4/5): 767-782.
- [15] LI B, CHEN X F, HE Z. A wavelet-based error estimator and adaptive scheme for plate bending problems[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2010, **7**(2): 241-259.
- [16] LI B, CHEN X F. Wavelet-based numerical analysis: a review and classification[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2014, **81**: 14-31.
- [17] 王记增, 周又和. 广义小波高斯积分法的误差估计[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1998, **34**(2): 26-30. (WANG Jizeng, ZHOU Youhe. An error estimation of generalized Gaussian integral method in wavelet theory[J]. *Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)*, 1998, **34**(2): 26-30.(in Chinese))
- [18] 周又和, 王记增. 小波尺度函数计算的广义高斯积分法及其应用[J]. 数学物理学报, 1999, **19**(3): 293-300. (ZHOU Youhe, WANG Jizeng. Generalized Gaussian integral method for calculations of scaling function transform of wavelets and its applications[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 1999, **19**(3): 293-300.(in Chinese))
- [19] BERTOLUZZA S, NALDI G, RAVEL J C. Wavelet methods for the numerical solution of boundary value problems on the interval[J]. *Wavelet Analysis and Its Applications*, 1994, **5**: 425-448.
- [20] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2): 229-256.
- [21] LIU G R. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*[M]. CRC Press, 2009.
- [22] MOUKALLED F, MANGANI L, DARWISH M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*[M]. Springer, 2016.
- [23] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on Wavelets*[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [24] BROWN I J. A wavelet tour of signal processing: the sparse way[J]. *Investigation Operacional*, 2008, **29**(3): 277-278.

- [25] DONOHO D L. Interpolating wavelet transforms[R]. Technical Report. Department of Statistics, Stanford University, 1992.
- [26] AMARATUNGA K, WILLIAMS J R. Wavelet based Green's function approach to 2D PDEs[J]. *Engineering Computations*, 1993, **10**(4): 349-367.
- [27] COHEN A, DAUBECHIES I, VIAL P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1993, **1**(1): 54-81.
- [28] XU C, WANG J Z, LIU X J, et al. Coiflet solution of strongly nonlinear p -Laplacian equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(7): 1031-1042.
- [29] LIU X J, LIU G R, WANG J Z, et al. A wavelet multiresolution interpolation Galerkin method for targeted local solution enrichment[J]. *Computational Mechanics*, 2019, **64**(4): 989-1016.
- [30] LIU X J, LIU G R, WANG J Z, et al. A wavelet multiresolution interpolation Galerkin method with effective treatments for discontinuity for crack growth analyses[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **225**: 106836.
- [31] LIU X J, LIU G R, WANG J Z, et al. A wavelet multi-resolution enabled interpolation Galerkin method for two-dimensional solids[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2020, **117**: 251-268.
- [32] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xucheng. *Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [33] TORO E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction*[M]. Springer, 2013.
- [34] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **43**(2): 357-372.
- [35] ARORA S, JAIN R, KUKREJA V K. Solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation using collocation method with quintic Hermite splines[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, **154**: 1-16.
- [36] KARAKOÇ S B G, ZEYBEK H. Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, **289**: 159-171.
- [37] PERIC D, OWEN D R J. Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids[J]. *Reports on Progress in Physics*, 1998, **61**(11): 1495-1574.
- [38] BLAISDELL G A, SPYROPOULOS E T, QIN J H. The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1996, **21**(3): 207-219.
- [39] 张德良. 计算流体力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (ZHANG Deliang. *A Course in Computational Fluid Dynamics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [40] ZHOU Y H. *Wavelet Numerical Method and Its Applications in Nonlinear Problems*[M]. Singapore: Springer, 2021.
- [41] 张磊. 高精度小波数值方法及其在结构非线性分析中的应用[D]. 博士学位论文. 兰州: 兰州大学, 2016. (ZHANG Lei. High-precision wavelet numerical methods and applications to nonlinear structure analysis[D]. PhD Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 2016. (in Chinese))
- [42] 王记增, 王晓敏, 周又和. 基于正交小波尺度函数展开的强非线性微分方程求解[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2010, **46**(5): 96-101. (WANG Jizeng, WANG Xiaoming, ZHOU Youhe. Numerical solutions to differential equations with strong nonlinearities based on series expansion of orthogonal scaling functions[J]. *Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)*, 2010, **46**(5): 96-101.(in Chinese))
- [43] 刘小靖, 王记增, 周又和. 一种适用于强非线性结构力学问题数值求解的修正小波伽辽金方法[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(3): 249-257. (LIU Xiaojing, WANG Jizeng, ZHOU Youhe. A modified wavelet-Galerkin method for computations in structural mechanics with strong nonlinearity[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(3): 249-257.(in Chinese))
- [44] 刘小靖, 王记增, 周又和. 一种分析柔性梁超大挠度问题的小波算法[J]. 固体力学学报, 2013, **33**(S1): 159-165. (LIU Xiaojing, WANG Jizeng, ZHOU Youhe. ZHOU Youhe. A wavelet method for studying large deflection bending problems of flexible beams[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2013, **33**(S1): 159-165.(in Chinese))
- [45] WANG J Z, WANG X M, ZHOU Y H. A wavelet approach for active-passive vibration control of laminated

- plates[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, **28**(2): 520-531.
- [46] LIU X J, ZHOU Y H, WANG X M, et al. A wavelet method for solving a class of nonlinear boundary value problems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(8): 1939-1948.
- [47] LIU X J, ZHOU Y H, ZHANG L, et al. Wavelet solutions of Burgers' equation with high Reynolds numbers[J]. *Science China Technological Sciences*, 2014, **57**(7): 1285-1292.
- [48] WANG X M, LIU X J, WANG J Z, et al. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, **28**(1): 83-90.
- [49] LIU X J, WANG J Z, ZHOU Y H. A space-time fully decoupled wavelet Galerkin method for solving two-dimensional Burgers' equations[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2016, **72**(12): 2908-2919.
- [50] LIU X J, WANG J Z, ZHOU Y H. A space-time fully decoupled wavelet Galerkin method for solving a class of nonlinear wave problems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **90**(1): 599-616.
- [51] WANG J Q, ZHOU Y H, LIU X J. A space-time fully decoupled wavelet Galerkin method for solving multidimensional nonlinear Schrödinger equations with damping[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, **2017**: 1-10.
- [52] WANG J Q, LIU X J, ZHOU Y H. A high-order accurate wavelet method for solving Schrödinger equations with general nonlinearity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2018, **39**(2): 275-290.
- [53] MA X, WU B, ZHANG J, et al. A new numerical scheme with wavelet-Galerkin followed by spectral deferred correction for solving string vibration problems[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, **142**: 103623.
- [54] TEMIMI H, BEN-ROMDHANE M, BACCOUCH M, et al. A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu's problem[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, **153**: 202-216.
- [55] YU Q, XU H, LIAO S J. Coiflets solutions for Föppl-von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach[J]. *Numerical Algorithms*, 2018, **79**(4): 993-1020.
- [56] YU Q, XU H, LIAO S J, et al. A novel homotopy-wavelet approach for solving stream function-vorticity formulation of Navier-Stokes equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **67**: 124-151.
- [57] WANG A, XU H, YU Q. Homotopy Coiflets wavelet solution of electrohydrodynamic flows in a circular cylindrical conduit[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2020, **41**(5): 681-698.
- [58] CHEN Q B, XU H. Coiflet wavelet-homotopy solution of channel flow due to orthogonally moving porous walls governed by the Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Mathematics*, 2020, **2020**: 5739648.
- [59] YU Q. A hierarchical wavelet method for nonlinear bending of materially and geometrically anisotropic thin plate[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, **92**: 105498.
- [60] YU Q. Wavelet-based homotopy method for analysis of nonlinear bending of variable-thickness plate on elastic foundations[J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, **157**: 107105.
- [61] PALIWAL D N, PANDE A. Orthotropic cylindrical pressure vessels under line load[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1999, **76**: 455-459.
- [62] BISHOP R E D, CANNON S M, MIAO S. On coupled bending and torsional vibration of uniform beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, **131**: 457-464.
- [63] CHANDRASEKHAR S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1961.
- [64] NOOR M A, MOHYUD-DIN S T. Homotopy perturbation method for solving sixth-order boundary value problems[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2008, **55**(12): 2953-2972.
- [65] GOLBABAI A, JAVIDI M. Application of homotopy perturbation method for solving eighth-order boundary value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **191**(2): 334-346.
- [66] NOOR M A, MOHYUD-DIN S T. Variational iteration method for solving higher-order nonlinear boundary value problems using He's polynomials[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, **9**(2): 141-156.
- [67] LIU G R, WU T Y. Differential quadrature solutions of eighth-order boundary-value differential equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002, **145**(1): 223-235.

- [68] WU T Y, LIU G R. The generalized differential quadrature rule for fourth-order differential equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(8): 1907-1929.
- [69] WU T Y, LIU G R. Application of generalized differential quadrature rule to sixth-order differential equations[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2000, **16**(11): 777-784.
- [70] BOUTAYEB A, TWIZELL E H. Finite-difference methods for the solution of special eighth-order boundary-value problems[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 1993, **48**(1/2): 63-75.
- [71] BALLEM S, VISWANADHAM K N S K. Numerical solution of eighth order boundary value problems by Galerkin method with septic B-splines[J]. *Procedia Engineering*, 2015, **127**: 1370-1377.
- [72] LANG F G, XU X P. Quartic B-spline collocation method for fifth order boundary value problems[J]. *Computing*, 2011, **92**(4): 365.
- [73] SIDDIQI S S, TWIZELL E H. Spline solutions of linear eighth-order boundary-value problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **131**: 309-325.
- [74] SIDDIQI S S, TWIZELL E H. Spline solutions of linear twelfth-order boundary-value problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1997, **78**(2): 371-390.
- [75] JOHNSTON H, LEAKE C, MORTARI D. Least-squares solutions of eighth-order boundary value problems using the theory of functional connections[J]. *Mathematics*, 2020, **8**(3): 397.
- [76] ZHANG L, WANG J Z, LIU X J, et al. A wavelet integral collocation method for nonlinear boundary value problems in physics[J]. *Computer Physics Communications*, 2017, **215**: 91-102.
- [77] WENG J, LIU X J, ZHOU Y H, et al. A space-time fully decoupled wavelet integral collocation method with high-order accuracy for a class of nonlinear wave equations[J]. *Mathematics*, 2021, **9**(22): 2957.
- [78] AMIN R, SHAH K, AL-MDALLAL Q M, et al. Efficient numerical algorithm for the solution of eight order boundary value problems by Haar wavelet method[J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2021, **7**(2): 1-18.
- [79] AMIN R, SHAH K, KHAN I, et al. Efficient numerical scheme for the solution of tenth order boundary value problems by the Haar wavelet method[J]. *Mathematics*, 2020, **8**(11): 1874.